Estudios Filosóficos LXV (2016) 323 ~ 338

ESPACIOS MATEMÁTICO, FÍSICO Y VIVENCIAL. EL PAPEL DE LOS DIAGRAMAS GEOMÉTRICOS

MATHEMATICAL, PHYSICAL AND EXPERIENTIAL SPACES. THE ROLE OF GEOMETRIC DIAGRAMS

Javier de Lorenzo
Universidad de Valladolid

Resumen: *El ser humano, desde que nace hasta que muere, vive en un espacio geométrico euclídeo formado por su casa, por la ciudad… En sus interrelaciones sociales, pesa y cuenta. Se trata de un espacio vivencial, junto al conceptual, construido y superpuesto al de la physis, al físico. Esa superposición condiciona lo perceptivo y obliga al manejo del diagrama figural para elaborar la geometría con la cual, y de modo simultáneo, ha construido su nicho ecológico. Este diagrama, en su construcción y captación, depende del propio espacio al que quiere representar, del contexto en el cual se construye y se interpreta.*

Palabras clave: *geometría, espacio, diagramas, axioma, filosofía de las matemáticas*

Abstract: *The human being, from birth to death, lives in a Euclidean geometric space formed by his house, his city ... In his social interrelations, he weighs and counts. This is an experiential space, along with the conceptual, constructed and superimposed on the physis, namely, on the physical space. That superposition conditions perception and forces to manage the figural diagram in order to elaborate the geometry with which, and simultaneously, he has built his ecological niche. This diagram, in its construction and acquisition, depends on the same space it wants to represent and on the context in which it is constructed and interpreted.*

Keywords: *geometry, space, diagrams, axiom, philosophy of mathematics*

1. En momentos como los actuales, y en los países occidentales, el ente de razón que fue llamado por Ortega y Gasset, entre otros, "el hombre de la calle" y que, en lenguaje más actual, se califica de ciudadano, maneja y domina todo tipo de artefactos como, en particular, el móvil y el ordenador, la tableta. Su mundo, su espacio vivencial, es un espacio compuesto de artefactos entre los cuales vive: la casa, el móvil, la televisión, la nevera, la ciudad… Con una "radical inseguridad arrogante", para parafrasear a fray Luis de León, ese ciudadano, como ciudadano armado de los "derechos fundamentales del hombre", opina de todo y acerca de todo.

Pero cuando se enfrenta con la Matemática suele reaccionar o con respeto, pero a distancia, o con claro sentimiento de rechazo por haber sufrido en su juventud el denominado "fracaso escolar". La Matemática, quizá se le muestre clave para la ciencia según el tópico, pero poco más podrá decir ese ciudadano. Ante la Matemática ya no cabe lo opinable y se le muestra como disciplina límite, aparentemente infranqueable. Un saber propio de unos cuantos, los matemáticos, a los que se ve, en todo caso, como un tanto extravagantes. Lo que, por otra parte, viene apoyado por algunas series televisivas… En cuanto al contenido, el Hacer matemático le es radicalmente desconocido, lo cual tampoco le importa para nada y se queda en las "cuentas"; y a pesar de los años de aprendizaje en la Escuela permanece, con la afirmación de Paulus, como un ser "anumérico"[1].

Y, sin embargo, aunque crea tener ese límite aparentemente infranqueable, ese ciudadano, en el mundo occidental actual, vive en un ambiente de artefactos estrictamente matemático y mantiene unas relaciones vivenciales y sociales enmarcadas por lo matemático. Una matemática, por supuesto, que se puede calificar de elemental y, sobre todo, "material" por no formalizada pero que ha permitido construir el nicho ecológico en el que vive, siente, piensa, sufre, muere… el llamado ser humano.

2. El hombre, desde que llevó a cabo la Revolución agrícola hace unos catorce mil años, es decir, desde que se convirtió en ser humano –y acudo a uno de los mitos de Prometeo, el convertido en tragedia por Esquilo en su *Prometeo encadenado*[2]–, ha construido la casa como el artefacto básico en el que vivir. Artefacto "artificial" porque la casa, como edificio, no viene dado en la *physis* como puede venir dada la cueva, sino que ha de ser construido con materiales que a su vez han de ser transformados de los dados en la *physis.* Aunque artificial al no darse en esa *physis* por sí, se ha convertido sin embargo en el lugar natural en el cual vive el hombre. Con la casa, la ciudad, las carreteras y todos los demás artefactos que lo entornan y con los que vive y de los cuales y para los cuales vive en la sociedad estructurada por el capitalismo económico-social.

1 John Allen PAULUS, *El hombre anumérico*, Barcelona, Tusquets, 1990.

2 ESQUILO, *Prometeo encadenado*, en *Tragedias,* Madrid, Gredos, 1993.

En el instante actual, el ser humano, desde que lo es, nace inmerso en el hueco que han dejado elementos geométricos como las paredes, los techos, los suelos…, los espacios que él ha construido apoyándose en la geometría métrico euclídea que va construyendo simultáneamente. Desde el nacimiento, y a lo largo de su vida, y hasta su muerte, vive encerrado en ese espacio; hasta cuando muere, se introduce su cadáver en un féretro construido métrico euclídeamente…

Es lo construido geométricamente en su concreción material, lo que constituye el auténtico nicho ecológico del ser humano individual, el espacio vivencial en el que transcurre toda su vida, su muerte.

Esa construcción se ha apoyado en un tipo especial de geometría: la métrica euclídea. Una geometría que tampoco estaba dada en la *physis* y que ha ido construyendo de manera "material", no formal, a la vez que iba construyendo con ella su nicho propio.

