CREENCIA Y LOGICA EN LA MATEMATICA

por Javier de Lorenzo

«'...' como '2 y 2 son 4'», pertenece a una clase de afirmaciones que, si bien no se hacen generalmente por escrito, se han utilizado con frecuencia en el habla castellana. Afirmaciones que conllevan la creencia de que las proposiciones de la matemática son verdades aquí y ahora y para siempre, independientes al hombre, semejantes a las verdades de fe obtenidas por revelación o iluminación divinas. Afirmaciones que pertenecen a una especie de supersticiones, de mitología repleta de oscurantismo, hermetismo y abstracción con que suele rodearse todo hacer calificable de matemático para el común de las personas. Mitología que quizá venga provocada por la ignorancia del vocabulario de dicho hacer; ignorancia que, a su vez, se justifica en nombre de ese pretendido hermetismo; ignorancia que no hace sonrojar al «hombre instruido», cuando ese sonrojo se admite en el caso de que se desconozca algún tema de las calificadas ciencias humanas y sociales, alguna obra en particular de literatura, algún acontecimiento histórico...

Junto a la noción mitológica de «verdad necesaria» que se atribuye a las proposiciones de la matemática, y que obligan a tomarlas como modelo o paradigma para las restantes proposiciones científicas, se tiene otra noción no menos mítica: la matemática, enfocada globalmente, es *la* disciplina deductiva por excelencia. Todo, en ella, se muestra como una mera construcción deductiva y, si alguien —calificable de «matemático»— tiene una «idea feliz», la misma permanece como tal idea —calificable en el mejor de los casos de «conjetura»— si no queda enmarcada tras el rótulo «teorema» seguido del rótulo «demostración». Incluso si, en plano más o menos irónico, se hace ver que proposiciones como «2 y 2 son 4» pueden referirse no a cardinales sino a sus numerales correspondientes, con lo cual la «verdad» de la proposición depende del sistema de escritura, o que la verdad de la proposición «por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una recta paralela a la recta dada», depende del contexto, de la geometría que se esté considerando y que, por lo mismo, el término «verdad» no es atribuible a proposición aislada, sino a proposición en el interior de un sistema, la noción común de que el hacer matemático es una construcción deductiva se mantiene, y con mayor radicalidad. Porque si la «verdad» de la proposición va a depender del contexto en el que se encuentra la misma, entonces tal verdad sólo parece venir avalada porque dicho sistema sea un contexto deductivo, cerrado bajo la noción de demostración. Con mayor fuerza se identifican los términos «matemática» y «demostración».

Identificación que, como consecuencia, pretende que la matemática se convierta en disciplina normativa pedagógicamente hablando, paradigma del rigor lógico, moldeadora de mentes, ya que es la disciplina que, según todos los tópicos, «enseña a pensar», a razonar en cualquier otro campo, como si el pensamiento fuera independiente del objeto sobre el cual se piensa. Tópico por el cual el matemático se convertiría en el modelo de individuo razonador, lógico, en cualesquiera campos a los que dedicara su atención; lo menos que puede decirse en este caso es que el tópico no es adecuado porque la figura del matemático suele verse, y va más cercano a la realidad, como modelo de individuo ilógico, pendenciero en su propio campo de trabajo, y otros epítetos. Identificación que, por ejemplo, llegó a provocar en el ámbito profesoral matemático revuelo incongruente al escuchar una proclama como la lanzada por Jean Dieudonné en los finales de 1959: *A bas Euclide!* Fuera la geometría como sistema deductivo euclídeo, en beneficio no de la intuición geométrica pura, sino de otros sistemas formales —en este caso, los espacios vectoriales— y ello en nombre de una línea más rigurosa —y consiguientemente más abstracta, menos «realista»—, más demostrativa dado que la clásica demostración geométrica nada tenía que ver con la demostración rigurosa por apoyarse en axiomas implícitos y en las figuras geométricas visibles e intuibles en la pizarra y el papel. Revuelo por la acusación de que la demostración que se hacía no era auténtica demostración, estando convencidos de lo contrario...

