El infinito matemático

Javier de Lorenzo

El infinito, en sus aspectos potencial y actual, aparece como una conceptualización formal reguladora de la creación matemática

El hombre es un ser finito, limitado, habitante de una nave, la Tierra, limitada y finita. Es un ser finito que habla del infinito y juega con él, hasta el punto de que se le hace necesario para obtener conocimiento de la finitud.

El hombre estudia y maneja el infinito mediante la creación matemática, que formaliza la reiteración, la comparación, la ordenación y la clasificación, procesos básicos del quehacer matemático. La reiteración y la comparación permiten alcanzar dos conceptos distintos de infinitud.

El infinito potencial

Si el lector da un paso y después otro y luego otro, sentirá que ese andar puede ser reiterado. En principio, siempre cabe "uno más". No hay limitación en reiterar una acción desde que la misma se hace posible. Este proceso de iteración se convierte en la intuición primaria de un infinito, el infinito potencial, de aquello que jamás tiene fin porque siempre hay un más allá.

El infinito potencial, ese ir más allá, ha quedado conceptualizado en el número natural. A cada número le sigue siempre otro y nunca hay uno último porque ese último tendría, a su vez, sucesor.

El número natural permite responder a la pregunta: ¿cuántos pasos se han dado? Dicho de otro modo, nos indica cuántos objetos hay. Contar y medir son procesos en los que se puede hablar del valor numérico asociado a las magnitudes, porque siempre se puede contar, medir, cualquier magnitud extensa, sea discreta o continua. Se puede contar la cantidad de ovejas de un rebaño, los granos de arena del desierto o la longitud de una vara. Un contar que se regula bajo un principio arquimediano:

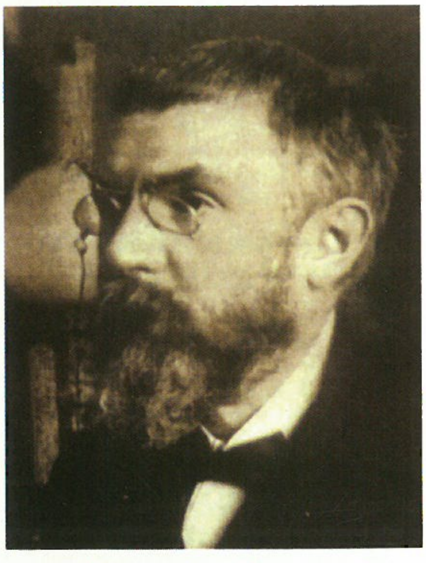
Para cualesquiera valores numéricos x, y tales que $x<y$ se tiene un número natural n tal que $nx>y$.

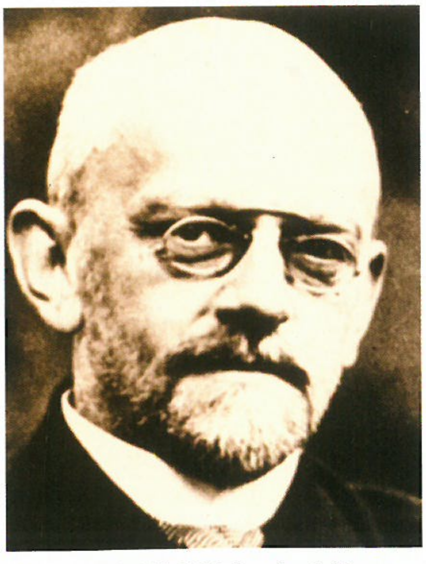
A cada magnitud se le asociará un número si se la compara con otra magnitud de la misma especie tomada como unidad. Al comparar dos magnitudes, al comparar sus valores numéricos asociados, se obtiene un número natural o uno racional como la octava, la quinta, etcétera. Al adoptar la división para obtener el valor numérico correspondiente en esa comparación aparece que todo número puede ser expresado en forma decimal. Así $9/10 = 0{,}9$; $1/3 = 0{,}333...$, donde los puntos sucesivos indican que ese desarrollo decimal tiene infinitas cifras, aunque en el mismo se encuentren bloques periódicos de dígitos.

Puede también aparecer un valor numérico que no sea razón o proporción entre los valores numéricos asociados a las magnitudes correspondientes, es decir, puede aparecer un número irracional. Lo mismo que el racional, el número irracional tiene infinitas cifras decimales en su desarrollo. Mas a diferencia del número racional, ese desarrollo no muestra ciclos o periodicidades; así, $\pi = 3{,}14159...$ carece de grupo alguno de dígitos que se repitan periódicamente.

