Blas Pascal y la matemática

Por Javier de LORENZO

Escritor, pensador, místico y, fundamentalmente, polemista, Blas Pascal se ha convertido en figura de apasionada polémica en cuanto a sus contribuciones científicas. Para los más, es la pura imagen del creador genial, imagen plasmada en su "redescubrimiento" de la geometría de Euclides a los doce años. Para otros, Pascal no ha sido más que un inteligente plagiario, aprovechador de la buena fe de los amigos de su padre, buen aficionado a la matemática. Y aún otros hay que lo consideran a medio camino, para lo cual rechazan tanto los atributos de genialidad creadora como los ataques de plagiario; admiten, en la obra científica de Pascal, atisbos de una posible faceta creadora, pero sólo atisbos, no culminación, y ello por causa de la mística, truncadora del genio. Intentando marginarse a la polémica cabe aún una cuarta postura. Estudiar la obra científica de Pascal como tal obra científica, sin preocuparse *de momento* por su personalidad humana o sus contradicciones para, después, adoptar una postura consecuente frente a tanta pasión, que muchas veces muestra un cierto grado de desconocimiento respecto a la materia científica por la que polemiza y por la que toma posición apriorística. Dejando a un lado las contribuciones puramente físicas de Pascal, vamos a intentar responder a las preguntas ¿Qué relación liga a Pascal con la Matemática? ¿Fue un simple aficionado o bien fue un matemático profesional? En ambos casos, ¿cuál ha sido su contribución a esta disciplina? Leyendo atentamente lo poco que nos ha quedado de su obra matemática llegaremos a la conclusión de que Pascal fue un matemático profesional, creador. Adelantado en años a su época, a sus contemporáneos, observaremos que no sólo fue matemático en el sentido estricto del término, sino filósofo de la Matemática, preocupado por los fundamentos, estructura y metodología de la ciencia que trabajaba.

Las tres libido

La vida de Blas Pascal transcurre entre el 19 de junio de 1623 y el 19 de agosto de 1662. Treinta y nueve años, dos meses. Durante ellos, el pensamiento de Pascal se debate entre dos polos opuestos: la fe, la ciencia. Jansenio había reavivado la doctrina de San Agustín. Pretendía la reforma espiritual del hombre, la aceptación de su grandeza y, a la vez, de su miseria. El compromiso con el mundo ha de hacerse de modo que el hombre se purifique, hasta de la culpa de su nacimiento, con la sola luz de la fe, rechazando concupiscencias, las tres *libido*: *sentiendi* o deseo de goce, concupiscencia de la carne; *sciendi* o concupiscencia de la inteligencia, del "fruto amargo del árbol del Conocimiento"; *dominandi* o concupiscencia de la ambición, voluntad de poder, ambición de renombre y fama.

René Descartes, y con él los "hombres sabios" del momento, pretende superar estas antinomias escindiendo la actividad y el pensamiento humanos en dos planos: religioso, intelectual. Planos paralelos, sin jerarquización mutua y entre los cuales el hombre no debe confundir límites ni, mucho menos, trasvasarlos. La falta de jerarquización de cada plano respecto al otro impide posibles conflictos entre ellos. Cultivar el pensamiento, la ciencia, no implica que aquél que los cultiva no pueda cultivar también la religión, o no sea religioso. El propio ejemplo de Descartes pudiera considerarse como modelo de esta posición. Que exige, para adoptarla y mantenerla, un espíritu algo más tranquilo y sereno del que disponía el joven Pascal.

Por la educación recibida de su padre, el pensamiento, la ciencia abstracta se mostrarán a Pascal como la ocupación más digna a la que el hombre puede entregar su vida. Precisamente aquello que constituye al hombre como tal, lo que hace que el hombre sea hombre, no es más que el ser una caña pensante, una gota minúscula frente a todo el poderío del universo, pero una gota que "sabe" que lo es, que "conoce" su finitud, su sufrimiento, frente a esa grandeza del universo. Y es gracias a ese conocimiento que la grandeza del hombre, de la caña pensante, es una grandeza incomparablemente mayor que la grandeza inanimada que lo entorna. Pero si la educación de tipo cartesiano recibida de su padre y de los amigos de éste llevan a Pascal a la valoración casi exclusiva del pensamiento humano, el sentimiento religioso le conduce con igual violencia extrema a condenar ese pensamiento, ya que la libido sciendi ha sido, precisamente, la culpable del pecado original, de la caída y postración humana; ha sido la responsable de la miseria en la que el hombre se encuentra y que no podrá superar más que atendiendo a las verdades del corazón, de la fe graciable dada por Dios a quien El, además, desea.

Junto a esta contradicción, a esta lucha que se hará permanente en Pascal, con sólo leves momentos de superación, se encuentra la provocada por la libido dominandi. El deseo de nombradía le tienta con exceso. Al no anular el pensamiento, Pascal parece querer anular el reconocimiento de esos pensamientos utilizando seudónimos, anagramas, el anonimato incluso. Pero la vanidad de ser reconocido permanece, hasta aumentada. Su estilo le delata, pero se niega, realmente, a no publicar nada, a cortar de raíz todo posible elemento de vanidad. Haciendo vida de *solitario* en la abadía de Port-Royal, habiendo abandonado toda búsqueda científica, toda pérdida de tiempo en su búsqueda de Dios, no puede evitar el pensamiento y realiza su última contribución a la Matemática. Con palabras de su hermana Gilberte:

> Mais quel moyen a un esprit comme le sien d'être éveillé et de ne penser à rien... Mais como il y avail longtemps qu'il avait renoncé à toutes ces choses, il ne pensa pas seulement à rien écrire. Néanmoins... Il est incroyable avec quelle précipitation il mit cela sur le papier, car il ne faisait qu'écrire tant que sa main pouvait aller et il eut fait en très peu de jours. Il n'en tirait point de copie, mais il donnait les feuilles à mesure qu'il les faisait. On imprimait aussi una autre chose de lui qu'il donnait de même à mesure qu'il la composait et ainsi il fournissait aux imprimeurs deux différentes choses.

Si la libido sciendi era poderosa, también lo será la dominandi, hasta el extremo de publicar, aunque primero como anónimo, después con anagrama, para finalmente admitir lo que ya era conocido por todos, su nombre, un reto a todos los matemáticos del mundo, reto de afirmación de personalidad, de gloria descubridora y creadora. Reto que no dice su hermana en las palabras anteriores y que se refieren a este mismo hecho, a la cuestión de la cicloide. A la vez, su contradicción se manifiesta al adoptar postura también extremada, de pureza total religiosa, polemizando con los propios representantes oficiales jansenistas que tienden al compromiso político con el Estado francés y la Iglesia de Roma. Polemiza en nombre de la pureza de la fe, de la religión que debe vivirse en el aislamiento y con el corazón, no con el pensamiento; para lo cual Blas Pascal ha de escribir, pensar, polemizar. Es curioso observar, igualmente, cómo Pascal es uno de los primeros científicos más susceptibles en cuanto a las primicias del pensamiento, inmediato precedente de las estériles polémicas acerca de la prioridad en la creación de una idea por varios pensadores.

En cuanto a la libido sentiendi, a la eliminación de todo goce y deseo de goce, la constante y diaria represión a que se sometió Pascal entra de lleno en las interpretaciones que el psicoanálisis ha puesto tan al día.

La leyenda Pascal

Esta lucha consigo mismo, con todo el género humano, en sus tres vertientes, cuerpo, razón, voluntad, motivan que tanto la vida como la obra de Pascal no se presten a juicio sereno, equilibrado. Es difícil no dejarse arrastrar por todas las contradicciones que presenta, superadas quizá viéndolas como momentos de un proceso pre-dialéctico. Constituyen estas contradicciones uno de los motivos por los cuales puede comprenderse el por qué la figura Pascal ha penetrado tan rápidamente en la leyenda. La rosada exalta a Pascal como prototipo del puro espíritu, con leves caídas, también espirituales pero ya muy mundanas, que servían para revelar su carácter de genio en todos los terrenos, como el de la ciencia. La negra, sólo encuentra en él a un fracasado, plagiario en la ciencia, y bastante más carnal de lo que pretenden sus admiradores.

A crear esta leyenda ha contribuido la admiración familiar y el ser tomado como bandera de partido. Fundamentalmente, la admiración de su hermana mayor Gilberte, quien realizó una biografía de su hermano, base de todas las posteriores tomas de posición. La *Vie de Monsieur Pascal écrite por Madame Périer sa soeur, femme de Monsieur Pêrier Conseiller de la Court des Aides* *de Clermont*, como reza el título, también tiene su historia, esclarecedora. Compuesta al parecer en 1663, al año de morir Pascal, y durante una larga enfermedad de Gilberte, debía servir de prólogo a la primera edición de *Pensées*, que apareció en 1670, pero no lo hace hasta la séptima edición, de 1686, un año antes de la muerte de Gilberte.

Caben muchas dudas de que la versión que ha llegado a nosotros sea la que de modo efectivo compuso Mme. Périer. Por lo pronto, en la primera edición de *Pensées* la *Vida* no aparece, sustituída por una Introducción que escribe Etienne Périer, hijo de Gilberte. Y ello, porque tanto Arnauld como Nicole habían estimado que era inoportuna su publicación. A fines de octubre de 1668, el 23, se había firmado la Paz de la Iglesia, y tanto para Arnauld como para Nicole, según cuenta el propio Etienne, publicar a la vez la obra y la vida "l'on s'imagine dans le monde que les parents ne les publient que par une spèce d'ambition et de vanité" (1). En 1677 el argumento variaba; la Paz de la Iglesia ya estaba comprometida y en la *Vida* había expresiones que podían suscitar nuevas polémicas, sobre todo por el ataque que contenía al padre Beurrier, quien había asistido a Pascal en los últimos momentos y había declarado su conversión a la doctrina ortodoxa, aunque después lo negara. Sólo en 1686 se publica la *Vida*, encontrándose Arnauld en Bélgica, exiliado, y Nicole en París, escondido.

En cuanto a la pureza del contenido ya en 1668 Bridieu había propuesto "quelques corrections que l'on croit que vous ne désapprouverez pas", como escribe Florin Périer a su madre, agregando: "Si la chose n'est pas assez parfaite on y travaillera encore si vous le souhaitez." Y no sólo correcciones que podemos suponer que no afectaban al fondo. En 1677, los hijos de Gilberte informan que tanto Arnauld como Nicole, tras rechazar la inme-

---

(1) Introducción a *La Vie de Monsieur Pascal écrite par Madame Périer sa soeur*, por Louis Lafuma, en O. C. Ed. Seuil, P. 1963, pág. 17.

diata publicación de la *Vida*, opinaban "qu'il serait bonne de travailler dès cette heure à la *Vie* pour la mettre en l'état que l'on voudrait qu'elle parût" (2). ¿Hasta dónde llega esta *mise en l'état*? Es evidente que la biografía realizada por Mme. Périer es biografía idealizada, con trozos de pura intención religiosa, de la más estricta ortodoxia jansenista oficial, no propios de una Gilberte que, aunque sin duda preparada, reconoce no sentir tan vivamente el fervor religioso, al menos como sus hermanos Blas y Jacqueline. Todos los esfuerzos están orientados a presentar un Pascal puramente religioso, con algunas caídas, breves, por los senderos de la ciencia, fundamentalmente en su etapa juvenil, que llega hasta primeros de 1646 en que realiza la primera conversión, por la cual "il renonça à toutes les autres connaissances pour s'appliquer à l'unique chose que Jésus-Christ appelle nécessaire".