Los matemáticos no sé si han contribuido a difundir y mantener estas, y otras, nociones comunes más o menos mitológicas. Si quienes, no siendo matemáticos creadores, han hablado acerca de la matemática o, siéndolo, han abandonado el plano del hacer por el plano del hablar o especular acerca de su hacer. Han contribuido algunos de los que han penetrado por el inseguro camino de la especulación, camino rubricado por términos tan llamativos como los de fundamentos o filosofía de la matemática y que en muchas ocasiones nada del contenido corresponde a dichos rótulos.

Si se abandona por el momento el ámbito de las nociones comunes del hombre cualquiera, del espectador, y se penetra por terrenos como los comprendidos bajo rótulos como los últimamente mencionados, se observa que se hizo tópico en los primeros años de este siglo considerar dos tipos de contexto tanto en el hacer lógico como en el matemático: el lógico y el de descubrimiento. Este último, hace referencia al papel de la analogía, de la invención matemática y, aunque considerado importante, se estima que lo es desde aspectos como el psicológico o el sociológico puramente y no desde el plano del propio hacer matemático. Es el contexto lógico el que en última instancia goza de la prioridad al identificarse lógica y matemática a través, bien del formalismo, bien del logicismo.

El tópico, en el contexto rubricado por los términos «filosofía de la matemática», no es otro que la aceptación de los mitos antes señalados en el contexto del hombre cualquiera, elevados ahora a categoría del pensamiento: lo que pertenece al plano del descubrimiento no cuenta, mera conjetura lo que en él se produce hasta que no se integre en un sistema formal adecuado, en una teoría deductiva. Sistema formal que se encuentra constituido, además, y aquí viene la aceptación del primero de los mitos, por proposiciones analíticas o tautológicas, verdaderas por su forma independientemente a cualquier contenido con el cual se las provea y, por tanto, válidas en todo mundo posible. En otras palabras, quiere el tópico que sólo la tautología demostrable pertenezca a la matemática; lo demás, al contexto de descubrimiento y, por ende, a campos como los psicológicos, sociológicos, históricos, arqueológicos...

Tópicos que desde mi punto de vista no se encuentran justificados, precisamente porque la escisión en los planos lógico y de descubrimiento, como escisión arbitraria, impide tal justificación. Naturalmente, justificada o fundamentada en lo que se pretende que justifique o fundamente su concepción del hacer matemático, en principios lógicos universalmente válidos. En el fondo, la justificación querida depende de unas creencias que, por serlo, ni son «verdaderas» ni se muestran como «necesarias» para que otros se adhieran a ellas. En términos más clásicos, depende la justificación de la previa aceptación de una ontología que requeriría, a su vez, su propia justificación, utópica.

El mito de la analiticidad del total individual de las proposiciones matemáticas ha sido ampliamente debatido con la conclusión de que él mismo es auténtico mito, es decir, que no existe analiticidad en el hacer matemático. Y ello porque en el mismo hay que incluir postulados de existencia que invalidan la pretensión de la verdad atendiendo a la forma pura, ya que su verdad dependerá de la efectiva existencia, conceptual, de lo afirmado. Por otra parte, y como ya he insinuado, «verdad» y «validez» son términos semánticos ligados a la existencia de una «interpretación» o aplicación de un sistema formal en una estructura o modelo y no a proposiciones aisladas. Por supuesto, estas conclusiones dependen de lo que deba entenderse por «proposición analítica» o tautología, porque pueden salvarse los escollos anteriores mediante un *distinguo,* pero esto no sería otra cosa que alcanzar el país del bautizo nominal intercambiable...

Admitidas, al menos por mí, las conclusiones anteriores, voy a detenerme en el otro de los dos mitos aquí apuntados: el de la logicidad demostrativa del hacer matemático o identificación «matemática» con «demostración formal»; en el mito de que sólo lo demostrable pertenece a la matemática y, consecuentemente, que el fundamento y desarrollo del hacer matemático es estrictamente lógico.

Que la identificación anterior pertenece a los mitos que rodean al hacer matemático o, lo que puede ser equivalente, que el hacer matemático se apoya no en rigor demostrativo lógico, sino en creencias más o menos arraigadas, más o menos criticadas y asimiladas conscientemente, puede justificarse desde dos planos complementarios:

a) Mediante una serie de ejemplificaciones, que no puede pretenderse exhaustiva, sí representativa del papel que juegan las creencias.

b) Mediante una serie de especulaciones, o razones, en número tampoco exhaustivo.