Por fin, todo número real viene expresado por un desarrollo decimal con infinitas cifras. Aquí esa infinitud sí se muestra constitutiva del número real.

El infinito surge, pues, del "uno más" ligado a lo ilimitado. También emerge de la idea de aproximación a lo limitado. Tal ocurre cuando nos acercamos a una magnitud conmensurable o inconmensurable dada de antemano, es decir, cuando nos aproximamos a su valor numérico asociado que se muestra como un límite. Por ejemplo, $2/3$, $\sqrt{2}$ son números que están dados, mientras que sus desarrollos decimales, cuando no se toman en su totalidad sino en sus diez, cien, mil primeros dígitos, constituyen una aproximación a los mismos. $2/3$, $\sqrt{2}$ expresan razones de proporcionalidad: una, conmensurable y es número racional; la otra, inconmensurable, es el número irracional que manifiesta





LA ATRACCION DEL INFINITO. Para Henri Poincaré (1854-1912, *izquierda*) la creación matemática es un quehacer sobre el infinito. Para David Hilbert (1862-1943, *derecha*) el análisis matemático no es sino una sinfonía del infinito.

la relación entre la diagonal del cuadrado y su lado.

En ambos casos, y de manera crucial en el segundo, aparece el infinito que se liga a la convergencia hacia un límite de distintas fracciones. Estas van desgranando valores cada vez más cercanos a dicho límite.

El infinito entendido como proceso de reiteración ligado a un límite se manifiesta también en geometría. La superficie del círculo es el límite hacia el cual convergen las superficies de los polígonos inscritos o circunscritos, conforme crece su número de lados.

Un crecer cada vez más que podría expresarse indicando que el número de lados de los polígonos inscritos o de los circunscritos tiende a ∞. La propia circunferencia puede identificarse, en el límite, con un polígono de infinitos lados infinitesimales.

En los últimos casos aparece el infinito no ya como proceso, sino como producto de ese proceso. Infinito designa ahora el número que completa la sucesión de los números naturales. Ese número apunta al límite de valores numéricos sucesivos de una misma variable que crecen cada vez más. Un número, $+\infty$, que completa, junto con el número $-\infty$, la recta real o del continuo. En geometría, dos rectas paralelas se cortan en el punto infinito que se agrega al plano euclídeo.

Disponemos así de elementos ideales —número infinito, puntos del plano infinitos—, que, en el caso geométrico, permiten pasar de un espacio métrico a otro proyectivo. Este tránsito obliga a admitir los principios de continuidad y de dualidad. Al agregar elementos infinitos o ideales, se da coherencia a las propiedades proyectivas. Dos puntos siempre determinan una recta en el plano euclídeo, pero dos rectas no siempre determinan un punto; no hay simetría. Al admitir que dos rectas paralelas se cortan en un punto único, un punto infinito, se acepta la simetría.

La introducción de elementos ideales explicita que la propiedad de infinitud es una propiedad métrica. En cuanto tal, el concepto de infinitud se distingue de la noción de ilimitación; podemos concebir un espacio ilimitado y finito. Sólo en un espacio métrico euclídeo la ilimitación y la infinitud se identifican. En el cálculo numérico, eso significa que el "uno más", que caracteriza al infinito potencial, se presenta como propiedad métrica, cuantitativa; por cuya razón lo ilimitado sigue aquí identificado con lo infinito potencial.

Volvamos al infinito en cuanto aproximación a un valor preestablecido.

Reducción al absurdo

El método por reducción al absurdo aparece ligado a la demostración de la inconmensurabilidad de números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... Platón, en *Teeteto*, afirma que Teeteto ha demostrado la inconmensurabilidad de esos primeros números hasta llegar a $\sqrt{17}$. No indica cómo lo ha hecho ni por qué se detiene en $\sqrt{17}$.