Al hacer una pared, al trazar una puerta, ha ido creando la perpendicularidad y, con ella, el paralelismo; ha ido estableciendo, desde su práctica material con la plomada y la escuadra o gnomon, los diferentes elementos geométricos que terminarán convirtiéndose en elementos conceptuales a largo plazo, independientes ya de esa realización material constructiva, aunque siempre se encuentran ligados, enlazados con la misma.

Esa experiencia vital, constructiva, ha llevado a la construcción de la casa, de la calle, de la urbe y es la que ha ido potenciando unos elementos conceptuales, implícitos en un primer momento, pero que han llevado a establecer, también, otro instrumento o artefacto, la razón. Un artefacto, la razón, con la que se pasa a manejar esos elementos experienciales implícitos y desgajarlos como artefactos conceptuales, culturales para ser convertidos en sistemas teóricos que sean aptos para enseñar y aprender. Un enlace material-conceptual que ha propiciado la elaboración de disciplinas que han de engarzarse como tales desde esa razón. Disciplinas que, desgajadas de su aplicación concreta, van a constituir otro espacio, ahora conceptual, en el cual también practica sus vivencias el ser humano aunque ya únicamente un cierto tipo de ese ser, calificado ahora de científico.

No solo en lo espacial, también en cuanto al número y al peso, para seguir la tradición. Todos los seres humanos, desde esas viviendas y en sus interrelaciones sociales, intercambian relaciones numéricas: al tomar un café, una bebida, paga y hace cuentas; en un comercio, al realizar la compra tiene que contar, sumar, restar, comparar productos y precios… y, por supuesto, calibrar el peso de los artículos que se lleva a casa cada día para la comida. Y a esa vida experiencial de cuentas y de pesos se suman las noticias de las radios, la televisión, los periódicos… que van llenas de cifras: la de muertos en carreteras o en las diferentes guerras y atentados que se tienen a diario sobre la Tierra, de dineros llevados por unos u otros, de número de huelgas y manifestantes, de subidas y bajadas de IRPF sea lo que sea esta sigla…

Prácticamente toda la vida de ese llamado ciudadano gira en torno al número, el peso, la figura. Nuestro nicho ecológico es, realmente, un nicho matemático geométrico-numérico y, sin embargo, no lo apreciamos como tal, se nos escapa por sernos tan natural que no percibimos que participamos de él de modo esencial como también, seres escindidos, participamos de las vivencias ahora culturales y, ya muy en concreto y más especial todavía, matemáticas.

3. En lo espacial, lo geométrico euclídeo, que desde la materialidad concreta de lo constructivo ha llevado a lo conceptual, corresponde a un espacio especial muy determinado. Un espacio que no es el de la *physis* sino un espacio artificial que obliga a unos elementos experienciales diferentes de los que se tendría en el espacio en principio natural y que, desde lo actualmente construido, se ha convertido en artificial. Porque lo que cabría considerar en principio natural se ha convertido en un espacio acotado por alambradas, por tapias y, además, un espacio que aparece roturado o sembrado o repoblado por el hombre. Quedan muy pocos espacios de la *physis* que hoy se puedan considerar auténticamente vírgenes, no contaminados por la mano humana. Lo natural es, desde hace ya bastante tiempo, lo únicamente manipulado por el ser humano.

Esta escisión entre lo natural y lo construido, entre lo material y lo conceptual conduce a unos tipos de percepción diferentes a lo que cabría esperar de lo estrictamente sensorial. La habitación en la que nos encontramos, el pasillo o las calles por las cuales andamos, las carreteras por las que viajamos, han sido construidas de manera métrica euclídea y esa construcción nos conduce a percibir de una manera determinada: las paredes "sabemos" que son paralelas y, por ello, las consideramos como paralelas aunque, de hecho, nos sea imposible verlas como paralelas. Sabemos de su equidistancia pero esa equidistancia no la percibimos; la asumimos tanto material como conceptualmente. Y de tal manera que algún autor puede afirmar de manera radicalmente redundante y dogmática que "la geometría métrico-euclídea es la que mejor se adapta a nuestra percepción de los fenómenos cotidianos". Redundante porque esos fenómenos cotidianos se dan, precisamente, en el espacio métrico euclídeo que previamente se ha construido y que es el que nos obliga, desde el conocimiento y no desde lo estrictamente perceptivo, a captarlos métrico-euclídeamente. Lo que ha hecho el hombre es construir el a priori kantiano que, contra ese a priori y por el contrario, es lo que no se percibe, no se nos da ante la sensibilidad.

Es la misma trampa que se tiene en la enseñanza de la geometría métrico-euclídea, que se comete en la historia que da cuenta de los *Elementos* de Euclides[3]. Una de las obras más básicas de la cultura humana, porque en ella se formaliza la geometría que el hombre empezó a elaborar desde que estableció la Revolución agrícola y que consolidó toda la arquitectura posterior, la actual

3 EUCLIDES, *Elementos*, Madrid, Gredos, 1991.

así como de la elaboración de los artefactos que rodean al hombre. El contenido formalizado en los *Elementos* ha sido la base para la construcción, precisamente, del nicho ecológico y vivencial humano con independencia además de espacio geográfico, tiempo, formas de gobierno, ideologías… Todas las ciudades del mundo más o menos desarrollado siguen el mismo esquema, el mismo patrón constructivo geométrico espacial métrico.