Pascal y la Matemática

La afición por la Matemática surge temprana en Blas Pascal. Y surge como deseo por el fruto prohibido. El sistema pedagógico que ejerce su padre, convertido en maestro y guía único, prohibe el aprendizaje de la Matemática. Inicial contradicción, ya que el padre es hombre "sabio" en esta disciplina —parece haber sido el primero en estudiar la curva antiguamente denominada "caracol de Pascal" en su honor, y que no es otra que el óvalo de Descartes de foco doble—, y precisamente por ello, se niega a que su hijo agote su salud dedicándose a la Matemática, a la que ve peligrosa por consumidora de cerebros y cuerpos, según relata Margarita Pèrier, aunque su madre Gilberte dé otras razones:

> Mon père était savant dans les mathématiques et il avait habitude par là avec tous les habiles gens en

(2) *Ibidem*.

> cette science qui étaient souvent chez lui. Mais comme il avait dessein d'instruire mon frère dans les langues et qu'il savait que la mathématique est une chose qui remplit et satisfait l'esprit, il ne voulut point que mon frère en eût aucune connaissance, de peur que cela ne le rendît négligent pour le latin et les autres langues dans lesquelles il voulait le perfectionner.

Naturalmente, la imaginación de Blas Pascal se excita con esta prohibición. Busca las ocasiones de satisfacerla. Pregunta constantemente al padre, que llega a prometerle la enseñanza de esta disciplina, pero "en lui proposant cela comme une récompense". Niño solo y mimado, sin madre desde los tres años, de cuerpo enfermizo y sin más maestro que su padre, que llega a confeccionarle las reglas de cada disciplina para que las pueda asimilar mejor, Blas Pascal es un "espíritu pensante". Y, como a tal, le basta una mera indicación de lo que sea una disciplina para construirla solo, según su hermana, naturalmente. Por la literatura a que ha dado paso este hecho conviene citar, a pesar de su extensión, el texto completo de Gilberte en el que narra el encuentro de su hermano con la Matemática.

> Mon frère, voyant cette résistance, lui demanda un jour ce que c'était que cette sciencie et de quoi on y traitait. Mon père lui dit en général que c'était le moyen de faire des figures justes et de trouver les proportions qu'elles ont entre elles et en même temps lui défendit d'en parler davantage el d'y penser jamais. Mais cet esprit qui ne pouvait pas demeurer dans ces bornes, dès qu'il eut cette simple ouverture que la mathématique donne des moyens de faire des figures infailliblement justes, il se mit lui-même à rêver et à ses heures de récréation, étant venu dans une salle où il avait coutume de se diver-

> tir, il prenait du charbon et faisait des figures sur les carreaux, cherchant les moyens par exemple de faire un cercle parfaitement rond, un triangle dont les côtés el les angles fussent égaux et d'autres choses semblables.
>
> Il trouvait tout cela lui seul sans peine: ensuite il cherchait les proportions des figures entre elles. Mais comme le soin de mon père avait été si grand de lui cacher toutes ces choses qu'il n'en savait pas même les noms, il fut contraint lui-même de s'en faire. Il appelait un cercle un rond, une ligne une barre; ainsi des autres. Après ces noms il se fit des axiomes et enfin des démonstrations parfaites et comme l'on va de l'un à l'autre dans ces choses il passa et poussa sa recherche si avant qu'il en vint jusqu'à la trente-deuxième proposition du premier livre d'Euclide.

Historia verdaderamente fantástica si la interpretamos, como muchos admiradores de Pascal, en su sentido más estricto de haber redescubierto, a los doce años y solo, tanto los axiomas, como las demostraciones, como las 32 primeras proposiciones euclídeas, con el mismo número de errores y en el mismo orden de aparición que en los *Elementos*. Pero tampoco parece lícito afirmar que el joven Pascal, excitado por la prohibición paterna de estudiar las ciencias exactas, espiara las conversaciones entre su padre y los demás matemáticos que acudían a su casa y leyera a escondidas los *Elementos* de Euclides, sin decirlo después, primera fase de los posteriores plagios. Parecería más normal tomarla en el sentido de historia admirativa de la hermana en el intento de resaltar la inteligencia de su hermano mimado, en la fase natural en la que todo niño comienza el aprendizaje de la geometría, y en la que el indiscutido talento de Pascal habría hallado alguna propiedad, clave de la admiración.

A partir de este momento, en que es descubierto por su padre, Blas Pascal comienza su formación matemática propiamente dicha. Su padre le enseña la geometría euclídea y a partir de los catorce años lo lleva a las reuniones que tiene semanalmente en la celda del padre Mersenne, origen de la Academia de Ciencias, donde conoce a Roberval, Carcavi, Desargues, Le Pailleur... A este centro llegan comunicaciones de Galileo, Descartes, Fermat, Huyghens, Torricelli... La presencia de Pascal es importante, porque Mersenne constituía el centro de comunicaciones científicas de los sabios de la época y en su celda se discutían las ideas tanto filosóficas como científicas de Europa. Del mismo orden de la mentira anterior, Gilberte se permite otra respecto a la actuación de Blas en la Academia:

> Mon frère tenait fort bien son rang tant pour l'examen que pour la production, car il était un de ceux qui y portaient le plus souvent les choses nouvelles.

Frase que ha motivado fuerte búsqueda hasta llegar a averiguar, por la publicación de las cartas de Mersenne, que sólo en 1639, a finales de año, el joven Pascal contribuye efectivamente a la colectividad, presentando su *Essay pour les coniques*. Pero aunque no contribuyera de modo efectivo hasta los dieciséis años, resulta indiscutible que Pascal dedicó el máximo de sus energías a la Matemática, todo su entusiasmo, que no puede ocultar su hermana:

> ... comme il trouvait dans cette science la vérité qu'il avait toujours cherchée si ardemment, il en était si satisfait qu'il mettait tout son esprit...

Ahora bien, resulta indiscutible también que junto a este entusiasmo existen en la vida de Pascal momentos de reserva e incluso despego total hacia esta disciplina, excesivamente peligrosa por la exaltación que implica de la razón, frente al aspecto religioso, que entraña la exaltación del corazón. La reserva ante la Matemática —que no implica abandono de la misma— se muestra en Pascal a partir de sus conversiones, especialmente de la segunda. Ya en 1648, en carta de 26 de enero dirigida a su hermana Gilberte, aunque muy matizada, esta reserva aparece clara. Cuenta, en esta carta, la conversación mantenida con el padre Rebours, encargado de la dirección de los religiosos de Port-Royal, al que Pascal se ofrece, en el fondo, para defender a los jansenistas, frente a los jesuitas principalmente. La desconfianza que mostrará Rebours en el poder de la razón, y que Pascal recoge, no es más que el anticipo de la desconfianza que él mismo mostrará a partir de este momento y que, naturalmente, girará hacia la Matemática:

> Mais, comme tu sais que toutes les actions peuvent avoir deux sources, et que ce discours pouvait procéder d'un principe de vanité et de confiance dans le raissonnement, ce soupçon, qui fut augmentée par la connaissance qu'il avait de mon étude de la géométrie, suffit pour lui faire trouver ce discours étrange, et il me le témoigna par une répartie si pleine d'humilité et de modestie, qu'elle eüt sans doute confondu l'orgueil qu'il voulait réfuter. J'essayai néanmoins de lui faire connaître mon motif; mais ma justification accrut son doute...

El despego se hará completo a partir de los trabajos sobre la cicloide. Y la más clara exposición de la causa puede encontrarse en la carta que envía a Fermat el 10 de agosto de 1660. En ella puede leerse:

> Car pour vous parler franchement de la géométrie, je la trouve le plus haut exercice de l'esprit; mais en même temps je la connais pour si inutile, que je fais

peu de différence entre un homme qui n'est que géomètre et un habile artisan. Aussi je l'appelle le plus beau métier du monde; mais enfin ce n'est qu'un métier; et j'ai dit souvent qu'elle est bonne pour faire l'essai, mais non pas l'emploi de notre force: de sorte que je ne ferais pas deux pas pour la géométrie, et je m'assure fort que vous êtes fort de mon humeur. Mais il y a maintenant ceci de plus en moi, que je suis dans des études si éloignées de cet esprit-là, qu'à peine me souviens-je qu'il y a en ait. Je m'y étais mis, il y a un an ou deux, par une raison tout à fait singulière, à laquelle ayant satisfait, je suis au hasard de ne jamais plus y penser, outre que ma santé n'est pas encore assez forte; car je suis si faible...

Estado de debilidad física y estado mental de despego completo hacia la Matemática, que confirmará Huyghens, con dolor, a finales de ese mismo año, a su paso por París, y que Pascal ya no recuperará más.

I. LA OBRA MATEMATICA

1. *GEOMETRIA*

Durante el siglo XVII se crean dos de los más fecundos instrumentos de la Matemática: la geometría analítica —obra de Fermat y Descartes— y el análisis infinitesimal —construido por Fermat, Roberval, Huyghens, Pascal..., y formulado definitivamente por Newton y Leibniz—. Estas realizaciones han oscurecido otras no menos importantes del mismo siglo, por ejemplo, el cálculo de probabilidades, el de variaciones, la geometría proyectiva... Además, el empleo del simbolismo coherente, la utilización de la analítica —es decir, la introducción del álgebra en la geometría— y el análisis infinitesimal provocan un cierto decaimiento de la disciplina que siempre se consideró como la "reina de la Matemática", la Geometría, cuyo término era, incluso, sinónimo al de Matemática. (El propio Pascal en *De l'esprit géométrique:* "géométrie, ce dernier mot appartenant au genre et à l'espèce.")

A) *Geometría proyectiva*

Dentro de la geometría sintética se encuentra la proyectiva, ligada a los métodos de perspectiva y originada en las proyecciones y secciones de conos luminosos, creada por el arquitecto Girard Desargues. Pascal y La Hire se convierten en sus discípulos. Pero la corriente de la época es opuesta. Y así, la obra de Desargues y de La Hire permanecerá semidesconocida, mientras que la de Pascal la perderán sus herederos. Cuando Poncelet, aislado en la cárcel de Rusia, haga renacer esta rama de la geometría en los primeros años del siglo XIX, tendrá que recrearla en su totalidad. Quizá hubiera sido importante para el posterior desarrollo de las ciencias exactas el hecho de que la geometría proyectiva hubiera alcanzado mayor resonancia en el siglo XVII, por su carácter no métrico, primer ejemplo de una rama de la Matemática que no debe ser definida como "ciencia de la cantidad". El amplio programa planteado por Desargues y Pascal coincide con el esbozado y realizado por Poncelet en 1822. Programa que, en síntesis, comprendía: utilización del método de proyección central o "método óptico" para considerar a la vez todas las secciones planas del cono, aplicar los mismos razonamientos a los diferentes tipos de cónicas y, asimilando los elementos del infinito a los elementos ordinarios, presentar de forma unificada y más simple numerosos problemas, como, por ejemplo, los referentes a las asíntotas o a los diámetros.