La complementaridad de ambos planos permite, además, su yuxtaposición argumental.

a) Ejemplificaciones

Dado que el ambiente que rodea al llamémosle «intelectual» en estos momentos, como en otros anteriores, y no sólo en España, no es apto para «razones» sino para exclamaciones, comienzo por sentar las que pueden considerarse como hechos incontrovertibles, al modo como se presenta en la vida pública el término «democracia» como el que envuelve en su connotación la «mejor» o «más buena» forma de gobierno —con su carga de creencias, no de raciocinio lógico—. En lugar de razones —y, por supuesto, de exclamaciones— en el contexto no del espectador u

Leibniz intentó ampliar la utilización del lenguaje matemático a todos los campos del raciocinio, constituyendo una *lingua universalis* en que fuera formulable todo el conocimiento humano. (*Matemáticas en el Mundo Moderno*, ed. Blume, 1974.)

«hombre instruido» de la calle, sino del autotitulado «filósofo de la ciencia» actual, se recurre a la historia para, con ella como guía indiscutible, ejemplificar lo mal fundado de los mitos que rodean el hacer matemático; mitos que lo ven, insisto, como un hacer lógico, riguroso, verdadero ahora y ad calendas grecae, apoyado y sostenido en la lógica y, por ese sostén, develado con necesidad en la dialéctica de la Historia. Las ejemplificaciones no van a seguir, sin embargo, la rigurosa marcha de la historia del hacer matemático, por dos motivos: el espectador no se sonroja por desconocer la marcha histórica del hacer matemático, y en ello va de acuerdo con la generalidad de los llamados matemáticos —más bien «licenciados»— españoles, que tampoco la conocen; por otro lado, creo haber mostrado en otros lugares que dicha evolución histórica tampoco es categoría en la que pueda encerrarse el hacer matemático que, si no dando tumbos de un lado a otro como lo veía Galois, al menos va mostrando una serie de rupturas y saltos epistemológicos que impiden toda consideración de continuidad y evolucionismo lineales.

1.1. Se viene sosteniendo, desde 1908, que la teoría de conjuntos constituye el fundamento de todo el hacer matemático. En otras palabras, que cualquier teoría de la matemática, cualquier concepto de la misma, puede expresarse en términos conjuntistas. Una dificultad: hay que señalar que no existe *una* única teoría de conjuntos, sino que desde el propio nacimiento pueden elaborarse varias teorías de conjuntos, contradictorias entre sí en cuanto al desarrollo formal y antagónicas en cuanto a la ontología de base que se acepte para su desarrollo. La apoyatura o fundamento se quiere en una de tales teorías conjuntistas —la que puede calificarse aquí de canónica—, pero sin más precisión. Las razones electivas, ni se mencionan; dichas razones no tienen otra razón, sin embargo, que el carácter pragmático. Dicha teoría canónica da cuenta, por el momento, de la mayoría de la matemática existente; lo cual no quiere decir que no puedan elaborarse otras matemáticas apoyadas en otras teorías de conjuntos.

A la falta de precisión anterior se puede responder indicando que se elige un determinado sistema axiomático —el canónico vendría dado por el sistema Zermelo-Fraenkel-Skolem o cualquiera de sus variantes, como el elaborado por Bourbaki— y unas reglas de derivación o demostración formales, en un lenguaje de orden uno o dos. Ahora bien, supuesto que se ha elegido este sistema canónico, en la práctica no se manejan todas las reglas de derivación formales establecidas. En la práctica se recurre a la noción más o menos intuitiva de demostración, y se afirma que, si hubiera tiempo y ganas, se podría formalizar. Tiempo y ganas que, naturalmente, no se tienen. Para expresar el número cardinal «uno» harían falta varios millares de signos que, de modo evidente, no se escriben. Y así sucesivamente. Se sostiene que la imposibilidad es de carácter pragmático, no lógico. Lo cual indica únicamente que se cree en la posibilidad de formalización, aunque se esté convencido de que jamás se alcanzará dicho ideal.