Las proposiciones euclídeas, en su versión original, en su versión geométrico sintética y no algebraica, exigen del diagrama figural para su concepción, enseñanza y demostración. Un diagrama visual que se tiene que ir dibujando paso a paso, que se traza y se borra en la pizarra, en el papel. Lo que importa en ese diagrama es su proceso constructivo y no ya el resultado del proceso, no ya lo que finalmente queda en esa pizarra, en el papel porque no basta decir, como quería Brahmagupta, ¡Mira! El diagrama se acompaña del lenguaje ordinario –hablado o escrito– que muestra, igualmente, su absoluta necesidad: son las dos caras de un proceso que condiciona de manera radical lo que ha de percibirse.

Al afirmar, “sea un segmento” –lenguaje ordinario–, de modo inmediato se traza una línea en el encerado, en el papel o, como quería Kant, en la imaginación. Y, por supuesto, quien la traza, quien la ve, no percibe lo que auténticamente tendría que percibir, no percibe el trazo de tiza con su grosor, la mancha de tinta o lápiz en el papel: percibe lo que se le dice, percibe el segmento. Como percibe el punto cuando se indica “sea un punto” en el que se situar la punta de un compás para trazar un arco…; un punto que, por supuesto es, con lenguaje de antiguo alumno, un “punto gordo”.

Para llegar a esa percepción, además del obligado contexto de estar situado en un hacer geométrico sintético, he afirmado que se incorpora una trampa: el diagrama se realiza en una pizarra, en un papel que son precisamente trozos de un espacio métrico euclídeo, de un espacio de curvatura cero.

Cabría realizar el diagrama en otro tipo de superficie, métrica igualmente, pero no plana. El proceso constructivo figural será el mismo pero no el resultado tanto conceptual como perceptivo. Aunque, por supuesto, el punto que se dibuje seguirá siendo un “punto gordo”, como la línea o el segmento seguirán siendo unas manchas de tinta o de tiza sobre esa superficie y que se siguen percibiendo como puntos y segmentos aunque ya estos no sean “lineales”.

Diagrama figural necesario, pero percepciones y conclusiones diferentes. Es una afirmación que apoyo, como trato de hacer siempre, en experiencias vividas, en lo experiencial. Para ello doy un recuerdo personal: comencé mi etapa de profesor de matemática en el Instituto Ramiro de Maeztu en Madrid en 1961. En su Seminario, magnífico en aquella época, encontré una pizarra esférica; no sé si todavía hoy se conserva. En ella pasé tiempo trazando diagramas geométricos con mi cuerda y mi tiza. Haciéndolo, construyendo los diagramas sobre esa superficie encontré de modo experiencial que, por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo ya no era dos rectos porque de hecho podía trazar triángulos con dos ángulos rectos. Que postulados como el de poder alargar indefinidamente un segmento lineal, eran correctos, sí, pero esa prolongación indefinida era acotada, no infinita; que por dos puntos podían pasar infinidad de rectas... La geometría métrica euclídea se presentaba incorrecta a pesar de las afirmaciones kantianas entre otras; la verdad atribuida a sus axiomas por la corriente aristotélica, no por la postulacional platónica, era un mito, un engaño[4].

Claramente, era algo que ya había aprendido en la Facultad de Matemáticas: allí se me había enseñado la existencia de otras geometrías métricas y de otras, como la proyectiva, que no eran métricas en principio y en las cuales el diagrama no podía ser, ya, figural. Pero lo que obtuve con esas manipulaciones, en esa acción sobre la pizarra esférica, fue la experiencia de que la interpretación de los diagramas venía dada no solo por su construcción figural concreta sino que en esa interpretación era esencial el contexto en el que situar, en el que realizar esos diagramas.

Es correcto afirmar que el diagrama figural es esencial para las demostraciones sintéticas euclídeas, sí, pero sabiendo que siempre se hace con trampa, siempre se hace en un espacio métrico euclídeo y por ello esos diagramas son correctos o, más bien, conducen en su construcción, al resultado correcto.

Ese espacio es justamente el que ha ido construyendo el hombre en un entorno, mínimo, de la superficie terrestre. Y la captación de otro tipo de diagrama figural hay que transformarla para que, en otros espacios, pueda tener el mismo papel que tiene en ese entorno mínimo euclídeo del papel, de la pizarra.

Entorno mínimo sobre la superficie terrestre porque en esa construcción lo primero que tiene que hacer el hombre, a través del arquitecto, es fundamentarlo, aplanarlo, es decir, convertirlo en un plano euclídeo para poder realizar la construcción requerida de la casa, de la urbe, de la calle, del aeropuerto. Manipular, transformar un entorno de la *physis,* siempre ampliable paso a paso, para llevarlo a ser la urbe, la ciudad en la cual vivimos, pero también para poder construir el arenario, la pizarra, el papel sobre la mesa en los cuales trazar, construir los diagramas euclídeos correspondientes.

4. Aceptado el engaño, aceptado que para estructurar conceptualmente lo geométrico material construido se maneje precisamente un entorno mínimo de superficie euclídea –sea el arenario, la pizarra plana, el papel–, se tiene que en esa superficie se pueden trazar esquemas o recetas de figuras de las que pedir el área, el volumen y no solo el diseño previo de la casa, de la urbe. Recetas y diseños en los cuales, por ejemplo, se encuentren ternas que, leídas posteriormente, indiquen que dan cuenta de las relaciones métricas del triángulo rectángulo. Relaciones que solo muchos años después podrán establecerse

[4] Javier De Lorenzo, *El método axiomático y sus creencias*, Madrid, Tecnos, 1980.

demostrativamente desde el plano conceptual creado por la razón. Lo mismo que se establecen recetas para calcular el volumen de un cuerpo como la pirámide o el trapecio. Recetas y diseños arquitectónicos constructivos, aunque no se den argumentaciones para su aceptación, que viene avalada siempre por la práctica.