Aristóteles, en *Metafísica*, da la demostración de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ hoy clásica:

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir, expresable como razón de dos naturales, a, b, y de tal manera que a y b sean primos entre sí. Se tiene $\sqrt{2} = a/b$. Suprimiendo denominadores, $a = b\sqrt{2}$. Elevando al cuadrado, $a^2 = 2b^2$, lo cual indica que a^2 es par y, por consiguiente, a también, es decir, $a = 2p$. De aquí, $2b^2 = (2p)^2 = 4p^2$ y, por tanto, $b^2 = 2p^2$, de donde b también es par. Lo que se ha obtenido es que a y b son ambos pares, luego no pueden ser primos entre sí, contra la hipótesis. Por consiguiente, afirmar que $\sqrt{2}$ es racional conduce a una contradicción y ha de resultar falso.

Hay que observar que los principios de bivalencia, de no-contradicción y de tercero excluido participan de modo implícito en este tipo de demostración.

A efectos prácticos, si se mide la diagonal de un cuadrado, bastan unos cuantos decimales para quedar dentro del margen de error de los aparatos de medida empleados. Operando así no se alcanzaría jamás el número irracional, porque toda medida viene dada siempre por un número racional. Lo mismo cabe decir de los elementos ideales, del infinito potencial.

Pero el matemático va más allá. Comprende que $\sqrt{2}$ posee infinitos dígitos no periódicos en su desarrollo decimal. Afirma que $\sqrt{2}$ es un número irracional; cualquier medida que se tome siempre será inexacta. En ese ir más allá, el matemático crea unos mecanismos que aseguren la coherencia del proceso y del producto obtenido. Idea métodos de demostración que aseguran que, por ejemplo, los elementos ideales que ha introducido —el número infinito como identificado con lo ilimitado, la irracionalidad de números como $\sqrt{2}$— son coherentes.

Los matemáticos han ido forjando distintos métodos demostrativos en el ejercicio de su función: métodos enlazados con el "uno más" sin limitación, métodos enlazados de iteración y convergencia, donde aparece el método de inducción completa, métodos unidos a la imposibilidad de una conmensurabilidad y que exigen del método de demostración por reducción al absurdo (*véase el recuadro de arriba*).

Valga como ejemplo de método enlazado con el "uno más" sin limitación la demostración de que no hay un último número primo. La proposición 20 del libro IX de los *Elementos* de Euclides establece que "hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos".

En el argumento de Euclides se construye un número primo que no estaba entre los primos dados y cabe agregarlo a los mismos. Resultaría otra multitud de números primos, a la que podría reiterarse el proceso demostrativo; merced a esa posibilidad, el enunciado se traduce sin problemas desde su formulación originaria a la que hoy se considera clásica, "el número de números primos es infinito". Una traducción que, sin embargo, identifica ilimitación con infinitud actual, lo que quizá sea una traición a lo expuesto en Euclides.

La sinfonía del infinito

Pero es en el dominio del análisis infinitesimal donde el infinito potencial alcanza su esplendor. Con palabras de Hilbert en su ensayo *Acerca del infinito*: "En cierto sentido, el análisis matemático no es sino una sinfonía del infinito."

El análisis infinitesimal nace en un entorno geométrico, ligado al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, que están determinados por una curva, el grafo de la función. Desde una perspectiva cinemática esa curva es la trayectoria de un punto que, en su movimiento, depende de la variable temporal. El estudio del comportamiento de esa función, que representa la trayectoria de un cuerpo en movimiento, va a realizarse en el intervalo infinitesimal de un punto.

El análisis infinitesimal muestra su potencia para abordar el comportamiento de cualquier fenómeno físico. Se plantea la ecuación diferencial que

Inducción completa

Un ejemplo clásico que nos llevará a entender el método de la inducción completa nos lo ofrece la llamada desigualdad de Bernoulli:

$$(1 + x)^n > 1 + nx \text{ para } n \geq 2.$$

La demostración por inducción completa se escinde en las tres etapas siguientes:

1. Se comprueba que la desigualdad se cumple para el primer número natural, que, por las condiciones dadas, ha de ser $n = 2$:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$$

2. Aceptada la hipótesis de recurrencia —en este caso, la desigualdad para un $n = k$ cualquiera— se demuestra que se verifica para el sucesor de k:

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x) >$$
$$> (1 + kx)(1 + x) = 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (1 + k)x + kx^2 > 1 + (1 + k)x$$

Se ha comprobado que, si se cumple para k, entonces se cumple para $k+1$.

3. (Cláusula de cierre.) Como k es cualquier número natural, la proposición se aplica a todos los naturales.