Es en marzo de 1639 cuando Girard Desargues publica, en edición de 50 ejemplares, su obra proyectiva fundamental, su *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan*. Blas Pascal tiene quince años. Es indudable que ha asistido a parte de la evolución de esta obra, discutida tanto en su casa como en la Academia Mersenne. Sus lecturas le capacitan para seguir el pensamiento arguesiano. Entre ellas —como ha puesto de manifiesto René Taton en inmejorable ensayo (3)— se encuentran los cuatro primeros libros de las *Cónicas* de Apolonio, considerado como el tratado más completo en esta materia; la *Colección matemática* de Pappus, editada en Pisa a finales del XVI con noticias de la obra matemática griega, difíciles de interpretar en muchos casos; la obra sobre las cónicas de Mydorge, amigo de su padre, en la cual simplificaba algunas de las demostraciones y resultados de la obra de Apolonio.

La obra de Desargues constituye una revelación para Pascal, por el método de perspectiva que encierra, por lo que se convierte en el primer discípulo y cultivador del plan arguesiano, cuyas ideas básicas eran, en esencia: introducción de elementos del infinito; definición de las cónicas como secciones planas cualesquiera de conos de base circular; estudio de estas secciones como perspectivas de la circunferencia; relación de involución determinada sobre una recta cualquiera por una cónica y los lados opuestos de un cuadrilátero inscrito en ella (4). Inmediatamente, Pascal inicia su obra original en este terreno. A fines de 1639 parece haber redactado ya su primera obra, que no es más que un esquema de trabajo, pero en el que da cuenta de alguno de sus descubrimientos. Sabemos que el 12 de noviembre Mersenne comunica

---

(3) René Taton: "L'oeuvre de Pascal en géométrie projective", páginas 17-72, en *L'oeuvre scientifique de Pascal,* P. U F. 1964, quizá la obra más completa realizada hasta la fecha sobre este aspecto pascaliano. Recoge distintos ensayos publicados con motivo del centenario de la muerte de Pascal en la *Revue d'histoire des sciences* a lo largo de 1962-63.

(4) Para mayores detalles de la obra proyectiva de Desargues: René Taton: *L'oeuvre mathématique de G. Desargues,* P. U. F. 1951, así como artículo de nota anterior.

a Descartes el próximo envío de este trabajo, a lo que Descartes contestaba con cierto escepticismo por el interés del mismo el 25 de diciembre. Pero el 18 de marzo de 1640, Huyghens anuncia a Descartes haber recibido un ejemplar para él. El bosquejo lleva por título *Essay pour les coniques*. Lo importante, en él, es la concepción geométrica total. Lo que pone de relieve el propio Pascal en su *Comunicación a la Academia de París*, ya de 1654, en la que dando el esquema de varias obras matemáticas que tiene redactadas o en vías de redacción final, señala entre ellas

> *Conicorum opus completum*, & conica Apollonii & alia innumera unica fere propositione amplectens; quod quidem nondum sexdecimum aetatis annum assecutus excogitavi, & deinde in ordinem congessi (5).

"Essay pour les coniques"

A pesar de la brevedad de esta obra y de la juventud de su autor, dieciséis años, el *Essay* es importante. Comienza con tres definiciones, de las cuales la primera conduce a la noción de punto en el infinito, aunque de modo implícito, por asociar las rectas paralelas a las concurrentes:

> Quand plusieurs lignes droites concourent à même point, ou sont toutes parallêles entre elles, toutes ces lignes sont dites de même ordre ou de même ordonnance...

En estas definiciones no hace más que seguir la obra de Desargues, aunque con una precisión quizá menor.

(5) "*La Obra completa de las Cónicas* comprendiendo las cónicas de Apolonio y otros innumerables resultados, por una sola proposición o casi; invención que he hecho cuando aún no había llegado a la edad de diecisiete años y que más tarde he puesto en orden."

Vienen, después, tres lemas. El primero formula para el círculo la propiedad de que los tres puntos que resultan de la intersección de los lados opuestos de un exágono inscrito están alineados. Ahora bien, la formulación en el *Essay* suscita algún problema interpretativo. Se ha asociado de modo general la formulación pascaliana tal como aparece en el *Essay* con el actualmente llamado "teorema de Pascal", que suele enunciarse diciendo que si seis puntos están inscritos en una cónica, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos del exágono que forman, inscrito en la cónica, están alineados. Esta formulación y la propia de Pascal son diferentes, aunque los teoremas que ambas enuncian pueda comprobarse que son equivalentes. Creo que la formulación pascaliana correcta sería:

> Dadas cuatro rectas en el plano, concurrentes dos a dos de forma que constituyan un cuadrilátero completo, y un haz de circunferencias con base en dos de los vértices no alineados, las rectas definidas uniendo los puntos de intersección de cada una de estas circunferencias con cada uno de los lados del cuadrilátero son concurrentes (6).

En el ejemplo pascaliano los segmentos que resultan son paralelos, lo que apoya la idea de que este teorema posee, subyacente, la propiedad que Pascal denominaría "exagrama místico", y que sólo aparece citado por Leibniz con muy borrosas indicaciones.

El tercero de los lemas no constituye más que una generalización del primero al caso de una sección cónica cualquiera, en lugar de la circunferencia. Inmediatamente, afirma:

---

(6) Otra formulación: R. Taton nota 3, pág. 22. Ver, igualmente, página 89 del artículo de Pierre Costabel: "Traduction française des notes de Leibniz sur les 'Coniques de Pascal'" en *L'oeuvre sc. de P.*, páginas 85-101.

> Ensuite de ces trois lemmes et de quelques conséquences d'iceaux, nous donnerons des Eléments coniques complets.

entre los cuales indica las propiedades de los diámetros y 'lados rectos' (7), tangentes, determinación de los vértices de los conos que pasan por una cónica dada cualquiera, construcción por puntos de cónicas sometidas a ciertas condiciones...

> Quoi faisant, nous énonçons les propriétés que nous en touchons d'une manière plus universelle qu'à l'ordinaire...

Entre ellas, Pascal da como ejemplo un teorema, que en lenguaje moderno, equivale a afirmar la igualdad de las razones armónicas de los haces que unen dos puntos de una cónica con los vértices de un cuadrilátero inscrito en ella, y que quizá fuera tan importante como su teorema para fundamentar una teoría unitaria de cónicas.

Vienen después siete teoremas más enunciados, de los cuales Pascal también promete la demostración a partir de las definiciones y del primer lema. El tercer teorema es el que hoy lleva el nombre de su creador, Desargues, al que Pascal dedica un muy amplio elogio señalando su deuda:

> ... M. Desargues, Lyonnais, un des grands esprits de ce temps, et des plus versés aux Mathématiques, et entr'autres aux Coniques...; et veux bien avouer que je dois le peu que j'ai trouvé sur cette matière à ses écrits, et que j'ai tâché d'imiter, autant qu'il m'à été possible, sa méthode sur ce sujet, qu'il a traité sans se servir du triangle par l'axe...

---

(7) Lado recto: segmento asociado al diámetro de una cónica con centro con valor $\frac{d^2}{d'}$, donde d es el diámetro y d' el diámetro conjugado.

La obra concluye con una declaración de modestia, de desconfianza en sus propias fuerzas para terminar la obra que promete. Obra por la que mostrará permanente interés. Hacia 1644, Mersenne afirma que Pascal ha obtenido 400 corolarios de su proposición universal, entre los cuales se encuentra la obra completa de Apolonio. Pero la carta de Pascal a Fermat de 29 de julio de 1654 contiene la afirmación de que aún continúa en la redacción de los trabajos geométricos, en los que lleva bastante tiempo. Sin embargo, este tratado prometido a los dieciséis años y jamás abandonado, llegó a estar redactado en su totalidad.

"Generatio conisectionum"

Ello se desprende de la petición realizada por los sobrinos de Pascal a Leibniz, en 1675-6, para revisar los originales matemáticos, viendo si, por una parte, están completos, y por otra, si merecen la publicación. Leibniz reordena los manuscritos del *Conicorum opus completum*, y escribe en la carta de devolución de originales a Etienne Férier, uno de los sobrinos, con fecha 30 de agosto de 1676:

> ... le corps de l'ouvrage, composé des VI traités, est assez net et achevé.
>
> Je conclus que cet ouvrage est en état d'être imprimé; et il ne faut pas demander s'il le mérite; je crois même qu'il est bon de ne pas tarder davantage, parce que je vois paraître des traités qui ont quelque rapport à ce qui est celui-ci; c'est pourquoi je crois qu'il est bon de le donner au plus tôt, avant qu'il perde la grâce de la nouveauté.

A pesar de estas recomendaciones, renovadas en 1692, los sobrinos se niegan a la publicación; pierden los manuscritos. Y sólo gracias a esta carta de Leibniz y a algunas notas y apuntes tomados por él y por Tschirnhaus conocemos el esquema de la obra completa y, fundamentalmente, el primer capítulo, titulado *Generatio conisectionum*, del *Traité des coniques*.

En el capítulo que ha llegado a nosotros por una copia de Leibniz, el método de perspectiva aparece con toda claridad y no subyacente como en el *Essay*. Tan breve como éste, posee, sin embargo, una mayor fuerza y profundidad, mostrándose como obra no sólo de creación de una teoría, sino de sistematización de la misma. Aparentemente, el plan es el mismo que el de Desargues, que Poncelet no hará más que redescubrir en 1822. Pero a diferencia de la obra arguesiona el método proyectivo puro *espacial* aparece en toda su nitidez. Lo que ya reconoce Leibniz cuando en la carta citada señala:

> I. El faut commencer par la pièce dont l'inscription est: *Generatio conisectionum tangentium et secantium; seu projectio peripheriae, tangentium, et secantium circuli, in quibuscumque oculi, plani ac tabellae positionibus*. Car c'est le fondement de tout le reste. Les figures y sont (sur des papiers détachés) inséréss.
>
> II. Après avoir expliqué la génération des sections du cône, faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cône des rayons...

El capítulo comienza por una parte I —todas las divisiones y títulos de secciones pertenecen a Leibniz—, en la que se da la definición de superficie cónica de base circular, de cono, vértice, semisuperficie cónica y directriz. Inmediatamente, cuatro corolarios que tratan de las posiciones de una recta o un plano respecto a la superficie cónica. Un escolio da la definición de los seis tipos de secciones cónicas originadas por la intersección de un plano y una sección cónica. Dichos tipos son: *Sección* *reducida a un solo punto; recta doble generatriz; ángulo rectilíneo formado por dos generatrices*, que constituyen los casos originados cuando el plano secante pasa por el vértice de la superficie cónica; cuando este plano no pasa por el vértice se originan los tres tipos restantes: *antobole* o elipse, *parábola* e *hipérbola*. A continuación, Pascal da cinco definiciones, en las cuales introduce el concepto de punto en el infinito de manera explícita, así como los de monosecante o tangente y asíntota o monosecante en el infinito. La última de las definiciones aparece incompleta.

La que Leibniz considera como parte IV, y que en su copia lleva por título *De apparentiis punctorum peripheriae* (8), se muestra como la parte en la que el aspecto proyectivo espacial, puntual, aparece con mayor fuerza:

> Hinc patet quod si oculus sit in vertice coni, sitque objectum peripheria circuli qui est coni basis, et tabella sit planum utrimque occurrens superficiei conicae, tunc conisectio quae ab ipso plano in superficie conica producetur, sive sit Punctum, sive sit Recta, sive Angulus, (sive Antobola), sive Parabola, sive Hyperbola, erit apparentia ipsius Peripheriae circuli (9).

La segunda propiedad que Pascal obtiene con este método de proyección visual es que si el plano secante no pasa por el vértice ni es paralelo a ninguna generatriz, entonces la sección cónica obtenida está a distancia finita

---

(8) "Imágenes de los puntos de la circunferencia." En ninguna de las ediciones de las obras de Pascal se han conservado los títulos puestos por Leibniz.