En el proceso evolutivo del ser humano hay que aceptar la materialización de un proceso constructivo como el arquitectónico, en el cual se parte del diseño del edificio a construir, del diseño de la urbe. Un diagrama en el plano que es previo a su realización material, aunque hoy día ese diseño pueda realizarse en el ordenador. Con ello se potenciaba, a la vez, el carácter prospectivo del cerebro humano: el diseño es, siempre anterior a su plasmación material y se realiza en función de un futuro…

Solo una vez que se ha construido la casa, la urbe, tendrá sentido la pregunta por una determinada proposición que precisamente se haya materializado en esa casa, en esa urbe. Así, cabe preguntarse por la verdad de una proposición –convertida en teorema en este caso– como la que establece las tres perpendiculares, estructura básica para el mantenimiento de una habitación, pongo por caso. Teorema de las tres perpendiculares que, en su materialidad concreta, estamos percibiendo constantemente aunque no nos demos cuenta de esa captación, percepción que, por otro lado, tenemos que aprender a verla, tenemos que requerir de alguien que nos la enseñe en su materialidad concreta y no ya en su concreción conceptual. Con una precisión, en el entorno de un camping con tiendas de campaña canadienses, en un igloo esquimal es pregunta carente de sentido y no ya en cuanto a su verdad sino incluso en cuanto a su sentido en sí.

Son procesos –las recetas, el diseño– que culminan en la estructuración de lo aprendido para ser enseñado, para ser mantenido en la memoria. Como tal proceso se van estableciendo unas reglas de juego que hay que seguir y que, de lo contrario, se resulta penalizado; penalización que supone en arquitectura, por ejemplo, la caída del edificio. Reglas que de alguna manera se van incorporando en un ejercicio argumentativo en el que se va imponiendo otro artefacto al que llamamos razón.

Con una insistencia: lo que esas recetas van estableciendo tanto en lo material como en lo conceptual no dan la verdad semántica respecto a la *physis* en sí, sino respecto a lo ya construido. Con sus aplicaciones, con su enseñanza, esas recetas obligan a ver lo que no se ve y a no ver lo que se ve. Obligan a que en el diagrama, en su proceso constructivo, se admita la captación de lo no captable y a no captar lo estrictamente sensorial. Cuando se afirma sea un punto, un segmento, una línea cualquiera y se acompaña del trazado correspondiente en la pizarra, en el papel de unos "borrones", he indicado que no hay que ver esos borrones como tales sino que hay que verlos como punto, como rectas, como líneas o las figuras que en cada momento se indiquen.

A la idea anterior de que una proposición como la de las tres perpendiculares únicamente es verdadera en una determinada construcción, la propiciada por la geometría métrica euclídea, agrego ahora que ningún triángulo trazado en la *physis* es tal que la suma de sus ángulos es dos rectos: nadie puede sostener que esa afirmación sea verdadera de lo trazado, aunque sea trazado en un trozo de superficie plana euclídea. Sin embargo, conceptualmente es verdadera porque en el espacio conceptual construido a partir del material, el punto, el segmento carecen de extensión, carecen de materialidad. Es lo que la razón pide que se admita y es lo que aparece en el llamamiento explícito en lo que se escribe en el texto que acompaña al diagrama. Desde ese llamamiento se pasa a ver lo que la razón pide que se vea. Un pedir que en su término original es postular. Un proceso imaginativo que va más allá del estrictamente sensorial perceptivo. Es lo que obliga a ver vestido al Emperador desnudo y desde esa visión se argumenta para comprobar, demostrativamente, lo pedido…

5. Ejemplifico esquemáticamente lo anterior tomando dos autores muy distantes pero que reflejan con nitidez lo que estoy afirmando.

Los procesos señalados en la línea constructiva figural geométrica nos lo muestra Platón en sus dos pasajes matemáticos de su diálogo *Men*ón. En el primero (82 b y ss.) aparece con radical nitidez el papel constructivo de la razón matemática, papel que tiene sus dos caras: por un lado y en este caso, la palabra hablada; por otro, el diagrama que se traza. La cuestión hace lejana referencia a dos temas, a dos problemas que se harán tópicos en el hacer matemático griego y en su legado: duplicar un cubo, originalmente para el altar de Apolo; el manejo de las magnitudes inconmensurables, el papel de los irracionales, si es que tienen alguno.

La pregunta de Platón es, en apariencia, inocente: construir un cuadrado de área doble de un cuadrado dado. Como se está en geometría métrica euclídea –naturalmente algún siglo anterior a la formalización postulacional realizada por Euclides–, lo primero es trazar la figura del cuadrado del que se pide duplicar el área. Para facilitar la cuestión, se postula que su área sea la unidad y, por ello, al realizar el diagrama, se afirma que el lado mide la unidad. Aunque son afirmaciones que, en sí, carecen de importancia para el tema central.

El esclavo de Menón, que domina la lengua ática pero que desconoce todo del Hacer matemático, ha de resolver la cuestión. Ante la figura, la respuesta es inmediata: duplicar el lado. Sócrates, también inmediato, traza el cuadrado resultante en el cual se ve que su área es cuatro veces la original, no doble; el intento de solución, fallido. Bien, el argumento continúa, el esclavo prosigue en su intento.