Conviene distinguir entre inducción simple y completa. En aquélla no hay cláusula de cierre y sólo es válida para los casos encontrados. Pero al ir uno más allá pudiera fallar. No haber encontrado un contraejemplo no significa que no exista; es el clásico problema de la inducción desde Hume. El cierre en la inducción completa indica que esta posibilidad no existe: se hace la afirmación para el total de los números naturales. Lo que exige, evidentemente, que dicho total esté dado en acto.

traduce el comportamiento del fenómeno y se pasa a integrar dicha ecuación diferencial en el intervalo asociado correspondiente. En ese estudio aparecen los conceptos clave del análisis infinitesimal (derivada, diferencial, integral, continuidad, etc.), que van a exigir las nociones de límite y de aproximación ilimitada, es decir, el infinito potencial.

La idea de continuidad —ejemplificada en el trazo que deja un lápiz sobre el papel sin levantarlo o en la trayectoria que sigue un móvil en su recorrido— quedará formulada del siguiente modo por A. L. Cauchy en su *Curso de análisis*: "La función $f(x)$ permanecerá continua respecto de x entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función." Es decir, para un incremento h infinitamente pequeño dado a x, el valor $f(x+h)-f(x)$ decrece indefinidamente con el valor de h.

En términos de límites, y admitiendo que la función f esté definida para todos los elementos x de un segmento cerrado $[a, b]$, si para $x_0 \in [a, b]$, se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

la función f se dirá continua en x_0. Expresión que, puesta en forma quizá más sugerente, quedaría como

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

Cauchy había establecido con anterioridad que "una cantidad variable deviene infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente convergiendo hacia el límite cero". En este lenguaje dinámico las cantidades son magnitudes extensas que aumentan o disminuyen; sus valores numéricos asociados convergen a ∞ o a 0, respectivamente.

En un lenguaje estático, donde lo que ya se tiene dado en acto son los puntos del intervalo, las expresiones de Cauchy carecen de sentido y pueden ser eliminadas en beneficio de conceptos de carácter más aritmético como los de mayorar, minorar, aproximar. En este caso la formulación para la continuidad de una función en un punto x_0 quedaría en los siguientes términos: La función f es continua en x_0 si para cualquier $\varepsilon > 0$ puede hallarse un $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - x_0| < \delta$ se tiene $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

En esta reformulación se ha producido una transformación conceptual. Los intervalos dejan de considerarse magnitudes extensas, que disminuyen o aumentan, para tomarse como conjuntos de puntos dados en acto. Los intervalos podrán hacerse mayores o menores en cuanto a su cardinalidad, pero no aumentar o diminuir dinámicamente y, por supuesto, sus elementos no varían. Al estar dados en acto, se acepta el infinito en acto y no en proceso. Se ha pasado de un infinito potencial a uno actual, de manera paralela al caso euclídeo.

El interés de la función no acaba ahí. La noción de función derivada de una función f en un punto x_0 es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

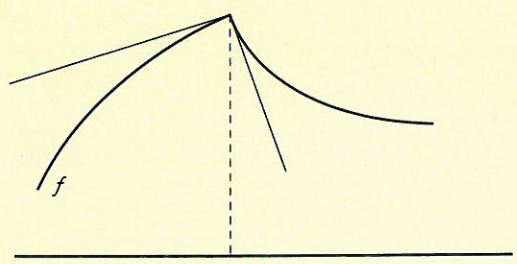
siempre que el límite exista. La función es diferenciable en un punto si posee derivada en ese punto. Si la función f es diferenciable en un punto, por definición también es continua en él. Pero no se cumple la recíproca. La gráfica asociada a la función f posee tangente en el punto dado y el valor que toma la derivada en dicho punto es la pendiente de dicha tangente. Por lo cual el comportamiento de la función —si es creciente o decreciente, si posee un máximo o un punto de inflexión— puede estudiarse atendiendo a las sucesivas derivadas de la función en un punto de la misma (*véase el recuadro de la página siguiente*).

El concepto de comportamiento de una función puede trasladarse al comportamiento de una sucesión, $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$, siempre que se trate de una función cuya variable recorra la sucesión de los números naturales, es decir, la infinitud de los mismos. De ahí podemos pasar al concepto de serie infinita, constituida por las sucesivas sumas parciales o por los primeros n términos de la sucesión.