(9) "Está claro que si el ojo se encuentra en el vértice del cono, y si el objeto que se le muestra es el círculo que está en la base del cono, y si la tablilla es el plano que encuentra la superficie del cono por una parte y otra, entonces la sección cónica que se engendra por ese plano en la superficie cónica, sea un Punto, una Recta, un Angulo (una Elipse), una Parábola o una Hipérbola, será la imagen de la misma circunferencia del círculo."

y es la elipse. Como inmediato escolio se obtiene que la elipse encierra un espacio finito al volver sobre sí misma —de aquí el nombre de antobole con el que la designa Pascal—. Y según que el plano secante adopte las posiciones de paralelismo a una de las generatrices o a dos, la sección obtenida será parábola o hipérbola. De cada uno de estos enunciados se obtiene un escolio afirmando que tanto la parábola como la hipérbola tienen uno o dos puntos en el infinito, respectivamente, encerrando un espacio infinito la parábola y dos la hipérbola, a pesar de que ambas son imágenes de la circunferencia, que encierra un espacio finito.

Una quinta parte lleva por título *De apparentiis secantium* (10) y contiene tres corolarios que tratan acerca de la perspectiva de las rectas secantes al círculo de base de la superficie cónica, distinguiendo en cada uno de ellos los casos de la elipse, parábola, hipérbola. La propiedad de ser una recta secante a la circunferencia base se mantiene en la perspectiva de la elipse en todos los casos, pero tiene que distinguir los puntos del infinito en las otras dos secciones, ya que si estamos en la parábola, por ejemplo, y la recta corta a la circunferencia base en el punto que no tiene imagen finita, la imagen de la recta será paralela a un rayo y cortará a la parábola en un solo punto a distancia finita.

Por último, una sexta sección, que en el manuscrito de Leibniz se titula *De apparentiis tangentium* (11), contiene tres corolarios y cuatro escolios, en los cuales hace el mismo estudio que en el apartado anterior, pero referido ahora a las tangentes, apareciendo muy claramente expuesto el papel de las asíntotas como tangentes en el punto del infinito.

El capítulo concluye con un cuadro comparativo de las propiedades de los tres tipos de cónicas consideradas

(10) "Imágenes de las secantes."
(11) "Imágenes de las tangentes."

antes, y que muestra la posibilidad de que su estudio pueda realizarse de forma unitaria al no tener en cuenta las propiedades métricas de estas curvas.

De las obras geométricas compuestas por Pascal sólo han llegado a nosotros cuatro fragmentos. De ellos, el *Essay* y la *Generatio* son los que tratan de la geometría que cultivó, casi exclusivamente, Pascal, de la geometría proyectiva. Los otros dos, *De l'esprit géométrique* y el *Extrait d'un fragment de l'Introduction*, están destinados a los principios y metodología de la Matemática. Tres de estos fragmentos se han conservado gracias a Leibniz. Algunos historiadores han pretendido reconstruir, si no el texto, al menos el posible contenido de los cinco restantes capítulos de una obra por la que Pascal mostró siempre predilección, del *Traité des coniques*, y de la que, tanto por su primer capítulo antes reseñado como por el sumario de los restantes que hace Leibniz y por las propias indicaciones hechas por el autor en su *Comunicación a la Academia de París*, se añora aún más la falta, porque ciertamente lo poco que ha quedado es de gran riqueza conceptual, mostrándonos a Pascal como geómetra proyectivo auténtico y profundo.

B) *Los "Tratados de la Ruleta"*

Bajo el nombre genérico de *Traités de la Roulette* se han reunido los trabajos de Blas Pascal acerca de esta curva (12), así como otra serie de escritos relacionados bien con ella, bien con los métodos empleados en su

(12) Es la engendrada por un punto de una circunferencia que gira sin resbalar a lo largo de una recta. Se la ha denominado "Helena de la Geometría" en recuerdo de las pugnas que provocó Helena de Troya, ya que la cicloide ha dado motivo a frecuentes polémicas entre los matemáticos. Pertenece a una de las familias más elegantes de curvas mecánicas denominadas cicloidales en general. La considerada por Pascal es la natural porque el punto generador se encuentra en la circunferencia móvil. Si estuviera interior sería la acortada, y si exterior, alargada. La cicloide no sólo es la tautócrona, sino también braquistócrona. Se utiliza frecuentemente en la construcción de arcos y bóvedas.

estudio. Más que obra de geometría lo es de análisis infinitesimal, fundamentalmente de cálculo integral, por los problemas que plantea y los métodos que utiliza para su resolución. Problemas que, en la actualidad, han perdido todo el interés y la pasión que suscitaban en el siglo XVII, ya que no presentan serias dificultades gracias, precisamente, al cálculo integral. Sin embargo, cuando Pascal comienza el estudio de la cicloide no tiene más indicaciones que las dadas por Torricelli, que se reducían a la definición y a la propiedad de que el área de la cicloide es triple de la del círculo de la circunferencia que la engendra. Su ignorancia no le impide lanzar un reto a todos los matemáticos para resolver algunos de los problemas que esta curva encerraba. Reto que hace desde su retiro de Port-Royal, donde desde los primeros meses de 1658 se dedica al estudio de la cicloide. Dejando a un lado la historia anecdótica del motivo de su preocupación geométrica —cubrir las noches de insomnio producidas por vivo dolor de muelas, según Gilberte—, intentemos seguir la historia de este *Traité* situado a medias entre la geometría y el análisis, con mayor referencia a las cuestiones geométricas, para volver después a los aspectos analíticos, quizá los más importantes de la obra.

Por lo pronto, la historia se abre con una *Circular*, anónima, de mediados de junio de 1658. En ella se pide "a los geómetras más ilustres del universo" la solución de seis problemas, en tres apartados, estableciendo un primer premio —*"non mercedis gratia (quod absit!)..."*— de 40 doblones de oro españoles, llamados pistolas en Francia, para la primera solución correcta que *llegue*, no que se envíe, a M. Carcavi, a quien nombra juez principal del concurso, y un segundo premio de 20 doblones de oro a la segunda contestación correcta que llegue. Los problemas que el Anónimo propone son:

Conociendo una ordenada ZY sobre el eje de una semicicloide cualquiera, AC, se pide:

1.° El área CZY y su centro de gravedad.
2.° Los volúmenes engendrados por la rotación de CZY alrededor de ZY y de CY, así como los centros de gravedad de estos sólidos.
3.° Los centros de gravedad de los sólidos parciales obtenidos cortando los volúmenes precedentes por los planos meridianos.

Tras el enunciado de los problemas, la *Circular* aclara el tipo de soluciones que deben ser enviadas. Lo que se pretende juzgar, más que las soluciones en sí a las cuestiones propuestas, es la "penetración de espíritu" de los concursantes; por lo cual, los errores que se cometan en el cálculo carecerán de importancia, siempre que esos cálculos no sean más que un acompañante de la solución geométrica justa. Y aún más, basta el envío de los datos que estimen necesarios para poder deducir cualquiera de los puntos propuestos, sin necesidad de remitir la redacción completa, aunque entonces se exige la demostración completa de dos casos particulares que el Anónimo también enuncia: 1.° Cuando Z se confunda con A; 2.° Cuando Z se encuentre sobre la paralela a la base de la cicloide por el centro del círculo generador. Como fecha tope para la recepción de respuestas se establece la del 1 de octubre de 1658. La *Circular* concluye con una Descripción de la cicloide, definición tomada de Torricelli.

A mediados de julio, el Anónimo se ve obligado a agregar una nueva *Circular*, más corta, con importantes puntualizaciones sugeridas por Carcavi:

> Se nos hace observar, primeramente, que en los enunciados de nuestros problemas nos hemos servido de las palabras en una *cicloide cualquiera*, mientras que no definíamos más que una sola especie de cicloide.

Ante esta advertencia que Carcavi le envía por sugerencia de un segundo personaje, Pascal limita la resolución de las cuestiones a la cicloide natural,

> porque es fácil extender a todas las otras especies lo que está demostrado para aquélla.

En segundo lugar, aclara lo que debe ser conocido: la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro. Y por último, la segunda Circular, aunque de un modo muy elíptico, elimina del concurso las cuestiones de los dos primeros apartados, limitándolo a la determinación de los centros de gravedad de los sólidos y sólidos parciales presentados en el tercer apartado. Con las palabras del Anónimo:

> Hoc itaque tantummodo jam instituimos, ut sola problematum difficultas remaneat superanda. Nempe:
>
> Si simicycloîs ACF circa basim AF convertatur, et solidum inde genitum secetur plano per ipsam AF (quae jam hujus solidi axis est) ducto, quod quidem solidum dividet in duo semisolida paria: alterutrius horum semisolidorum centrum gravitatis assignari postulamus.

Ya hemos señalado cómo Pascal, al lanzar el desafío, desconocía casi todo acerca del tema. Habiendo hallado y demostrado algunas propiedades de la cicloide natural, y dominando tanto el método "a la manera de los antiguos" como el de los indivisibles, parecía esperar que en el transcurso de tres meses y medio, los que daba de plazo, lograría resolver las cuestiones propuestas. Sin embargo, la segunda *Circular* muestra una clara rectificación y la influencia de un gran matemático. A Carcavi sólo podía indicar la ambigüedad de los términos "cicloide cualquiera" aquel que previamente conociera y hubiera estudiado los tres tipos de cicloide. Igualmente, la supresión de cuatro de los seis problemas del concurso no podía deberse a otro hecho que al de haber sido ya resueltos por un matemático distinto al Anónimo y que no se presentaba al concurso. Este matemático no es otro que el antiguo amigo del padre de Pascal, y también suyo, Roberval. Esta circunstancia aparece con entera claridad en los escritos siguientes de Blas Pascal, ya en octubre, pasado el plazo que señalara para la recepción de soluciones.

El 7 de octubre Pascal lanza una nueva Circular, también anónima, justificativa de las condiciones que ha impuesto al concurso. Y el 10 de octubre publica la *Historia trochoides sive cycloidis, gallicè, la roulette in qua narratur quibus gradibus ad intimam illius lineae naturam cognoscendam perventum sit*, más conocida por *Historia de la ruleta llamada de otras maneras trocoide o cicloide...* y cuyo sólo título ya muestra la influencia de Roberval, único matemático que designaba a la cicloide con el término griego trocoide, basado en la propiedad por él descubierta de poseer un área tres veces mayor que la del círculo que la engendra. Pero no sólo el título. La *Historia* es, en su totalidad, un elogio y homenaje público a Roberval, conteniendo algunas informaciones que sólo podía suministrar el homenajeado, por lo cual se ha podido afirmar que el verdadero autor es Roberval, aunque la redacción sea pascaliana. En cuanto al desconocimiento que Pascal tenía de la obra de Roberval se debe, entre otros factores, a que Roberval sí era tan declarado enemigo de la publicidad y de la fama como buen matemático. A ello se refiere Pascal cuando en la *Historia* afirma:

> ... M. de Roberval, teniendo tan poco deseo de fama que no ha publicado jamás cosa alguna, mucha gente ha sido sorprendida, incluso yo mismo. Esto ha hecho que en mis primeros escritos hable de la Trocoide como siendo invención de Torricelli. Y

es por lo que me he sentido obligado a devolver a M. de Roberval lo que le pertenece verdaderamente.