Lo que me interesa destacar es el enlace entre palabra y diagrama y que, al final, es el diagrama el que, en el fondo, resuelve la cuestión. Al trazar las diagonales de cada cuadrado de los cuatro que se han establecido en el cuadrado de área cuatro que se ha dibujado tras la primera respuesta del esclavo, se tiene un cuadrado de lado √2 y que es tal que duplica el área del original. Problema resuelto, pero dejando en el aire otra serie de cuestiones: en concreto, es √2 el lado de ese cuadrado doble y por ello se tiene que desde lo inconmensurable se alcanza lo conmensurable. Porque en principio √2 no es par, ni impar, ni racional. Para la cultura griega, ¿es número? Habría que acudir al diálogo *Teeteto*, entre otras fuentes.

Donde Platón muestra el razonamiento matemático como nítidamente postulacional es en el segundo pasaje de *Menón* (86e, 87a), el pasaje que se inicia con la petición

> “consiénteme que consideremos por hipótesis lo de si es enseñable o no lo es. Y al decir ‘por hipótesis’ quiero decir *a la manera como con frecuencia razonan los geómetras”*[5],

y soy yo quien enfatiza. Pone, de inmediato, un ejemplo geométrico como en el pasaje anterior de muy difícil interpretación.

El matemático postula o pide que se acepte una proposición como hipótesis y, argumentando, se logran unos resultados. Si se aceptan los postulados, las hipótesis, es preciso aceptar la conclusión porque esta se impone con necesidad derivativa, sintáctica aunque desde el principio no se plantee para nada la verdad semántica de lo pedido. Puede ocurrir que esta conclusión sea un disparate. Y entonces, como la primera proposición no se sabe si es verdadera o no, es hipótesis, hay que volver a razonar nuevamente, pero ahora a partir de su contraria. En este reiterar el proceso argumentativo se obtendrá otra conclusión diferente de la primera. Hay casos en que en el punto inicial no se da una simple escisión de dos casos, puede haber más: √2 no se sabe si es o no número, es decir, si es par, impar o racional. Por hipótesis, supongamos que √2 es par y, entonces… Segundo paso, √2 supongamos que es impar…

Lo que interesa destacar es que, para Platón en su diálogo *Menón*, los geómetras manejan un tipo de razonar que sería inviable si en lugar de postular, de pedir que se acepten unas proposiciones como hipótesis, se afirmara que las mismas eran verdaderas semánticamente o eran axiomas, verdaderas en sí por evidentes. Carecería de sentido negar la evidencia, lo que no ocurre con lo pedido, lo postulado. En cualquier caso, se tiene, aquí, la afirmación de uno de los mecanismos más potentes del Hacer matemático: el proceso de reducción al absurdo.

Platón nos hace ver que el razonamiento matemático es un tipo de razonamiento hipotético-deductivo por un lado. Por otro, y por todo lo anterior, constructivo apoyado en la palabra –hablada o escrita– y en el diagrama. Un

[5] PLATÓN, *Menón*, Madrid, Instituto de Estudios Políticos, 1958.

razonamiento que, a pesar de ser hipotético, es deductivo, es decir, se requiere en él la necesidad derivativa, deductiva de lo argumentado.

Por hipotético-deductivo, las reglas se pueden cambiar. Es el mismo proceso que se tiene en el establecimiento de la Constitución de cualquier estado que se pretende democrático: se establecen unas reglas de juego que los ciudadanos han de cumplir. Como reglas de juego delimitan unos tipos de comportamiento que han de ser ajustados a esas reglas y que, de no seguirlas, serán penalizados. Reglas que no son verdaderas ni en sí como axiomas, ni en sentido alguno semántico. Simplemente son normas o reglas de acción para regular la acción humana. Como tales pueden variarse cuando las circunstancias lo hagan viable. Ninguna Constitución es sagrada como tampoco lo es ningún sistema teórico conceptual geométrico.

6. El proceso constructivo matemático en lo geométrico, plasmado en la casa, la urbe, los artefactos que nos rodean y de los que vivimos, suponen la creación en lo conceptual de un tipo de espacio muy especial, he dicho anteriormente. Las reglas de juego que los postulados euclídeos establecieron determinan un espacio que solo se fue poniendo de relieve muchos años después del manejo tanto material como conceptual de la geometría métrica euclídea. En ese proceso me detengo en la contribución de Blas Pascal.

Para Pascal, el geómetra, el matemático, maneja cuatro tipo de magnitudes: espacio, tiempo, movimiento, número. Son magnitudes que no puede definir porque "se supone que se sabe cuál es la cosa que se entiende por estas palabras: movimiento, número, espacio"[6]. En particular esas magnitudes, con el tiempo, corresponderían a las disciplinas mecánica, aritmética, geometría. Las cuatro tienen un enlace necesario y recíproco porque no se puede imaginar el movimiento sin algo que se mueva; ese algo es una cosa y, siendo una, esta unidad es el origen de todos los números; el movimiento no puede ser sin espacio y se realiza a lo largo del tiempo.

Es un enlace tan absolutamente necesario que Dios lo tuvo que emplear en su creación del mundo y, en esa creación, de todas las cosas que han de participar de estas cuatro magnitudes. Pascal transforma la expresión de Sabiduría 11, 21, en *Deus fecit omnia in pondere, in numero et mensura*; transforma la frase bíblica dándole un sentido radicalmente creacionista.

Cuatro magnitudes que poseen unas "propiedades comunes", cuyo conocimiento "abre el espíritu a las mayores maravillas de la naturaleza". Voy citando frases textuales de su opúsculo *De l'esprit géométrique*. Y la propiedad principal que comparten esas cuatro magnitudes "comprende las dos infinidades que se encuentran en todas: una de grandeza y la otra de pequeñez"[7]. Dos infinitos compartidos por todas esas magnitudes, pero enfocados como

[6] Blaise PASCAL, *Oeuvres complètes*, Paris, Gallimard, 1945.