1.2. Más importante desde el punto de vista de las ejemplificaciones: la génesis de la teoría de conjuntos cantoriana. Es a partir de 1873 cuando hace acto de presencia, y lo hace cuando Cantor establece una biyección entre los naturales y los racionales y no la encuentra entre los naturales y los reales. Ahora bien, este tipo de biyecciones era conocido desde siglos atrás. Así, por Galileo en el Libro I de los *Discorsi*, 1638, por ejemplo. Galileo rechaza tal tipo de biyecciones por considerarlo antinatural y atentatorio al principio, que quiere lógico, «el todo es mayor que cualquiera de sus partes propias»; Cantor y Dedekind no vacilan en aceptar la existencia de tales biyecciones frente al principio mencionado y ello les conduce a afirmar la existencia del número cardinal como clase o conjunto de conjuntos biyectivos entre sí, y aceptar que el número cardinal de los naturales es el mismo que el de los racionales y el de los trascendentes. Lo que entra en juego en la aceptación o rechazo no es, por supuesto, la biyección. Lo que entra en juego es la creencia en el infinito actual en extensión. Galileo, Leibniz, lo rechazaban; Cantor, Dedekind, lo aceptan. Y aunque se ha dicho que con esta biyección Cantor pasa a crear varios tipos de infinito, lo que ocurre es que la previa aceptación del infinito actual en extensión es la que conduce a aceptar la existencia de la biyección. Ahora bien, la aceptación de dicho infinito actual en extensión es una aceptación de carácter primariamente ontológico, existencial y no, precisamente, de carácter lógico.

1.3. Aceptado el infinito actual —mediante el compromiso ontológico que cada matemático sostenga—, aparecen ligados los problemas de la impredicatividad. Son consecuencia del postulado de abstracción o comprehensión —por el cual toda propiedad «bien definida» caracteriza un conjunto—. Dejando a un lado las dificultades de «lo bien definido», es claro que en pura lógica, tanto la definición como la demostración no deben ser impredicativas o circulares, no se debe definir un concepto en términos de dicho concepto, y análogo con la demostración. Y, sin embargo, el postulado base conlleva el impredicativismo. Por rigor lógico, al haberse mostrado aporético y engendrador de antinomias, habría que rechazarlo. Pero el postulado se muestra operativo, útil, y se mantiene. En lugar de eliminarlo, se acepta pretendiendo acotarlo de forma que la circularidad no se haga demasiado peligrosa, que no produzca demasiadas antinomias. Las construcciones de 1908, de Russell, de Zermelo, pretenden hacer inofensivo el círculo vicioso. Desde el terreno de una ontología formalista ello implica que habría que demostrar que el sistema de postulados de la teoría de conjuntos, incluido el de abstracción, es consistente o no contradictorio. Demostración demostrada imposible.

Con lo cual sólo se presenta una opción, señalar que el hacer matemático se fundamenta en una teoría formal de la cual: a) no se van a manejar de modo explícito las reglas de derivación formales; b) no se puede demostrar que es consistente, sino que las primeras antinomias no se producen, aunque puedan aparecer otras en el futuro. Es la opción que, de hecho, se ha seguido en el hacer matemático, aceptando el precepto de Poincaré consistente en afirmar que el hacer matemático continúa su marcha independientemente a cualesquiera hormas de tipo más o menos lógico que para él se pretendan. Su marcha no depende de la lógica, sino de aquel que construye tanto la matemática como la lógica, el hombre. Por supuesto, esta opción equivale a admitir que el criterio para admitir el hacer matemático se apoya en la creencia de que el hombre podrá superar las futuras contradicciones o paradojas que en ese hacer surjan, además de aceptar el criterio de que hasta ahora, en los veintitantos siglos de hacer matemático que se conocen, es lo que ha ocurrido y parece razonable esperar que siga ocurriendo. Criterios de aceptación puramente pragmáticos, operacionales y no, evidentemente, lógicos puros.