Igualmente, la *Historia* nos muestra la actividad intensa a que durante el verano de 1658 se han dedicado algunos matemáticos. Nos informa del descubrimiento de Huyghens —ser la cicloide la curva tautócrona—, así como de la resolución de un problema no propuesto tampoco por Pascal, pero clave en el estudio de toda curva: la rectificación de la cicloide. El arquitecto inglés Christopher Wren envía en agosto la proposición "la línea de la ruleta es cuádruple de su eje", mucho antes de que la hallara Pascal. Quien, desbordado, ha de prolongar, hasta diciembre, el plazo de resolución del problema: hallar los centros de gravedad de los semisólidos descritos en las circulares anteriores —"el más difícil y propiamente el único que propongo"—. También se compromete a publicar las respuestas si, para diciembre, nadie ha enviado contestación correcta.

Antes del 1 de octubre sólo han concurrido dos matemáticos al premio: el inglés Wallis y el jesuita francés Lalouère. En ausencia de Carcavi, es el propio Pascal quien juzga ambos trabajos, publicando el fallo el 25 de noviembre. Por él, los dos premios quedan desiertos, al apreciar que las soluciones de Wallis y de Lalouère son erróneas. El importe de los premios, así, revierte al Anónimo. El fallo hace que se entable otra polémica entre Pascal y Lalouère, marginada realmente al tema central del concurso.

Entre diciembre de 1658 y enero de 1659, Pascal publica una serie de trabajos, nueve en total, que constituyen el núcleo central, propio, de los *Tratados de la Ruleta*. Dada la discontinuidad de estos ensayos, su orden temporal ha dado motivo a alguna discusión, carente de interés en cuanto al fin de hallar el centro de gravedad de los sólidos engendrados al girar la semicicloide alrededor de cada uno de sus ejes. La serie de estos trabajos, que se publicó originalmente con el título *Lettres de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy*, se inicia con una carta de Carcavi, fechada el 10 de diciembre. En ella se exige la resolución de los problemas propuestos y se halla, implícita, la justificación del abandono de los cuatro problemas. Inmediata, la respuesta de Pascal, importantísima para la historia del cálculo infinitesimal. Como ya el Anónimo tiene que desaparecer, surge como autor del desafío —circulares, historias, juicio crítico— y obligado creador de las soluciones, *Amos Dettonville*, claro anagrama de *Louis de Montalte*, seudónimo utilizado por Pascal en *Les Provinciales*. Tras esta oscura mostración de la personalidad del Anónimo, enteramente conocida como se desprende de la correspondencia sostenida con Wren, Lalouère, Huyghens..., la *Carta de M. Dettonville a M. de Carcavi* expone los planes a seguir en tres puntos: Orígenes del Método para resolver los problemas, Método, Resolución de los Problemas. Y aunque de entrada dé el cálculo final del centro de gravedad, lo importante no es el resultado en sí, sino el cúmulo de proposiciones por el cual se logra. Proposiciones en las que se introducen nuevos conceptos, que constituyen el único centro de interés actual, por lo que sólo nos ocuparemos de ellas.

a) *Orígenes del Método*

Tras la definición de *suma triangular* de varias cantidades A, B, C, D, que es $A + 2B + 3C + 4D$, si se comienza por A, y que es concepto importante para el cálculo infinitesimal pascaliano, M. Dettonville explica el origen del Método que va a utilizar en declaración que es sorprendente para un lector matemático actual. Afirma:

> ... je vous dirai les pensées qui m'ont mené à cette connaissance.

> J'ai considéré une balance B, A, C,
>
> B A C
> 4 —— 5 —— 3 —— . —— 9 —— 8
>
> suspendue au point A, et ses bras de telle longueur qu'on voudra AB, AC, divisés en parties égales de part et d'autre, avec de poids pendus à chaque point de division...

Si la balanza está en equilibrio es que el punto A, del que se encuentra suspendida, es, precisamente, el centro de gravedad. La condición que Pascal encuentra para este equilibrio es que las sumas triangulares de los brazos sean iguales entre sí. Propiedad basada, implícitamente, en la ley de la balanza, que establece que la fuerza de un peso es proporcional a la longitud del brazo en el que actúa. Ahora bien, si hubiéramos utilizado un lenguaje moderno para expresar estas condiciones, tendríamos que hablar de momentos estáticos, lenguaje que no pertenece a la Matemática propiamente dicha. Sin embargo, para Pascal, la Estática es mero apoyo o soporte imaginativo para su pensamiento estrictamente matemático. Y así, supera la proporcionalidad establecida anteriormente en términos estáticos dividiendo la balanza —como lo hiciera Galileo en 1638— en partes iguales, con lo cual la proporcionalidad la expresa mediante un número abstracto; es decir, el equilibrio de la balanza se estudia contando el peso en función de su rango, con lo cual la dimensión de la balanza y de sus partes resulta indiferente. Podemos afirmar, por ello, que la suma triangular es un operador independiente de la dimensión de la balanza y, en el fondo, no expresa más que lo que hoy se denomina integral cuando el número de cantidades que intervienen en la suma tiende a infinito.

Después de dar tres Proposiciones generales en cuanto al uso de las sumas triangulares y poner cuatro ejemplos que extienden su aplicación,

> à toutes sortes de grandeurs, c'est-à-dire aux lignes courbes, aux surfaces planes et courbes et aux solides,

Pascal pasa a enunciar el Método general para hallar los centros de gravedad de todo tipo de líneas, superficies y volúmenes.

b) *Formulaciones del Método*

La primera formulación del Método es la siguiente:

> Je dis qu'un des bras est à l'autre (c'est-à-dire que la distance entre le centre de gravité de la figure et l'un des plans extrêmes est à la distance entre le même centre de gravité et l'autre plan extrême) comme la somme triangulaire de toutes les portions de la figure, à commencer par le premier plan extrême, à la somme triangulaire de ces mêmes portions, à commencer par l'autre plan extrême.

Esta formulación entraña algunos problemas. Podemos destacar el que reduce el conocimiento del centro de gravedad al de la longitud de la figura dada, ya que la proporción se establece entre el cociente de las dos sumas triangulares comprendidas entre los planos extremos. Pero entonces las sumas triangulares dejan de ser operadores independientes de la dimensión de la balanza. Lo que aparece expuesto por el propio Pascal al señalar la intervención de los planos extremos y medios del haz que corta a la figura dada. Haz de planos —o de rectas, según sea la dimensión de la figura que consideremos— paralelos y a igual distancia entre sí, que cortan a la figura dada en porciones iguales. Al considerar las sumas de estas porciones Pascal señala muy explícitamente en una *Advertencia* que no son sumas simples, sino sumas de productos de cada una de las porciones de la figura por la distancia que existe entre los planos del haz. Igualmente, se diferencian de modo implícito dos tipos de porciones, cuyo sentido sólo viene dado por el contexto: las obtenidas entre cada dos planos o rectas del haz y las que van desde uno de los planos extremos, considerado fijo, a cada uno de los restantes. Estos dos tipos de porciones dan lugar a dos tipos de sumas que no son simples en el sentido antes indicado.

Estos hechos le permiten pasar a una segunda formulación del Método general, en la cual ya no aparece el concepto de suma triangular y que se liga de modo mucho más directo al centro de gravedad que se desea conocer. Esta segunda formulación es:

> Je dis que la somme de toutes les portions de la grandeur comprises entre un des plans extrêmes et un chacun de toutes les plans, est égale à la grandeur entière multipliée par son bras sur l'autre plan extrême.

El paso de la suma triangular como operador independiente al producto de toda la magnitud por su brazo se debe a que la magnitud considerada es, en términos actuales, una función continua, y la división por planos paralelos entre sí en cantidad indefinida no es más que una división que exige el empleo del infinito y el paso al límite cuando el incremento de la variable independiente —que no es otro que la distancia entre los planos o rectas del haz— tiende a cero. Para realizar esta operación, Pascal se liga al método de los indivisibles, único que, en la época, le permitía realizar ese cálculo. Con el cual obtiene un corolario que se refiere a la cicloide, aunque emplee las palabras:

> Si la grandeur est donnée (la longitud de la curva es conocida) et la somme de toutes ses portions comprises entre un des plans extrêmes et chacun des

autres plans, et que la balance soit aussi donnée:
Je dis que les deux bras seront cussi donnés.

c) *Nuevos conceptos*

Una vez definidos y explicados el Origen del Método y el Método en sí, Pascal pasa a establecer un conjunto de nuevos conceptos, que, encadenándose, son los que permitirán la resolución de los problemas propuestos. Entre ellos el de *suma piramidal*, que se relaciona con el de suma triangular mediante la propiedad:

> ... s'il y à tant de quantités qu'on voudra A, B, C, dont la première soit multipliée par le carré de 1, la seconde par le carré de 2, la troisième par le carré de 3, etc., leur somme prise de cette sorte sera égale à deux fois leur somme pyrammidale, moins leur somme triangulaire.

Propiedad expresada en términos puramente aritméticos, pero que se convertirá en geométrica en la visión pascaliana. La suma piramidal no expresa otra cosa, en lenguaje actual, que el momento de inercia de una superficie. Pierre Costabel pretende (13) que, para Pascal, representaba el momento estático respecto a la base de los paralelepípedos rectángulos que tienen por base, sobre el plano de la figura, los elementos de superficie de la misma y por altura las distancias a la base. Sin embargo, este lenguaje quizá falsee el pensamiento más puramente geométrico de Pascal, para quien la suma simple de líneas —lo que hoy es integral definida— da lugar a un plano; la suma triangular de las mismas origina un sólido o volumen en un espacio de tres dimensiones "qui est composée d'autant de plans qu'il y à de divisions dans l'axe";

(13) Pierre Costabel: "Essai sur les secrets des 'Traités de la Roulette' ", en *L'oeuvre...*, de nota 3, págs. 169-206.

mientras que la suma piramidal da paso a una figura compuesta de sólidos, un "plan-plan, composé d'autant de solides qu'il y à de portions dans l'axe, lesquels solides sont formés chacun par les sommes triangulaires particulières, dont la somme totale fait la somme pyramidale... Et l'on ne doit pas être blessé de cette quatriéme dimension..."

Tras el concepto de suma piramidal, a cuyas propiedades dedicará uno de los escritos de los *Tratados de la ruleta* titulado *Propriétés des sommes simples, triangulaires et pyramidales*, Pascal introduce en la *Carta* el concepto de *inglete*, sólido prismático con base un triángulo rectángulo delimitado por tres planos, dos de ellos perpendiculares entre sí, y una superficie cilíndrica cuyo eje es la recta de intersección de los planos perpendiculares. El concepto de inglete, que se liga al de suma piramidal, es el que permitirá a Pascal resolver los problemas de los centros de gravedad. Con sus palabras:

> Pour résoudre ces problèmes, la première chose que je fais, est de substituir à ces demi-solides des onglets qui y ont un grand rapport

Y ello porque

> ... si on connaît la dimension et les centres de gravité des onglets et de leurs surfaces courbes, on connaîtra la même chose dans les demi-solides, par la comparaison du rayon au quart de la circonférence, dont on suppose ici que la raison est donné.

Pero para el completo estudio del inglete, Pascal necesita introducir aún otro concepto, el de *seno* referido bien al eje bien a la base de un triángulo rectángulo mixto o trilínea. Al dividir una curva en partes iguales, los senos sobre el eje o sobre la base serán las distancias desde los puntos de división de la curva al eje o a la base. Esta definición es, realmente, equivalente a la de ordenada sobre el eje o sobre la base. Sin embargo, la sutileza de Pascal quiere que ambos conceptos sean distintos. Para ello hace la siguiente *Advertencia:*

> It faut aussi remarquer que les sinus diffèrent des ordonnées, en ce que les sinus naissent des divisions égales de la courbe, et les ordonnées des divisions égales de l'axe ou de la base.