[7] Blaise PASCAL, "De l'esprit géométrique", en *Oeuvres complètes*, p. 584.

extremos entre los que se encuentran las magnitudes de los cuerpos que nos rodean: "Cualquiera que sea el movimiento, el número, el espacio, el tiempo, hay siempre uno mayor y otro menor de manera que todos ellos se tienen entre la nada y el infinito, estando siempre infinitamente alejados de esos extremos"[8]. Dos infinitos que, por la caracterización que de ellos establece Pascal son, realmente, infinitos potenciales o, más precisos, se identifican con ilimitación.

En el *Extracto de un Fragmento de la Introducción a la Geometría*, que es un muy breve y esquemático resumen tomado por Leibniz de unas lecciones escritas por Pascal para las niñas de Port-Royal y que es lo único que se ha conservado de dichas lecciones, se establecen las características propias del espacio que es, ahora y en particular, materia de la Geometría.

El Primer principio afirma que el objeto de la geometría pura es el espacio, del cual considera la triple extensión en tres sentidos o dimensiones distintas que son longitud, anchura y profundidad. De manera implícita nos indica Pascal que no hay direcciones privilegiadas en este espacio, que es un espacio isótropo.

Los dos Principios siguientes dan las propiedades esenciales de este espacio, las que comparte por lo antes dicho con las restantes magnitudes: "El espacio es infinito en todas las direcciones", e "inmóvil en cada una de sus partes". Principios que el hombre conoce por su "luz natural" como "primeras verdades"[9].

El espacio geométrico se ha identificado, por estas dos propiedades, con el espacio físico, con una de las magnitudes con las que el Demiurgo creó el universo. Un espacio que es infinito, en palabras de Pascal, palabras que hoy se pueden interpretar como "ilimitado", con lo que se sitúa, así, frente a la concepción tradicional, atribuida al aristotelismo, de que el espacio físico es finito, centrado en la Tierra –o en el Sol, lo que para Pascal da igual– y limitado por la esfera de las estrellas fijas. El infinito pascaliano rompe esta limitación, esta frontera.

Es un punto en el cual Pascal enlaza con sus experimentos sobre el vacío. Un vacío que ha encontrado en el tubo barométrico tras su experiencia en el Puy de Dôme de septiembre de 1647. Un vacío del que indica, en su respuesta polémica a las críticas del jesuita Noel a la exposición que ha realizado Pascal del experimento, que no es la nada ni el pleno, no es materia ni ausencia de materia. Define ese hueco como un espacio vacío, porque de momento no sabe de qué puede estar compuesto, aunque sí afirma que está estructurado por lo geométrico. En esa respuesta al padre Noel afirma en palabras que retoman la caracterización del espacio geométrico antes citada del *Extracto*:

8 *Ibid.*

9 Extrait d'un fragment de l'Introduction a la Géométrie de Monds. Pascal", en *Oeuvres complètes,* p. 603.

> "lo que llamamos *espacio vacío* es un espacio que tiene longitud, anchura y profundidad, inmóvil y capaz de recibir y contener un cuerpo de parecida longitud y figura; y es lo que se llama *sólido* en geometría, en la cual solo se consideran las cosas abstractas e inmateriales"[10].

Pascal instaura un espacio físicamente neutro pero que es a la vez receptáculo o contenedor de todos los cuerpos. En febrero-marzo de 1648 escribe una carta a Le Pailleur defendiéndose de nuevos ataques recibidos por el padre Noel acerca de la existencia o no del vacío. En esa carta, además de precisar las condiciones que debe cumplir toda definición nominal, reitera su concepción del espacio contenedor, físico pero a la vez conceptual:

> "El espacio, en general, comprende todos los cuerpos de la naturaleza, tal que cada uno en particular ocupa una cierta parte; (…) aun cuando todos sean móviles, el espacio que ocupan no lo es; porque cuando un cuerpo se mueve de un lugar a otro no hace más que cambiar de lugar, sin llevar consigo aquél que ocupaba en el tiempo de su reposo. (...) Lo que ha dejado permanece siempre firme e inconmovible, sea vacío o pleno, siempre en parecido reposo, este amplio espacio cuya amplitud abarca todo, es tan estable e inmóvil en cada una de sus partes como en el total"[11].

Un espacio absoluto infinito en cuanto a su grandeza y en cuanto a su pequeñez. Un espacio que, por estas características, es homogéneo e isótropo. Un espacio en el cual se incorporan, o más bien abarca, los cuerpos sólidos geométricos. En otras palabras, un espacio en el que se puede desarrollar la geometría métrica euclídea.

David Hilbert, en su conferencia de 1925 *Acerca del infinito*, invierte el orden de presentación:

> La suposición de un espacio infinito es una consecuencia directa, necesaria, de la geometría euclídiana[12].

Ello implica que la naturaleza, la *physis,* jamás podrá seguir esa geometría métrica euclídea. Pero esta última afirmación no es estrictamente matemática, indica Hilbert, sino observacional y dependiente de otras disciplinas físicas, en concreto de dos teorías que son la teoría cuántica y la teoría gravitacional. Son estas teorías físicas las que han puesto de manifiesto que el infinito en grandeza y el infinito en pequeñez, ahora como infinitos en sí y no como equivalentes a ilimitación, no se cumplen en la realidad física. Una realidad para la cual, según Hilbert, la mejor geometría o la más adecuada, es la métrica elíptica.