2. De lo infinitamente grande a lo infinitamente pequeño. El cálculo integral y el de derivadas se organizan tras los trabajos de Cavalieri, Roberval, Pascal y, por inversión, de Leibniz y Newton. Su fundamento, lo ilógico: el principio de indivisibles por el cual una superficie o área —la integral— se obtenía como suma o agregado de líneas. Se atentaba, con ello, al principio considerado lógico de homogeneidad del espacio, por una parte; a las definiciones de punto, línea, plano, por otro. El cálculo integral se convertía, sin embargo, en herramienta indispensable, y no sólo del hacer matemático. De modo análogo el cálculo diferencial, apoyado en magnitudes que, siendo, no son, y se desvanecen a lo largo del cálculo. Pero esta crítica es muy fácil: el obispo Berkeley la hizo para señalar que los agnósticos matemáticos tenían más fe que el más puro asceta por creer, frente a toda lógica, en unas magnitudes evanescentes...

Y, por contraposición, el paso señalado en el punto 1.2., biyección entre N y Q, venía asegurado por unos matemáticos que habían dedicado su tiempo y trabajo a estudiar lo infinitamente pequeño: los puntos de discontinuidad de funciones racionales. Matemáticos que admitían, frente a toda lógica, la existencia del infinito actual en extensión, rechazaban el infinitésimo por ilógico y preferían mantenerse en un puro formalismo sígnico cuando tenían que manejarlo. Cantor, Dedekind, Weiertrass, Du Bois-Reymond, Poincaré..., niegan carta de ciudadanía al infinitésimo, principalmente porque no es imaginable y porque, siguiendo a Berkeley, se obtenían razonamientos de dudoso valor lógico. Algunos, como Poincaré, además, señalan que su no admisión se debe a que, de momento, no es útil, carente de aplicaciones en otras parcelas del hacer matemático o en otras parcelas de las ciencias naturales y, a la vez, porque la estructura formal de tales infinitésimos estaría constituida por un cuerpo no arquimediano. Negativa apoyada en ninguna razón coherente; hoy tales infinitésimos pueden ser admitidos dando paso, de hecho, a lo que viene calificándose de Análisis no canónico.

3. Los números complejos o imaginarios penetran en el hacer matemático de una manera equivalente a conceptos como los ejemplificados en los puntos anteriores. Son operativos para la resolución de algunas ecuaciones algebraicas. Su admisión definitiva, ya en los primeros años del siglo XIX, se hace porque los mismos pueden representarse gráficamente en el plano. Dejan de ser entes puros para alcanzar la categoría de objetos reales que hay que definir de modo algo más riguroso. Una representación gráfica les da la existencia, que ya tenían, y que posteriormente se justifica de manera pretendidamente lógica, formal. Gracias a ella, se puede construir el análisis de variable compleja aun antes de aquella zona que desde un plano del rigor lógico debería fundamentarlo, el análisis de variable real. Contradictorio este último análisis, desde sus comienzos, ya que define el número real como límite de racionales aceptando que cuando tal límite no existe como racional existe y es el real; y existe, porque previamente se admite que el límite exista, aunque no exista....