Las funciones continuas clásicas muestran una regularidad característica. Indefinidamente derivables, poseen una tangente en cada punto. Pero caben funciones continuas que no admitan derivada en ninguno de sus puntos (ni grafo geométrico consiguiente) o que llenen todo un cuadrado, como la curva construida por Peano en 1890. Para abordar estas

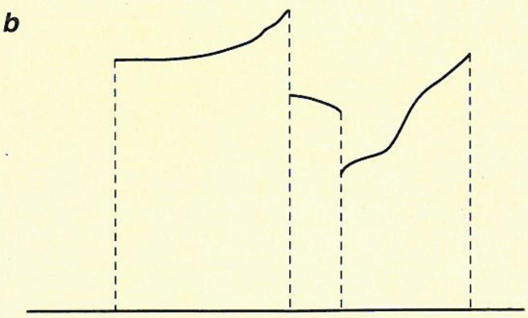
Diferenciabilidad y continuidad de una función

a



Curva continua

b



Curva escalonada

La función f de la figura *a* posee un diferencial a la izquierda del punto p y otro a la derecha que son diferentes. La curva posee dos semitangentes en dicho punto. La función no es diferenciable en él. Pero sí es continua.

La identificación entre diferenciabilidad y continuidad de una función se mantuvo hasta bien entrado el siglo XIX porque el comportamiento de las funciones estudiadas hasta ese momento era suficientemente regular, es decir, la curva asociada a la función tenía tangente en todos sus puntos o sólo tenía un número finito y bien caracterizado de discontinuidades, como lo muestra la función de la figura *b*, representativa de cualquier función escalonada.

Pero aparecieron las funciones llamadas "teratológicas".

Karl Weierstrass publicó en 1872 una función que demostraba de manera concluyente lo incorrecto de las asociaciones empíricas entre continuidad y derivabilidad. Tal función está definida por una serie convergente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x),$$

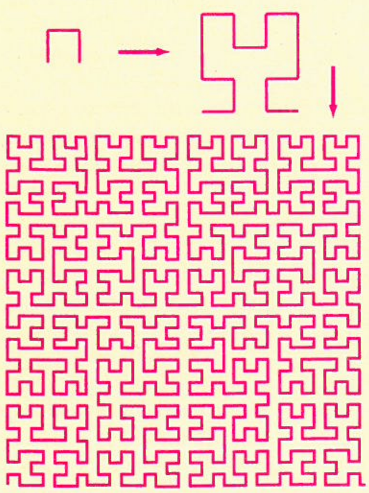
en la que x es una variable real, b un entero impar y a una constante positiva y menor que 1 tal que $ab > 1 + 3\pi/2$. Esta función es continua en todos sus puntos y no es derivable en ninguno, no pudiéndosela representar gráficamente.

Por el procedimiento de iteración indefinida representado en *c* construyó Peano en 1890 una curva continua que no es derivable en ninguno de sus puntos y que cubre la totalidad del plano de dimensión 2^n "en el infinito".

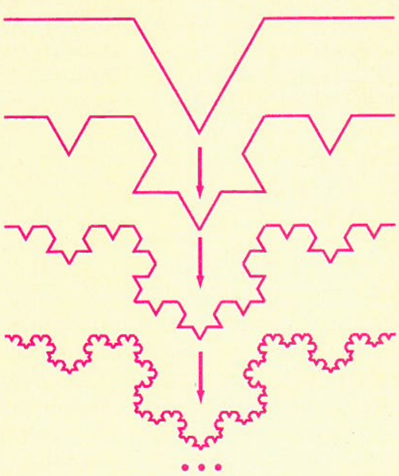
Como ejemplo de curva teratológica representativa se tiene el *copo de nieve* o curva de Helge von Koch (*d*). Es una curva que encierra un área finita, aunque su longitud sea infinita. Se obtiene a partir de un triángulo equilátero —y, por tanto, con tres puntos cuspidales, los vértices, lo que indica la carencia de derivada en ellos, aunque sea continua—, en el cual se construye sobre cada lado otro triángulo equilátero cuyo lado mide un tercio del primitivo. Se reitera el proceso hasta el infinito.

Copo de nieve constituye una curva continua que carece de derivada en todos sus puntos y además no es la gráfica de función alguna. Y aunque fue publicada por von Koch en 1906 se ha convertido en uno de los primeros ejemplos, y muy representativo, de curva fractal (*abajo*), dado que su dimensionalidad es fraccionaria (4/3).