Sutil distinción en la que se apoya el trabajo que sigue inmediatamente a la *Carta*, el *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets*, donde desarrolla todas las proposiciones que pueden realizarse por la equivalencia de sumas infinitas construidas a partir de las ordenadas y de los senos, y al que volveremos al hablar de alguno de los logros de Pascal en el análisis. Una vez que Pascal ha introducido estos tres nuevos conceptos, termina la *Carta* a Carcavi recordando los problemas propuestos en junio y octubre y afirmando que:

> Ainsi, pour résoudre tous les problèmes proposés, il suffira de trouver ces trois choses: 1.° La dimension et le centre de gravité d'une portion quelconque de la roulette CZY; 2.° Le centre de gravité de sa ligne courbe CY; 3.° La dimension et le centre de gravité des doubles onglets, tant de la base que de l'axe, et la dimension et le centre de gravité de leurs surfaces courbes.
>
> Ce sont odnc là les problèmes que vous verrez ici.

Problemas que se reducirán, a su vez, como demuestra en el *Traité des trilignes*, a calcular seis sumas en función de las ordenadas sobre el eje. Sumas que dependen de una propiedad característica de la cicloide:

> Chaque ordonnée à l'axe de la demi-roulette est

égale à l'ordonnée du demi-cercle générateur, plus à l'arc du même cercle, compris entre l'ordonnée et le sommet.

y que demuestra en el llamado *Traité Général de la roulette ou problèmes touchant la roulette*, donde al fin Pascal da las soluciones definitivas de los problemas por él propuestos.

2. CALCULO INFINITESIMAL

Los métodos del cálculo

Cuando Blas Pascal se enfrenta con el cálculo infinitesimal encuentra dos métodos muy distintos. Por una parte, el llamado de *exhaución* utilizado desde los tiempos de Arquímedes; por otra, el llamado de los *indivisibles* creado pocos años antes, en 1621, por Cavalieri. Cada uno poseía sus ventajas y sus inconvenientes, que Pascal llega a conocer a la perfección, siendo uno de los más reconocidos matemáticos en el empleo de ambos métodos.

a) *Método de exhaución*

La figura de Arquímedes avalaba para los matemáticos del siglo XVII este procedimiento. A Arquímedes la Geometría en el sentido aristotélico-euclídeo no le interesa. Busca otras vías en la Matemática. Y las encuentra, precisamente, en el análisis aritmético. En esta línea retoma el método de Eudoxio para hallar los volúmenes de las pirámides y del cono, el área del segmento de parábola, el centro de gravedad del triángulo, el volumen del paraboloide... Todos estos problemas, desde la perspectiva actual, tienen una base común, dada por el cálculo integral. Pero entonces exigían un planteamiento particular para cada uno, aunque se englobaran en el método de exhaución. Método que, como el propio Arquímedes señala, es válido para "demostrar", pero no para "descubrir" propiedades, pudiendo aplicarse únicamente cuando se conoce el resultado al que se quiere llegar. En este sentido pueden tomarse las palabras de Arquímedes en el *Método* o *Carta a Eratóstenes:*

> ... aun de aquellos teoremas para los que Eudoxo fue el primero en encontrar la *demostración* —sobre el cono y la pirámide, que el cono es la tercera parte del cilindro, y que la pirámide lo es del prisma, caso de tener la misma base y la misma altura—, hay que dar a Demócrito una parte, y no pequeña, por haber *descubierto* antes que nadie la afirmación referente a las figuras dichas (14).

El método de exhaución consiste, esencialmente, en acotar la cantidad que quiere calcularse entre dos series de magnitudes que convergen hacia ella, haciéndose la diferencia menor que cualquier cantidad dada; cada cota se compara bien con la cantidad a calcular, bien con las cotas correspondientes a un problema que sea análogo y ya esté resuelto. Esta comparación se realiza mediante un doble razonamiento al absurdo, por lo cual en el siglo XVII se denominó método "apagógico" como sinónimo de "método de los antiguos", "geométrico" o de exhaución. Naturalmente, la comparación exige el previo conocimiento de las cantidades que se comparan, de aquí la afirmación de que sea método demostrativo, pero incapaz de producir creación o descubrimiento de nuevas propiedades.

Tal como lo empleó Arquímedes, el método de exhaución es de un rigor absoluto. Precisamente por ello,

---

(14) Tomado de J. O. García Bacca: *Textos clásicos para la historia de la ciencia*, pág. 50-1. Ed. Universidad Central de Venezuela, Caracas, 1961. Los subrayados son míos.

los matemáticos del siglo XVII, cuando pretendían resolver una disputa o legitimar un resultado, marginándolo a toda posibilidad de discusión, realizaban las demostraciones por el proceso apagógico arquimediano. Este hecho lo encontramos en el propio Pascal, quien al intervenir en la polémica de si la línea parabólica era o no igual a la línea espiral, afirma, a finales de 1568, en la *Lettre de A. Dettonville a Monsieur A. D. D. S.* (15):

> sans m'arrêter, ni aux méthodes des mouvements, ni à celles des indivisibles, mais en suivant celles des anciens, afin que la chose pût être désormais ferme el sans dispute.

Al ser el método de exhaución demostrativo más que inventivo, el propio Arquímedes lo utilizaba para dar a conocer sus resultados, empleando otros procedimientos para alcanzar éstos a priori. En el escrito ya citado, la *Carta a Eratóstenes*, Arquímedes explica su método de invención, destinado únicamente a "dar alguna verosimilitud al resultado", a pesar de lo cual afirma:

> ... estoy convencido de que este método mostrará también su utilidad en la demostración misma de las proposiciones, pues alguna de ellas que se tornaron para mí evidentes primero mediante este método mecánico, las demostré de inmediato por la geometría, pues la investigación mediante este método no comporta una verdadera demostración. Pues sin duda es más fácil encontrar la demostración después de haber adquirido con este método un cierto conocimiento del asunto, que buscarla sin tener conocimiento alguno (16).

(15) Siglas de destinatario real que corresponden, según J. Mesnard, a Arnauld, Docteur De Sorbonne, a pesar de que había dejado de serlo por sanción oficial desde el 15 de febrero de 1965.

(16) Tomado de *Arquímedes*, de José Babini, pág. 113. Ed. E. C., B. A., 1948.

El método "mecánico" a que hace alusión Arquímedes, rebautizado por J. L. Coolidge con los términos "método del equilibrio", consiste esencialmente —para hallar el área de una figura plana o el volumen de un sólido— en dividir la figura en un número extraordinariamente grande de bandas paralelas planas, o paralelepípedos paralelos, y colgarlos —de modo mental— al final de una palanca dada, de forma tal que esté en equilibrio con una figura cuyo contenido y centro de gravedad sea conocido. Es un procedimiento mezcla del de los movimientos y del de los indivisibles, a los que hubiera dado paso de ser conocida la obra de Arquímedes en el siglo XVII. Pero la *Carta a Eratóstenes* fue descubierta casualmente por Heiberg en Estambul en 1906, por lo que tanto el método de los movimientos como el de los indivisibles hubieron de ser reinventados.

b) *Método de los indivisibles*

Las dos dificultades observadas por Arquímedes al método de exhaución —ser demostrativo, no inventivo; no ser general, exigiendo para cada problema un planteamiento y resolución propios, sin semejanzas o generalizaciones— las volverán a encontrar todos los matemáticos del siglo XVII que se enfrentan con problemas de tipo analítico infinitesimal. Un discípulo de Galileo, el jesuíta Cavalieri, consigue reinventar el método de creación que Arquímedes señalara en la *Carta a Eratóstenes* y que recibirá el nombre de método de los *indivisibles* o de los *infinitamente pequeños*. Y si en Arquímedes esta vía inventiva sólo se utiliza para hallar los resultados que posteriormente deben ser demostrados con todo rigor por el método de exhaución, los matemáticos del siglo XVII abandonarán esta precaución del rigor en beneficio de ampliar los horizontes de la Matemática. Abandono de rigor característico de la época y que provocará fuertes controversias en cuanto a la legitimidad del nuevo método por los resultados falsos a que daba lugar. Por ello, matemáticos como Tacquet podían demostrar, en 1561, por ejemplo, el error que supone la comparación de líneas en el cálculo de la razón de la superficie de un cono recto a la superficie del triángulo determinado por un plano que pasa por el eje del cono. Y afirmar después:

> J'estime qu'il n'est pas légitime el conforme à la géométrie d'admettre la méthode de démontrer par les indivisibles, ou (comme j'ai coutume de les nommer), par les hétérogènes, que le célèbre géomètre Bonaventure Cavalieri a mis en lumière. Cette méthode célèbre passe des lignes aux surfaces, des superficies aux solides, et une égalité ou proportion trouvée pour les lignes, donne une conclusion appliquée aux superficies. Par cette manière de raissonner on n'aboutit absolutamente a rien de certain... (17).

A pesar de lo cual, con el método de los indivisibles, bien manejado, se lograron resultados imposibles de alcanzar por el método clásico. Por lo pronto permitió ver el enlace existente entre numerosos problemas que se presentaban como totalmente distintos para los griegos. Así, el cálculo de áreas y volúmenes, momentos y centros de gravedad de algunas superficies, áreas de segmentos esféricos, a los que se agregaron rectificación de curvas, momentos de inercia, áreas de superficies cualesquiera de revolución, aparecían como problemas comunes.

Desde 1621 en que Cavalieri construyera su método de los indivisibles, los problemas de áreas y volúmenes quedan enlazados como manifestaciones de un problema general subyacente: hallar la integral definida $\int f(x)\, dx$, siendo esta integral el área (volumen) cortada por cada recta (plano) $x = c$, según segmentos (bandas) tales que

(17) *Quatuor cylindricorum et annulorum...* De François Russo: "Pascal et l'analyse infinitésimale". En *L'ouevre...*, pág. 141.

su suma de longitudes (áreas) sea igual a $f(x)$. De aquí que el método de los indivisibles muestre una generalidad —"abstracción" como la denomina Bourbaki (18)— incomparablemente mayor al método de exhaución. Esta universalidad es la que moverá a entusiasmo a Pascal, a pesar de que tanto por su carácter como por su formación esté orientado hacia el rigor absoluto, algo ausente entre los indivisibles. En su pequeña obra *Potestatum numericarum summa*, compuesta al parecer en 1654 y publicada por vez primera en 1665, encontramos la razón de este entusiasmo, al terminar el escrito con las palabras:

> Haec, quae indivisibilium studiosis familiaria sunt, subjungere placuit, ut nunquam satis mirata connexio, qua ea etiam quae remotissima videntur in unum addicat unitatis amatrix natura, ex hoc exemplo prodeat, in quo, *quantitatis continuae dimensionem*, cum *numericarum potestatum summa* conjuctam contemplari licet (19).

El ejemplo no es otro que la descomposición de la integral $\int x^n\, dx$ —para n entero positivo, y donde x^n es una magnitud o función continua— en sumas de potencias de los n primeros enteros. Resultado al que varios de los problemas antes enumerados conducían, y resuelto antes que por Pascal, por Cavalieri y por Fermat, aunque la demostración de Pascal es la primera que aparece públicamente.