10 Blaise Pascal, "Response de Blaise Pascal au très bon Réverend Père Noël", en *Oeuvres completes,* p. 377

11 Blaise Pascal, "Lettre de Pascal a M. Le Pailleur", en *Oeuvres completes,* p. 383.

12 David Hilbert, "Acerca del infinito", en *Fundamentos de las Matemáticas*, México, UNAM, 1993, p. 87.

Pero Pascal está en el siglo XVII. Y su posición será la que adopte, de manera radical, Newton para elaborar la Mecánica. Como punto de partida, el espacio absoluto, homogéneo, isótropo, ilimitado y, en particular, infinito; un espacio estructurado geométricamente por la geometría métrica euclídea y donde los cuerpos se mueven con su masa inercial. En ese espacio, la masa se considera concentrada en un punto: se encuentra reducida a su centro de gravedad. En cualquier caso, todo cuerpo posee una masa inercial propia, específica y se encuentra en movimiento uniforme. Puntos masivos en movimiento y de tal manera que la primera afirmación que se establece como principio aceptable por la "luz natural", la Primera ley de la Mecánica newtoniana es que todo cuerpo sigue en su estado de reposo o movimiento uniforme si no hay causa que lo interfiera. Para que haya cambio de movimiento tiene que existir, y es la segunda ley, una fuerza que provoque una aceleración a ese cuerpo de tal manera que este seguirá la dirección y el sentido que esa fuerza le imponga con una aceleración proporcional, siempre, a su masa inercial.

Hasta aquí un espacio y dos leyes de pura imaginación donde lo perceptible sensorial se hace radicalmente inviable: no sé si alguien capta o ha llegado a captar perceptiva, sensorialmente un punto masivo, un cuerpo único moviéndose de manera uniforme en un espacio vacío... Es la tercera ley, o principio de la Mecánica, la que "llena" ese espacio con dos cuerpos al menos, así como con la gravitación como fuerza atractiva instantánea, acción independiente de distancia alguna, aunque se formalice como inversamente proporcional a su cuadrado.

Me detengo en las notas que caracterizan ese receptáculo físico que es el espacio vacío de Pascal pero que, a la vez, es el contenedor del universo, el creado por Dios y punto de partida de la Mecánica racional, que se quiere que sea el espacio físico en el cual nos encontremos, equidistantes entre los dos infinitos pero también entre el todo y la nada. Esas notas son, precisamente, las de ser homogéneo, isótropo, ilimitado. Tres notas que son totalmente antiperceptivas sensorialmente.

Afirmar la ilimitación es atentar de modo radical contra lo perceptivo: aunque subamos a lo más alto de una montaña en día claro, sin nieblas ni nubes, nuestra visión siempre alcanzará un límite, un horizonte. Un horizonte que se puede ir modificando conforme nos vayamos moviendo, ciertamente, pero siempre lo tendremos ahí, aunque *sepamos* que podemos avanzar y que, por ello, podemos concebir la ilimitación. Concebirla, sí, pero nunca percibirla.

Lo mismo en cuanto a la isotropía, porque en lo perceptivo sensorial sí captamos diferencia entre delante y detrás, arriba y abajo. Lo mantenemos en el lenguaje y desde siempre, con una serie de valoraciones asociadas a los sentidos espaciales que se hacen muy difíciles de erradicar. Porque son las notas vivenciales que percibimos, son las sensaciones con las que de hecho vivimos y sentimos.

Lo que indico es que el espacio métrico euclídeo en sí y no ya nociones como la del paralelismo de nuestra habitación o del aula, de la calle, es antiperceptivo o, lo que es lo mismo, el espacio perceptivo sensorial no es métrico-euclídeo y no solo en el conceptual al que hacía referencia Hilbert. Y sin embargo, este es el espacio que imponemos desde lo conceptual y desde lo material construido en el nicho ecológico en el que vivimos, trabajamos, amamos, sufrimos, morimos...

Un punto en el que se agrega la afirmación mantenida desde Galileo, Descartes, Locke… en cuanto a la existencia de dos tipos de cualidades diferentes, primarias y secundarias, asociadas a los cuerpos y que son distintas entre lo físico y lo vivencial. Como Pascal afirma, en ese espacio se encuentran los cuerpos que llamamos sólidos en geometría, sólidos que son inmateriales y abstractos pero que poseen las mismas propiedades, las primarias, del espacio en el que se encuentran. Las propiedades secundarias, las sensoriales, las que percibimos, son las que deben marginarse en el estudio experimental de la *physis* y solo deben ser aprehendidas las propias del marco que establece la Mecánica racional, las que no son percibidas de inmediato.

El contexto educativo o histórico es el que hace que "veamos" un punto cuando alguien explica en la pizarra unos rudimentos de geometría y ello hasta el extremo de que se provoca un desasosiego, un espasmo mental, cuando de repente alguien afirma: "un punto son dos puntos", "una recta son dos rectas". Aparte de la incorrección de las frases, esas afirmaciones chocan con lo aprendido, con lo establecido. El 9 de octubre de 1956 fueron, después de un cortés saludo, las primeras expresiones que oí en la Facultad de Ciencias de Madrid, en la primera clase de Geometría 1: en la pizarra, unos dibujos que ya estaban realizados, y que había que copiar, parecían ser la representación de esas frases. Después, y por la explicación que daba aquél catedrático junto a la pizarra, resulta que no eran dos, sino tres los puntos, tres las rectas o más bien los segmentos, los que andaban en juego o, en realidad, un punto en sí y los otros dos eran como sus sombras, sus proyecciones sobre dos planos. Y esos dos puntos o sombras, las proyecciones ortogonales, eran precisamente los dibujados en la pizarra y lo que sensorial, perceptivamente se captaba aunque lo que se tenía que captar era el punto en el espacio con sus dos proyecciones, sus sombras que, además, estaban abatidas en el mismo plano.