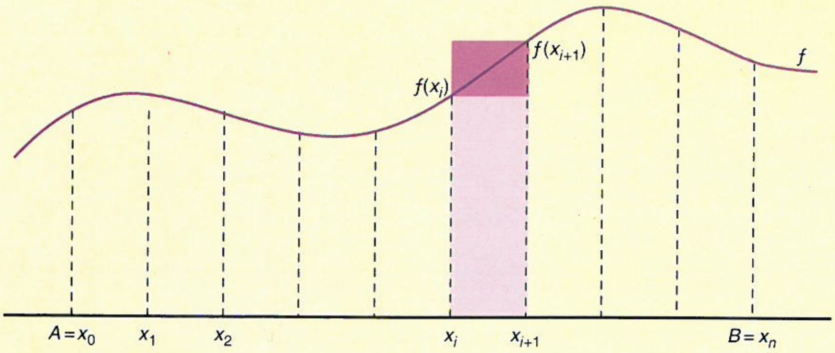
c



d



El problema de la homogeneidad espacial



Mantener la idea intuitiva de que una línea es de dimensión uno mientras que el plano es de dimensión 2 implica que, aunque se unan líneas en una cantidad cualquiera, tal unión no engendrará un plano, sino una línea. Es la afirmación de la homogeneidad dimensional. Recíprocamente, al dividir una línea en segmentos y éstos en nuevos segmentos, lo obtenido seguirá siendo un segmento, aunque infinitesimal o diferencial.

Es la idea expresada, por ejemplo, por John Wallis en 1671: "Una cantidad finita (como *AB*) se puede suponer (por tales bisecciones continuadas) divisible en un número infinitamente grande de partes (es decir, más que cualquier número finito asignado): pues no hay restricción más allá de la cual no se pueda suponer que tal división continúe (pues aun el último, no importa lo pequeño que sea, tendrá dos mitades)".

Y es el gran problema de cómo cualquier magnitud extensa, al dividirla, sigue siendo de la misma dimensión. Es problema que se encuentra en las dificultades del continuo con las que se enfrenta Kant, para quien una recta no es un conjunto de infinitos puntos en acto, sino una magnitud extensa en la cual los puntos únicamente son las marcas de señalización de los extremos de un segmento. Y también en Leibniz y en Cauchy, por lo que carece de sentido atribuir al análisis no-estándar de Robinson ser mera actualización del de Leibniz, quien, a la vez, rechazaba la existencia del infinito actual, único campo en el que ese análisis no-estándar tiene sentido...

Cuando se trata de definir el área limitada por la curva f, por las ordenadas en A y B y por el eje de abscisas, el proceso que se utiliza desde Pascal es el de reemplazar el área S de la curva por la suma de todos los rectángulos de base "infinitesimal", de tal manera que el área S_i quede acotada por:

$$(x_{i+1} - x_i) f(x_i) < S_i < (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1})$$

y los intervalos (x_i, x_{i+1}) se hacen cada vez más pequeños por reiteración. Por la homogeneidad de Wallis resulta que esta reiteración del proceso, que no termina jamás, tampoco logrará que la magnitud no sea divisible. Lo que se alcanza es el infinitesimal o diferencial, que continúa siendo homogéneo con la magnitud dada, el segmento de abscisa *AB*. Y el infinitesimal es diferente al indivisible que, en este caso, aparece como un punto, que es de dimensión 0. Punto o marca de los extremos de cada intervalo o infinitésimo o diferencial.

Si $x_{i+1} - x_i$ tiende a 0, en el límite seguirá siendo un segmento de dimensión 1, por lo cual las áreas de los rectángulos no darán, ni siquiera en el límite, el valor correspondiente al área S buscada, sino que siempre se cometerá un error. Sólo si $x_{i+1} - x_i$ se identificara con el indivisible —con el punto— se tendría la igualdad, pero ello supondría romper con el principio de homogeneidad dimensional de las figuras del espacio, porque ahora ya no se tendrían rectángulos sino líneas.

funciones "teratológicas" hemos de acudir a la idea de infinito potencial, plasmado aquí en la iteración de un proceso de aproximación. Puede aproximarse uniformemente en un intervalo acotado la función no continua por funciones indefinidamente derivadas; se pretende con ello reemplazar la función en cada punto por la media de sus valores en un pequeño intervalo de ese punto.