El método de los indivisibles se apoya en dos principios fundamentales, que reciben el nombre de "principios de Cavalieri" y que, a pesar de su falta de rigor y

---

(18) N. Bourbaki: *Eléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, 1960. Especialmente: "Calcul infinitésimale", págs. 178-220.

(19) "He tenido que agregar estas notas, familiares a aquellos que practican los indivisibles, a fin de hacer resaltar el enlace, siempre admirable, que la naturaleza, enamorada de unidad, establece entre las cosas más alejadas en apariencia; ella se muestra en este ejemplo, en el que vemos ligarse el cálculo de las *dimensiones de las magnitudes continuas* a la *sumación de las potencias numéricas*."

del avance experimentado por el cálculo infinitesimal, aún se continúan utilizando por su valor intuitivo. Condensándolos en formulación única:

> Si dos áreas (volúmenes) son tales que toda recta (plano) paralela a una dada las corta según segmentos (áreas) cuyas medidas están en razón constante, entonces las áreas (volúmenes) están en la misma razón.

Con lo cual, hallar el área o volumen de una figura consiste en dividirla mediante un haz de rectas o planos paralelos en cantidad suficientemente grande. Después se suman los segmentos de recta o las áreas de planos comprendidos entre la figura de la que se desee hallar el área o volumen y una recta o plano perpendicular al haz y que esté fijado previamente. Esta suma viene dada por la expresión general "la suma de todas las ordenadas", o bien simplemente "la suma de las ordenadas".

Naturalmente, desde un punto de vista estrictamente geométrico o lógico, la concepción subyacente a esta expresión, y esta misma expresión, constituye un disparate, ya que entraña la idea de que una figura plana continua no es más que la suma de rectas que están, además, en cantidad finita y, por ello, es suma discontinua; y, análogamente, de que un volumen es un agregado de planos. En el fondo ésta es la crítica que hemos citado de Tacquet. Y es dificultad que no pasa desapercibida a Pascal, que ha leído la obra de Tacquet. Por ello pretende legitimar el empleo de este método de indivisibles por su equivalencia con el método clásico, al no ser más que dos maneras de hablar. En la ya citada *Carta de M. Dettonville a M. de Carcavi* Pascal defiende el método de los indivisibles con las palabras:

> J'ai voulu faire cet advertissement por montrer que tout ce qui est démontrée par les véritables

règles des indivisibles se démontrera aussi à la rigueur et à la maniére des anciens; et qu'ainsi l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler...

El c'est porquoi je ne ferai aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des indivisibles, *la somme des lignes*, ou *la somme des plans*...

Intuición del "paso al límite" en Pascal

La equivalencia en los resultados por uno u otro de los métodos no implica, sin embargo, que el de los indivisibles esté fundamentado en forma correcta. La dificultad lógica subsiste y, por ello, Pascal pretende superarla con otra argumentación. En la misma *Carta:*

> ... je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, la *somme des ordonnées*, qui semble n'être pas géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacun des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.

Con esta declaración, Pascal intuye cómo lograr el rigor. Y ello porque los rectángulos, por muy pequeña que sea su altura, cuando están en número finito, aunque este número sea muy grande, no pueden identificarse con el rectángulo mixtilíneo que forma la curva. Identificación sólo posible mediante un proceso que únicamente durante el siglo XIX alcanzará formulación precisa y rigurosa, y que no es otro que el "paso al límite". Idea que se encuentra subyacente en Pascal si en el párrafo anterior observamos que se acentúa que el número de divisiones de las líneas o planos paralelos aumenta de manera indefinida, idea semejante a la utilizada en el proceso de las sumas de Riemann. Aunque esta idea no es enteramente original de Pascal, su utilización explícita y sistemática sí le corresponde, ya que la emplea en varios pasajes más del citado, como en la propia *Carta* a Carcavi al hablar de las divisiones en partes iguales de la balanza, o también en el *Traité des sinus du quart de cercle* donde, a propósito del aumento de los lados de un polígono circunscrito a una circunferencia, escribe:

> Quand j'ai dit que toutes les distances ensemble RR sont égales à AO, et de même que chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on sait assez qu'encore que cette égalité no soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude est indéfinie; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles, EE. no différe de l'arc entier BP, ou de la somme de tous les arcs égaux DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée: non plus que la somme des RR de l'entière AO.

Algunos logros de Pascal en el análisis

Es esta intuición del paso al límite lo que le permite realizar la generalización de la integración de las funciones de la forma x^n, resultado del que ya hemos hablado. Cavalieri había resuelto este problema para los valores naturales 1,2,3 de *n*, mientras que Fermat extendió el resultado a un entero cualquiera y desde 1644 a valores racionales cualesquiera de *n*, excepto para $n = -1$. Sin embargo, la demostración de esta generalización no la dio a conocer Fermat públicamente hasta después de la publicación de los trabajos de Pascal en torno a la integración. La demostración de Pascal, aparecida en el *Potestatum numericarum summa*, se apoya en un paso de lo discreto a lo continuo, semejante a la idea de paso al límite. Pascal expresa el resultado general al que llega mediante las palabras:

> "Si ergo illa, quae hac methodo in numeris reperimus, ad quantitatem continuam applicare libet, hi possunt institui canones...
> CANON GENERALIS...
> *Summa omnium in quolibet gradu est ad maximam in proxime superiori gradu, ut unitas ad exponentem superioris gradus*" (20).

La traducción a la notación actual es inmediata por la claridad de expresión de Pascal. La regla general dice:

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Naturalmente, integrar la función x^n mediante descomposición en suma de potencias, exige el previo conocimiento de la *aditividad de integrales*, propiedad que Pascal utiliza igualmente en el *Tratado de la ruleta*, aunque no da justificación alguna de la legitimidad de su empleo.

Al permitir el método de indivisibles la clasificación de los problemas de integración, hace posible la reducción de unos problemas a otros y, por ello, de unas integrales a otras. Transformación apoyada, gracias a la imagen

---

(20) "Si extendemos a las cantidades continuas los resultados hallados para los números por el método antes expuesto, podemos establecer las reglas siguientes:

REGLA GENERAL: *La suma de las potencias de un cierto número de líneas es a la potencia de grado inmediato superior a la mayor de entre ellas, como la unidad es al exponente de esta misma potencia.*"

geométrica, en el previo establecimiento de la igualdad entre dos integrales, considerándolas como formulaciones distintas de un mismo área o volumen. Así, el área de un triángulo rectángulo mixto es la misma según se hagan las divisiones por paralelas al eje o a la base, o, en términos actuales más correctos, expresando el área comprendida entre los ejes OX, OY y un arco de curva $y = f(x)$ entre los puntos (a, O) y (O, b) mediante la igualdad $\int_0^a ydx = \int_0^b xdy$. Expresión que muestra marcado paralelismo con el proceso de integración por partes, que es el que hoy se emplea para resolver muchos de los problemas que condujeron a Pascal a la formulación de equivalencias entre integrales. Blas Pascal generaliza los resultados de igualdad anteriores, dedicando a este tema casi todo su *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets*. Para ello asocia a la función $y = f(x)$ o trilínea de partida, otra función o triángulo recto mixto con los mismos ejes OX, OY, pero de forma tal que tenga por abscisas los arcos de la trilínea dada, por lo que es curva definida entre los puntos (O, b) sobre el eje OY y (s, O) sobre el eje OX, siendo s la longitud de f(x) entre (O, b) y (a, O). Ayudado por este triángulo auxiliar, Pascal obtiene diez proposiciones que expresan igualdades entre integrales. Como ejemplo de formulación podemos citar la primera igualdad, que en su texto constituye la Proposición VI:

> La somme des arcs de la courbe compris entre le sommet et chaque ordonnée à l'axe est égale à la somme des sinus sur la base.

que equivale a escribir $\int_0^b sdy = \int_0^s yds$. Pero quizá la más importante de las igualdades demostradas por Pascal sea la contenida en su Proposición XII:

> ... la somme des rectangles compris de chacun des mêmes arcs et de l'ordonnée qui le termine, savoir la somme de tous les rectangles BO en OD, est égale à la somme des portions du triligne comprises entre chaque sinus sur l'axe et la base, savoir à la somme de tous les portions IRAP.

Lo que algo más claramente expresado significa:

$$\int_0^b sxdy = \int^s ds \int_0^y xdy.$$

A un paso del cálculo diferencial

Si estos son algunos de los resultados que Pascal obtuvo dentro del cálculo integral, se encontró prácticamente a punto de haber construido el diferencial. La clave de esta creación, clave para el propio Leibniz, se encuentra en el *Traité des sinus,* donde se define el "triángulo característico". El *Traité des sinus* comienza introduciendo el triángulo formado por un lado EE del polígono circunscrito al círculo y la intersección de la ordenada y abscisa RR de los extremos del lado. Este triángulo es semejante al formado por el radio AD del círculo, normal a la tangente en su punto medio, la ordenada DI y la abscisa AI de ese punto medio. Esta semejanza lleva a la afirmación

> est visible que chaque sinus DI multiplié par la touchante EE, est égale à chaque distance RR multipliée par le rayon AB.

Pero Pascal se detiene aquí. Será Leibniz quien interprete este triángulo de modo mucho más general. En lugar de considerar a la recta AB como el radio de un círculo determinado, la interpreta como la normal a la curva en un punto D, con lo cual el punto A deja de ser el centro del círculo para convertirse en la mera intersección de la normal con la base AC. Y entonces, visión central para el cálculo, Leibniz observa que tendiendo a cero el triángulo característico, permanece semejante al triángulo de dimensiones finitas formado por la ordenada DI, la normal DA y la subnormal IA. Gracias a lo cual dispone de una relación entre las dos diferenciales dx, dy, y está en condiciones de formalizar el cálculo. "Visión sintética" de Leibniz, a través de Pascal. Visión que llevó a Leibniz a afirmar que Pascal parecía tener, en ocasiones, una venda en los ojos.

3. *ARITMETICA Y CALCULO DE PROBABILIDADES*

La contribución de Pascal a estos dos aspectos de la Matemática ha sido, quizá, la más divulgada y, por ello, la más conocida. Aquí no haremos más que una leve mención de los escritos de Pascal acerca de estas dos materias.

En su *Comunicación a la Academia de París* de 1654, Pascal da cuenta de haber compuesto un cierto número de tratados sobre la aritmética. En 1665 se publicaron varios bajo el título genérico *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres traités sur le même sujet*. De ellos, los más importantes son:

El que da título a esa colección, en el que, tras la definición de triángulo aritmético, con la disposición ya conocida desde Stifel y Tartaglia, encuentra y demuestra 19 consecuencias, por lo que a esta figura aritmética se le ha dado el nombre de "triángulo de Pascal" con entera justicia, si no por ser su inventor, sí por el manejo tan fecundo que hace con él. A estas aplicaciones dedica el opúsculo *Divers usages du triangle arithmetique*, en el que desarrolla: propiedades para las sucesiones numéricas de distintos órdenes, que se forman por la adición de unidades, o de los naturales que los preceden; propiedades del análisis combinatorio; aplicaciones a las reglas de las partidas; aplicaciones para hallar las potencias de los binomios. A estas cuatro facetas Pascal dedicará otros tantos escritos, más completos, de los cuales destaca el titulado *Combinationes*.