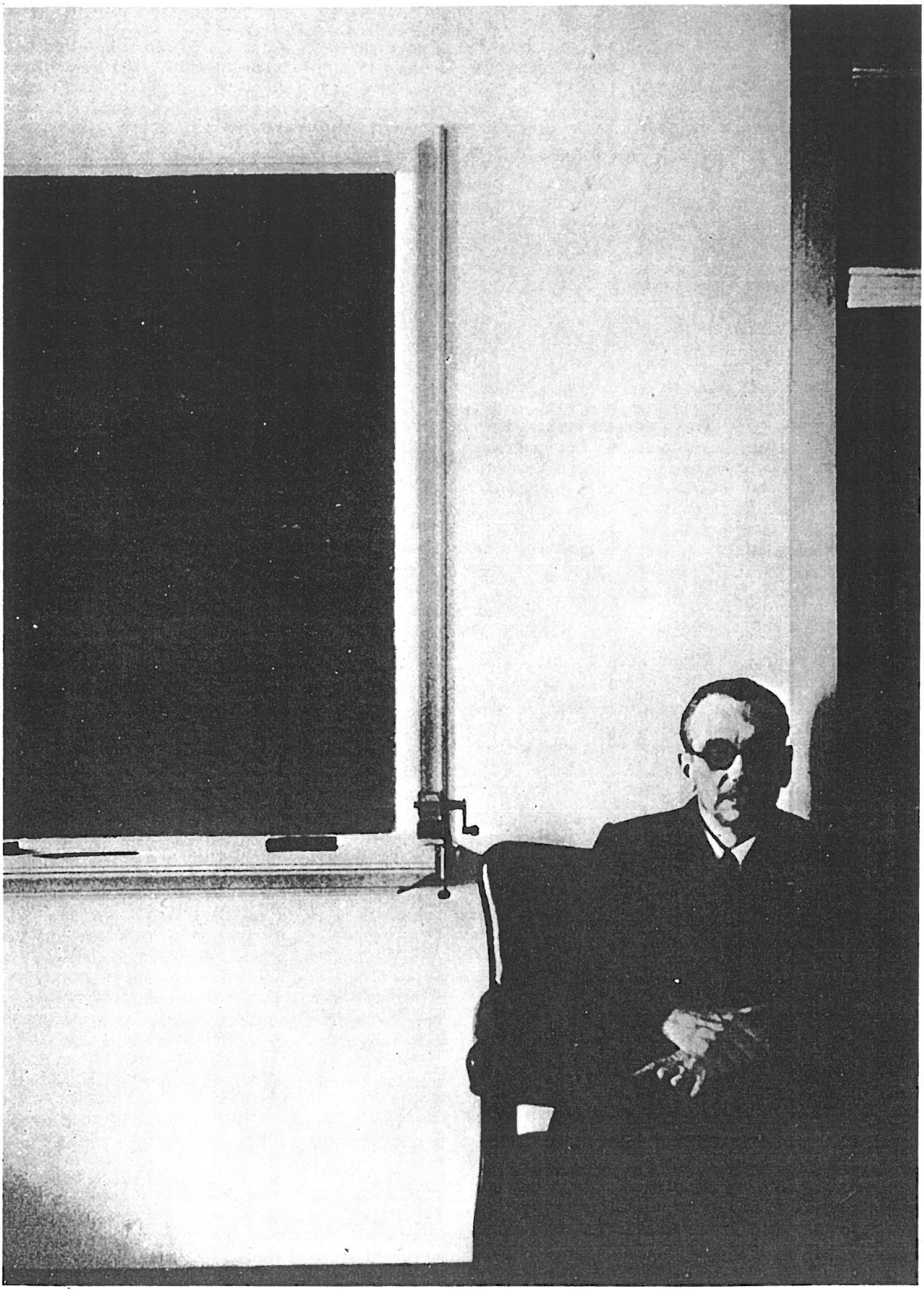
4. Frente a las introducciones de los conceptos y teorías matemáticas como se han producido, a base de saltos, de aceptar postulados aparentemente ilógicos, conceptos en cuya definición se cometen los mejores disparates y se incumplen todos los preceptos lógicos de la definición, se podría aceptar que, una vez admitidos, la demostración se haría reina y señora del hacer matemático. Basta tomar el modelo de los modelos, los *Elementos* de Euclides, para observar que ni siquiera la Proposición 1 del Libro I está demostrada. Y en los ensayos y libros de los matemáticos considerados como «creadores geniales», tales fallos demostrativos son lugar común. Demostraciones falsas o erróneas las han dado todos los matemáticos. Incluso alguna demostración errónea muestra el papel que el error tiene en el hacer matemático: ser fuente creadora de nuevos conceptos y teorías, como el caso Lebesgue y Lusin muestra de forma modélica. Y ello por no citar el papel de algunas ideas, confusas en su origen, rechazables y rechazadas en su primera formulación y que, sin embargo, han constituido fuente inagotable de conceptos, como las series de Fourier, o la «función» de Dirac...

Por contraposición, aquí se encuentra un punto interesante. En algunas ocasiones, ciertamente escasas, los matemáticos han elaborado teorías en la forma modélica demostrativa, pero entonces su obra ha pasado inadvertida. Así, el *Tratado de cónicas* de Pascal, en el que sigue a Desargues, creando en forma de disciplina deductiva la Geometría proyectiva, recreada dos siglos después. Así, Saccheri, creando la geometría hiperbólica sin consumar su creación porque no encuentra el error lógico que cree tiene que encontrar, y que no existe. Cuando Gauss desarrolla la geometría hiperbólica, no se atreve a la publicación, a pesar del carácter lógico, deductivo, que podría mostrar la construcción geométrica consiguiente.