La idea de iteración de un proceso de aproximación muestra su fecundidad en todos los campos del análisis infinitesimal. Me limito a mencionar el proceso de linealizar una función, lo que supone reemplazarla por una función polinómica o, en otras palabras, sustituir la función por su serie de Taylor asociada. Y aquí se tiene un resultado central, como es el teorema de aproximación de Weierstrass, según el cual "toda función compleja f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ puede ser aproximada uniformemente en $[a, b]$ por polinomios".

La convergencia de series se traslada a las funciones de las que se intenta que sean, precisamente, desarrollables en serie entera, de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

con el segundo miembro convergente en un disco δ contenido en un abierto D del plano complejo.

El manejo que hace el análisis infinitesimal de aproximaciones infinitesimales o diferenciales plantea el problema de la homogeneidad de esas particiones en infinitésimos mediante un proceso iterativo infinito. Aunque con la aritmetización del análisis llevada a cabo por Karl Weierstrass y su escuela los infinitesimales dejaran de ser un problema, no desapareció el infinito potencial. Y no podía desaparecer porque ese infinito constituye el alma del análisis infinitesimal. Desaparición aparente al ser sustituido por el infinito actual, según vimos en el caso de la conceptualización de la continuidad de una función en un punto.

El infinito actual

El infinito actual, originado en un contexto geométrico, es un infinito ilimitado, métrico, que permite la cuantificación y la resolución de problemas del mundo real. Viene requerido desde el propio proceso e incluye elementos ideales (número infinito, punto infinito y series con infinitos elementos). A ese salto del infinito potencial al actual, que es donde encuentra sentido el proceso demostrativo de la inducción completa, se refería Blaise Pascal cuando afirmaba: "Conocemos que hay un infinito e ignoramos su naturaleza. Como sabemos que los números son infinitos, que es verdad que hay un infinito numérico."

Ejemplo de infinito actual es el conjunto de los números naturales, que supone admitir un nuevo número cardinal transfinito $\aleph_0$. Este infinito actual como conjunto y su número cardinal transfinito asociado proceden del proceso de la comparación biyectiva, otro proceso conceptualizador que se une al de la iteración.

Al comparar conjuntos el ser humano determina cuál es mayor o posee más elementos. No necesita saber contar. A un pastor analfabeto le basta comparar una a una las ovejas de dos rebaños que entran en el redil para saber cuál es el mayor. Por ese método conoce si toda una serie de rebaños posee el mismo número de ovejas. Para acometer tales comparaciones biyectivas, los rebaños han de existir, darse en acto; no se pueden ir creando elemento a elemento. Es decir, hay que admitir como punto de partida que los conjuntos han de estar dados en acto, como objetos en sí. No importa que a esos conjuntos, una vez dados en acto, se les pueda aplicar un proceso de iteración.

¿Hay un solo infinito actual? ¿Hay muchos? La infinitud aparece ahora como concepto derivado y no primitivo, definible en términos de conjunto y de aplicación biyectiva entre conjuntos. Un conjunto se dirá simplemente infinito si se puede poner en correspondencia biyectiva con una de sus partes propias. Así, el conjunto de los números naturales es biyectivo con el conjunto de los números primos. Lo cual implica que ambos conjuntos poseen la misma cifra de números y han de tener el mismo cardinal.

Desde lo iterable, desde el argumento euclídeo ya señalado, diríase que los números primos aparecen en menor cantidad que los naturales de los que forman parte y a los que originan. (Todo número se descompone de manera única en sus factores primos.) De ese modo la idea de que "el todo es mayor que cualquiera de sus partes propias" viene a quedar invalidada cuando se manejan conjuntos dados en acto.

¿Habrá sólo un tipo de infinito actual, el asociado con el de los números naturales dados en acto? En términos equivalentes, ¿habrá un único número cardinal transfinito? Traspasada la noción de ilimitación y aceptada la existencia de un infinito actual, parece lo más plausible esperar que no hubiera más que un infinito.

Cantor demolió tal suposición al demostrar la existencia de toda una escala de transfinitos. Creó incluso el camino, el método de la diagonal, con el que se demuestra que, dado cualquier conjunto, habrá siempre un conjunto cuyo cardinal es de infinitud mayor.