El *De numerorum continuorum productis* desarrolla las propiedades que se pueden obtener de aquellos números que se obtienen realizando el producto de varios números consecutivos, como por ejemplo:

> Sean los números 5 y 8: digo que el producto 24 de los cuatro factores naturales 1, 2, 3, 4, que preceden a 5 es al producto 7920 de los cuatro factores consecutivos 8, 9, 10, 11, como el producto 5040 de los siete factores naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, que preceden a 8 es al producto 1.663,200 de los siete factores consecutivos 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

El Tratado *De numeris multiplicibus* trata acerca de los caracteres de divisibilidad de un número cuando se conoce la suma de sus cifras. Finalmente, el ya citado *Potestatum numericarum summa* o "Sumación de las potencias numéricas" que se liga estrechamente al cálculo infinitesimal, y en el que podemos leer:

> Quantum haec notitia ad spatiorum curvilineorum dimensiones conferat, satis norunt qui in indivisibilium doctrina tantisper versati sunt. Omnes enim omnium generum Parabolae illico quadrantur, et alia innumera facillime mensurantur (21).

Junto a esta labor, amplia, en Aritmética, que le condujo a emplear el razonamiento por recurrencia y, de éste, pasar a la creación del razonamiento por inducción

(21) "Los que estén algo al corriente de la doctrina de los indivisibles podrán observar qué partido se puede obtener de los resultados que preceden para la determinación de las áreas curvilíneas. Esos resultados permitirán cuadrar inmediatamente todos los tipos de Parábola y una infinidad de otras curvas."

completa, que formula con entera y absoluta corrección, casi tan formalmente como podamos enunciarlo en la actualidad, Pascal ha realizado, junto con Fermat, la creación de una de las ramas más extensas y fecundas de la actualidad, del Cálculo de Probabilidades. Casi todos los textos que dedicó a esta materia se han conservado. Quizá por ello esta faceta ha sido la más estudiada de la Matemática de Blas Pascal. La creación del Cálculo de Probabilidades se fija en 1654, en que un jugador profesional, el caballero de Méré, algo aficionado a la Matemática, pretendió hallar alguna contradicción en esta disciplina, basado en el número de veces que aparecían ciertas caras cuando se lanzaba un dado sólo o dos dados simultáneamente. Consultado Pascal, éste lo comunica a Fermat, junto con otro problema también planteado por de Méré, dando origen a una correspondencia que constituye, realmente, el primer tratado de esta disciplina. Los problemas podemos enunciarlos en la forma:

a) Problema de los dados: Si se tira un dado cuatro veces consecutivas, la probabilidad de que aparezca un seis es mayor que la del caso opuesto; pero si se tiran 24 veces consecutivas dos dados simultáneamente, la probabilidad de que salga un doble seis es menor que la del caso contrario. Hallar una explicación a esta aparente paradoja.

b) Problema de las partidas: Averiguar cómo debe dividirse la apuesta hecha entre dos jugadores, de igual habilidad, si se suspende la partida antes de finalizar el juego, conociendo en el momento de la interrupción el número de puntos que cada jugador había conquistado antes de la suspensión.

En ambos problemas, la exigencia fundamental es que sean de puro azar, sin intervención de otros factores cualesquiera. Pascal abandona el primero de ellos, demasiado fácil a su juicio. Para el de las partidas utiliza el método de recurrencia —que aún no será el de inducción completa, pero que constituye su preámbulo inmediato—, así como las propiedades que ha descubierto del triángulo aritmético para el análisis combinatorio, clave de todo el cálculo de probabilidades. Aunque el problema de las partidas carezca de importancia en sí, tuvo el mérito de permitir el pensamiento de una regularización, de una descripción matemática del puro azar, de lo que Pascal denominó *aleae Geometria*.

4. *EL CALCULO MECANICO*

Además de matemático o geómetra, Blas Pascal también fue un físico renombrado en su época. A él se debe la primera y más clara exposición de lo que hoy se denomina "método científico", puesta de relieve en las sucesivas experiencias que realizó para demostrar de modo experimental la existencia del vacío. Pero aun en este aspecto, a pesar de combinar teoría con experiencia y construcción manual de aparatos mecánicos, Pascal puede ser considerado como físico puro, por la carencia de motivaciones prácticas inmediatas a sus experiencias. Sin embargo, Pascal no fue ajeno a la realización de obras, no por la obra en sí, sino por sus posibles consecuencias económicas. A este aspecto de su personalidad se liga la construcción de una máquina aritmética, auténtico primer ejemplar de las actuales calculadoras mecánicas o electrónicas. La motivación de construir esta máquina se encuentra no sólo en la ayuda que podía prestar a los cálculos aritméticos, sino en el posible negocio que la venta de la máquina podía reportar.

La pretensión de realizar los cálculos de manera mecánica, sin gran esfuerzo mental ni operativo para el calculador, es muy antigua. Pero sólo podía manifestarse necesaria y, a la vez, realizable, cuando las disciplinas científicas tuvieran un desarrollo que exigiera, por una parte, largos cálculos aritméticos, y permitiera, por otra parte, la construcción de una máquina enteramente mecanizada. Ambas condiciones hacen su aparición hacia el siglo XVII, en el que astronomía y álgebra conducen a problemas numéricos cada vez más complicados, mientras que las actividades comerciales y bancarias desarrollan las finanzas públicas, con el consiguiente aumento de complicación calculadora. Frente a estas crecientes complicaciones, sólo se oponían dos procedimientos: el antiquísimo del ábaco y el que se denominaba "a la pluma", que exigía papel y lápiz, y por supuesto saber escribir y algunas nociones de cálculo, condiciones simultáneas que se daban en muy pocas personas en la época. De aquí que la necesidad de mecanizar las operaciones aritméticas se hiciera sentir a partir del siglo XVII. John Neper introdujo los logaritmos en 1614, con lo cual el problema de la multiplicación y división se reducía a la suma y resta. En el mismo terreno, Neper perfeccionaba el método inventado por el matemático ibérico Núñez, construyendo hacia 1617 unas regletas facilitadoras de la multiplicación al dar los productos parciales directamente y que constituyen los inmediatos precedentes de nuestras reglas de cálculo.

Sin embargo, la mecanización completa de las cuatro operaciones aritméticas parecía un imposible por los problemas mecánicos que entrañaba. De tal forma que se había venido atribuyendo a Pascal la absoluta prioridad no sólo de esa mecanización, sino de su misma idea. Pero en 1958 se descubrió en Poulkovo una carta del astrónomo Schickard a Kepler, de 25 de febrero de 1624, así como notas complementarias, en la cual Schickard se refiere al mecanismo de una máquina aritmética construida por él, y de la cual había enviado un dibujo el

20 de septiembre de 1623 al mismo Kepler. Reconstrucciones actuales de dicha máquina siguiendo las indicaciones de Schickard han permitido observar que funciona perfectamente, aunque sólo se encuentren mecanizadas la suma y la resta de modo completo y no el producto, la división y la radicación, como pretendía el astrónomo alemán. Aparte de esta no completa mecanización, la carta afirma que un primer modelo construido había sido destruido por un incendio. Es la única referencia que hoy se tiene de esta máquina, ya que en la correspondencia de Schickard no vuelve a hacerse mención alguna a la misma ni a posibles reconstrucciones, quizá desalentado por las dificultades de su realización práctica. De esta forma, todavía puede mantenerse la afirmación de haber sido Blas Pascal el verdadero inventor de la máquina de aritmética, el primer realizador de la idea de una mecanización completa del cálculo, ya que los círculos matemáticos de París, como de los demás centros, muestran una ignorancia total respecto a los proyectos de Schickard.

Según nos cuenta Gilberte, y el propio Pascal, los motivos primarios que le llevaron a la idea de una mecanización del cálculo hay que encontrarlos en las grandes operaciones financieras que su padre debía realizar por causa de su empleo en el Tribunal de Cuentas en Normandía. Hacia fines de 1640, con diecinueve años, Blas Pascal emplea en la búsqueda de un método que ayude y simplifique el cálculo

> toute la connaissance que mon inclination et le travail de mes premières études m'ont fait acquérir dans les mathématiques; et après une profonde méditation, je reconnus que ce secours n'était pas impossible à trouver. Les lumières de la géométrie, de la physique et de la mécanique m'en fournirent le dessein, et m'assurèrent que l'usage en serait infaillible si quelque ouvrier pouvait former l'instrument

> dont j'avais imaginé le modèle. Mais ce fut en ce point que je rencontrai des obstacles aussi grands que ceux que je voulais éviter, et auxquels je cherchais un remède.

Son palabras de Pascal en la *Lettre dédicatoire a Monseigneur le Chancelier* Séguier, de 1645, al ofrecerle su invención. Las dificultades con las que Pascal tropezó no eran más que una consecuencia del escaso desarrollo técnico de la época, como para resolver la gran cantidad de problemas mecánicos que su modelo implicaba, así como la escasa preparación de los obreros. Durante dos años trató de llevar a la práctica su máquina, no logrando más que una caja inservible, por lo que en 1642 quiso renunciar al proyecto, de lo que desistió por la ayuda y ánimos que recibió del Canciller Séguier. Pascal consiguió realizar, al fin, unos cincuenta modelos antes de hallar el prototipo definitivo de seis ruedas —para operaciones entre números de 0 a 999.999—, que en febrero de 1644 muestra al rey Enrique II, del que obtiene privilegio para la construcción y venta de la máquina. Este prototipo lo consigue mejorar a uno de ocho ruedas, que es el que dedica al Canciller Séguier. De este modelo se conocen en la actualidad ocho ejemplares, lo que da idea de que Pascal consiguió, a pesar de todo, una cierta fabricación en serie. El éxito de la máquina estuvo asegurado, a pesar de que el precio de venta, cien libras, fuera muy elevado para la época.

* * *

En el breve y un tanto fragmentario esquema de la obra matemática de Blas Pascal que hasta aquí hemos dado, podemos observar un hecho: el de que es obra nada vulgar. Han aparecido conceptos o desarrollos nuevos para esta disciplina, tanto en su aspecto puro como aplicado. Y han aparecido a lo largo de toda una vida, de la vida de Blas Pascal, de sólo treinta y nueve años, dos meses. En cualquier tabla cronológica de su vida y sus aportes a la Matemática se ve una cuestión significativa: Pascal no abandona la Matemática, de manera constante, más que al final de su vida, a partir de 1660. Este hecho ha sido, en general, ignorado, comenzando por su hermana Gilberte, que prefirió realizar una apología mística, en lugar de una exaltación a una obra de pensamiento, profundo y creador. Ignorancia favorecida por el hecho de que sus herederos se hayan despreocupado por la obra matemática y hayan perdido la que quizá fuera más importante, por sistemática y revolucionaria, el *Traité des coniques*, de cuya redacción no aparece fecha en esas tablas cronológicas, ni de los esfuerzos por encontrar los desarrollos y demostraciones de las proposiciones publicadas, ni del tiempo dedicado a la lectura matemática.

Naturalmente, Pascal hizo algo más en su vida que Matemática; y tuvo fases de reserva y despego hacia ella. Pero esto le ocurre a todos los matemáticos del mundo y no por ello dejan de ser matemáticos o se los considera aficionados. A algunos les da por la teología, como a Jorge Cantor; a otros, por la política, como a Evaristo Galois. A la mayoría, por la polémica, tanto de cuestiones matemáticas como de cuestiones ajenas a la Matemática. De aquí que a la pregunta con que iniciamos este ensayo debamos responder afirmando: Pascal fue un matemático profesional creador, que tuvo tiempo para dedicarse a otras funciones del pensamiento y el corazón.