El matemático no parece mostrarse preparado para aceptar el rigor lógico que, según los mitos aceptados por el hombre cualquiera, por algunos filósofos de la ciencia, preside su hacer...

b) Razones

A pesar de lo indicado al comienzo del punto a), conviene apuntar alguna «razón» desmitificadora. Por lo pronto es claro que puede hacerse una objeción a las ejemplificaciones anteriores, un *distinguo*: pertenecen al plano o contexto del descubrimiento y, como tales ejemplificaciones, lo son de la arqueología del saber matemático, pertenecen a factores emocionales, sociológicos, etc. Para mayor convencimiento cabe »



Kurt Gödel, en su despacho del Institute for Advanced Study (fotografía de A. Newman, reproducida *Matemáticas en el Mundo Moderno*, ed. Blume, Madrid, 1974). K. Gödel acabó de una vez por todas con la esperanza de que algún día la matemática podría axiomatizarse.

una analogía, ya utilizada por Russell: América fue descubierta a trozos, aunque existía completa y la ejemplificación de los descubrimientos no da cuenta de la estructura total del continente descubierto. Todo descubrimiento conlleva unos componentes de azar que conducen, a veces, a que aparezca la cola antes que la cabeza y no por ello la estructura deja de estar ahí, subyacente, dada antes del descubrimiento hecho a retazos y, lo que es más importante, dando cuenta, fundamentando dicho descubrimiento. La estructura es, por supuesto, la componente del contexto lógico. Y lo importante no es la forma y tiempos de los descubrimientos particulares, zonales, sino el total que dichos descubrimientos parciales permiten mostrar. Para un matemático que acepte esta tesis de logicismo, existencia de un mundo eidético previo, los ordinales y cardenales transfinitos, por ejemplo, existen con independencia a cualquier matemático pasado o futuro, y la labor de éste es de mera descripción de tales entes o formas eidéticas.

Ahora bien, en esta última expresión se ha alcanzado el punto de partida, precisamente, de quien sostiene esta idea: la creencia en una ontología existencial previa; la creencia en la existencia eidética de unas formas puras. En el fondo, una creencia.

A pesar de lo cual, o por eso mismo, desde el propio plano del sistema formal, de la identificación estructura demostrativa-matemática, cabe hacer unas consideraciones. No basta afirmar, sin más, que las ejemplificaciones afectan por modo exclusivo al contexto de descubrimiento y que, por tanto, no lo hacen al lógico, demostrativo. Porque cabe preguntarse si tal contexto lógico, estructural, al ir en todos los casos conocidos a remolque del contexto descubridor, no hace otra cosa que tratar de justificar, de la manera que considera más apropiada, más adecuada al mismo, a dicho contexto descubridor que le da origen y nacimiento. Con lo cual, si el descubrimiento hubiera sido distinto, la lógica justificadora hubiera sido diferente. Lo que equivale a decir que dicha lógica depende precisamente del contexto de descubrimiento y se limita no a fundamentarlo, sino a describirlo en una labor de perfección, sin duda alguna, pero a la vez de anquilosamiento, de manera que el matemático tenga que romper el criterio justificativo cada vez que el mismo provoca el cierre en el hacer matemático de cada momento. En otras palabras, y con analogía al modo de la dada por Russell, sostener que el hacer matemático se fundamenta en la lógica y posee un carácter demostrativo total parece equivalente a sostener las razones que tras todo golpe de Estado se dan para legitimar el régimen que tras él se instaura; siempre, tras todo golpe, se crean razones en número suficiente que lo legitiman y lo hacen ver y lo convierten en una coronación histórica que supera las contradicciones de los regímenes anteriores, contradicciones que no tenían otro objetivo que la celebración y consumación del golpe y la edificación del régimen surgido en él y que, por lo mismo, se fundamenta en ellas...

De esta forma cabría considerar que la propia lógica, en su desarrollo y fundamento, no es otra cosa que una consecuencia del desarrollo, en particular y no por supuesto único, del hacer matemático. Consecuencia que, por lo mismo, no puede ser el criterio que fundamente ese desarrollo, salvo caer en círculo vicioso, al que tan aficionado se es, por otra parte, en el contexto de la formalización existente.