El punto de partida es que los conjuntos tienen que estar dados, pues de lo contrario no podrían compararse. Ahora bien, si un conjunto está dado, también lo están sus partes propias, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de dicho conjunto, lo que se denomina su conjunto potencia, cuyo cardinal es mayor que el correspondiente al del conjunto de partida. Y aquí se tiene otro proceso creador de nuevos cardinales transfinitos junto al aportado por el método de la diagonal.

El infinito actual se muestra como elemento imprescindible de la creación matemática. Como elemento regulador, permite establecer proposiciones y teoremas que, de otra manera, serían inviables. Y ello aunque el matemático, en la práctica, maneje dos tipos de infinito, el numerable y el continuo, χ_0 y c, conceptualización de las dos magnitudes básicas: lo discreto y lo continuo.

En la pesquisa matemática las demostraciones pierden el carácter constructivo que tenían en el dominio del infinito potencial. Las demostraciones pasan a tener un carácter existencial básico sin que, en muchos casos, pueda darse el elemento cuya existencia se ha demostrado. Así ocurre, por ejemplo, en el manejo del "axioma de elección" con la afirmación de la existencia de una función de elección de la cual no se puede dar su característica; otro tanto sucede con el "axioma de buena ordenación", su equivalente. Se trata de demostraciones que utilizan el mecanismo de reducción al absurdo. Sin olvidar que, dada su existencia, quizá pueda hallárselo por otros caminos más constructivos.

En la naturaleza no hay infinito, ni potencial ni actual. El hombre forma parte de esa naturaleza y parecería, por ello, que no podría manejar lo que no hay en ella. En todo caso, cabría admitir como infinito el potencial o falso infinito, el encerrado en el proceso iterativo de ir generando, paso a paso, los puntos de una línea. Sin afirmar, por contra, que los puntos de la línea estén dados en acto y son en número infinito.

Quizá se busque un objeto, un referente a "infinito actual", como se le busca al término "mesa". Pero lo importante no es sustancializarlo como objeto, sino observar lo que subyace al mismo: las nociones mucho más primitivas de conjunto y de aplicación biyectiva entre conjuntos.

Lo que importa es el manejo consecuente de esas nociones, consideradas ahora como primigenias, tengan el cardinal que tengan. Quienes rechazan el papel conceptual constitutivo de las nociones de infinito —especialmente del actual— y pretenden un finitismo constructivo, apoyado ahora en el computador, olvidan que las nociones básicas de la teoría de funciones recursivas y de la computabilidad requieren del dato del hacer global (conjuntista) como base. Hay conjuntos recursivos y hay conjuntos recursivamente enumerables. Pero si los conjuntos recursivos son recursivamente enumerables, hay conjuntos recursivamente enumerables que no son recursivos. Y esta última afirmación requiere, al igual que el establecimiento de muchos de los conjuntos que intervienen en esta teoría, de una demostración apoyada en el método de la diagonal.

Debe decirse lo mismo del teorema de parada de Turing, con su consecuencia para el problema de la decidibilidad. Los datos previos, básicos, siguen siendo los de conjunto y de función, ahora recursiva y computable. Dar el conjunto, la función, supone aceptar el previo dato de lo actualmente dado, en su totalidad.

El infinito aparece como una conceptualización formal reguladora de la creación matemática. Hacer matemático del cual, parafraseando a Poincaré, cabe afirmar que es un hacer del infinito. Aunque haya de quedar bien entendido que ningún matemático ha hecho, ni hará nunca, una derivación ni un cómputo infinitos.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

THE HISTORY OF THE CALCULUS AND ITS CONCEPTUAL DEVELOPMENT. Carl B. Boyer. Dover, 1959.

REACHING FOR INFINITY. Stan Gibilisco. Tab Books, 1990.

INFINI DES MATHÉMATICIENS, INFINI DES PHILOSOPHES. Dirigido por Françoise Monnoyeur. Editions Belin; París, 1992.

ACERCA DEL INFINITO. D. Hilbert, en *Fundamentos de las Matemáticas*, págs. 93-121. Mathema; México, 1993.

CURSO DE ANÁLISIS. A.-L. Cauchy (Selección y traducción de Carlos Alvarez; introducción de J. Dhombres). Selección de *Análisis Algebraico* (1821) y *Lecciones de Cálculo infinitesimal* (1823). Mathema; México, 1994.

FROM HERE TO INFINITY. Ian Stewart. Oxford University Press, 1996.