Un inicio realmente prometedor el de aquella primera lección de Geometría que mostraba, con toda su crudeza, el papel del diagrama en el Hacer geométrico, en la matemática, a la vez que el papel del matemático que lo construía, del que lo enseñaba, del que lo aprendía.

Ciertamente eran las primeras nociones de la Geometría descriptiva, de los principios del sistema de representación diédrico que se justificaban porque en aquella época estudiábamos juntos los matemáticos y los arquitectos en esta asignatura. Para la Geometría descriptiva, imprescindible el diagrama, como no podía ser de otra forma, pero imprescindible el contexto en el que su construcción se situaba.

7. Imponemos a nuestro mundo vital, a nuestras vivencias más íntimas y desde que nacemos, un espacio material construido que es lo más antiintuitivo posible, un mundo vital encerrado en lo métrico-euclídeo que, por otro lado, nos provoca otra serie de vivencias agresivas: las esquinas de las puertas, de las ventanas son, material y conceptualmente, perpendiculares pero las vemos como agudas puntas de flecha, lo mismo que las esquinas de los libros, de las mesas…

Un espacio vital, vivencial que no se liga únicamente a lo geométrico figural, a lo métrico euclídeo. Porque lo geométrico va más allá de lo figural euclídeo, y no me refiero por modo exclusivo a realizar el diagrama en pizarra esférica, por ejemplo. Lo geométrico se incardina también con la escritura, con el ideograma y lo hace a través de lo algebraico, a través de la geometría algebraica que inicia Descartes, entre otros[13].

Aquí el diagrama figural que hace llamada a la figura geométrica como en el caso euclídeo es inviable. El diagrama se convierte en esquema, en proceso imaginativo que va más allá de lo figural representativo. Así, se puede trazar, y se traza en el papel, en la pizarra, la cónica del absoluto y se hace ver cómo dada una recta, se pueden trazar dos paralelas por un punto exterior a la misma. Se afirma tener una representación, un diagrama de geometría proyectiva plana al agregar la cónica del infinito al plano euclídeo o, como mucho, dar una posible idea de la geometría lobachevskiana.

Más allá de las geometrías sintéticas se hace necesario, imprescindible, un esquema como la flecha que representa el funtor o que manifiesta la aplicación de una estructura sobre otra. Un esquema que permite "ver" cómo cualquier función entre dos conjuntos se compone de una suprayección, una biyección y una inyección, por ejemplo. Un ver que exige, por supuesto, de un previo conocimiento del que mira o, en otras palabras, del contexto en el cual se realiza el esquema. Y no entro en ejemplificaciones propias del lenguaje de categorías donde los diagramas de flechas se muestran absolutamente imprescindibles para caracterizar nociones como la de topos, por ejemplo.

Es lo mismo que se exige en los casos que he mencionado de "sea un punto", o "un segmento"… La materialización tanto del diagrama figural como del esquema en el sentido antes mencionado requieren de un contexto con su aprendizaje incorporado para que esas construcciones tengan sentido como lo pueda tener una pregunta acerca de la verdad de una proposición como la del teorema de las tres perpendiculares.

Este contexto, con su obligado aprendizaje, supone un cierto tipo de experiencia que ya es conceptual, entraña la experiencia y manejo de un espacio conceptual junto al espacio vivencial propio de cada individuo. Ya va más allá de lo estrictamente vital mínimo del ciudadano o del hombre de la calle

[13] Javier De Lorenzo, "El discurso matemático: Ideograma y Lenguaje natural", *Mathesis* 10, n.3 (1994), 235-254, reimpreso en *Pensar en la Matemática*, Granada, Comares, 2015. cap. 7.

en el que también se incardinan otros elementos matemáticos como ya he señalado: el contar y el pesar, entre otros. Pero que para el matemático en sí, este nuevo ámbito conceptual se convierte, realmente, en parte de su propio espacio experiencial.

Junto al diagrama estrictamente figural, se tiene ahora que la escritura se hace esencial. Fue la escritura sobre papel la clave para el desarrollo del comercio que requería de los libros de cuentas, a dos columnas con el Haber y el Debe, o para la aparición y manejo de la letra de cambio. Con la escritura, los sistemas de numeración posicional que llegaron a eliminar el ábaco. Y las cuentas en el comercio exigían del papel así como del surgimiento de una nueva profesión en la Italia del siglo XIII, la del matemático con la aparición de hasta cinco escuelas de calculistas en la Florencia de esa época.

La numeración escrita aparece, así, como un elemento necesario, más necesario aún que la existencia del diagrama figural geométrico para desarrollar la geometría métrica euclídea, más allá del esquema para desarrollar teorías como el lenguaje de categorías, el álgebra homológica, los fibrados… Porque esa numeración escrita subyace, precisamente, a todas las demás disciplinas en las que el espacio conceptual se ha ido desarrollando.

Lo escrito va más allá de los sistemas de numeración, por supuesto. La geometría algebraica se hace inimaginable, y no solo impensable, sin el lenguaje notacional algebraico. Un lenguaje que ha de ser aprendido para poder no solo entender sino para poder llegar a dominar y sobrepasar constructivamente el contenido de la disciplina matemática correspondiente.

Como lenguaje específico, es lo que se impone como límite de lo opinable para el ciudadano, para el "hombre de la calle" porque ahora no puede articular palabra, opinión alguna. Su espacio vivencial tiene, aquí, una frontera insalvable.

Javier de Lorenzo
Departamento de Filosofía
Universidad de Valladolid
Plaza del Campus s/n
47011 Valladolid
jalor@fyl.uva.es