Limito a dos las razones que siguen. Quizá sea la segunda la más potente y decisiva para desterrar el mito de la demostrabilidad del hacer matemático. Muy en esquema, el mismo me parece suficiente para quien domine la llamada lógica matemática, la lógica simplemente. Para el hombre instruido habría quizá que escribir un breve tratado de tal lógica.

1. Aceptando como punto de partida el formalismo hilbertiano, Gentzen lo llega a criticar vivamente así como al método axiomático general establecido por Russell y Whitehead. Su posición es clara: no se razona así, axiomática, formalmente, en la matemática. Y Gentzen propone una aproximación al «verdadero» modo de razonar matemático creando los cálculos de deducción natural. No hay, en la crítica, en la creación consiguiente, factor o componente psicológico alguno. Los cálculos de deducción natural pueden estimarse tan formales como los axiomáticos, pero en lugar de proposiciones y reglas de derivación sintácticas, hay reglas de deducción, tan rigurosas como las anteriores y equivalentes —en determinados contextos— a las anteriores, pero con clara pretensión descriptiva del auténtico razonar matemático, donde las suposiciones y las hipótesis, «adecuadas» para el contexto particular en el cual se trabaja, juegan un papel esencial.

2. Aceptando el formalismo pueden demostrarse una serie de limitaciones del mismo, que invalidan los mitos que lo rodean. Por lo pronto, los sistemas formales que pueden construirse con una mínima potencia como para desarrollar, por ejemplo, la Aritmética elemental, son incompletos; no digamos para desarrollar otras teorías de nivel más complejo o elevado. Incompletitud por la que pueden establecerse proposiciones que, siendo aceptables desde un punto de vista intuitivo, desde un punto de vista semántico, no pueden ser demostradas desde el terreno sintáctico o formal puro en el interior del sistema formal. La limitación de incompletitud muestra, entre otras cuestiones, que la demostración no puede identificarse con la validez ni, por consiguiente, con la intuición creadora y posterior aceptación de lo intuido.

De modo análogo podrían mencionarse las limitaciones de indecibilidad en sistemas formales, por las cuales no cabe encontrar demostración —o sucesión formal de proposiciones— de una proposición dada; o la paradoja de Löwenheim-Skolem con la relativización que comporta de términos como «numerable» o «continuo», es decir, con la imposibilidad de construir una teoría que caracterice lo infinito no numerable...

A la vez, conviene citar el hecho de que pueden crearse algoritmos —como los de Hao Wang— por los cuales una calculadora puede reproducir los «razonamientos» formales propios de una teoría deductiva elemental. Demostración – Algoritmo mecánico, que el hacer matemático sobrepasa.

c) Creencias

He intentado poner de relieve, muy esquemáticamente, que tanto la consideración de que las proposiciones de la matemática son analíticas como la consideración de que el total de la matemática constituye una teoría hipotético-deductiva, pertenecen a una categoría de creencias calificable de mitológicas, y que ambas no son adecuadas, no se corresponden con el hacer matemático, ni con el actual, ni con los demás haceres matemáticos que han ido surgiendo y desvaneciéndose a lo largo de los trabajos humanos.

No quiere decir que el papel de las creencias, el papel de la mitología que rodea al hacer matemático, sea un obstáculo para el mismo. Pueden serlo nociones como las aquí señaladas cuando se aceptan acríticamente, cuando se enfocan como dogmas de obligada aceptación. Por el contrario, las creencias, en sí, constituyen uno de los factores más positivos para el hacer matemático. Este se desarrolla no gracias a la pura lógica, sino precisamente, gracias a un mundo de creencias, a veces no muy racionalizables. El rigor, la exactitud, la demostrabilidad, la analiticidad..., son siempre términos relativos, siempre condicionados por el contexto en el que un hacer matemático determinado se encuentra inmerso. En el interior de cada hacer matemático no hay criterios formales para delimitarlos. Los criterios surgen desde otro hacer distinto, aunque también matemático. Y precisamente por esta ausencia el papel de las creencias en cada contexto histórico es tan esencial.

Como ejemplo, puede considerarse la influencia platónica en algunos momentos, en algunos contextos del hacer matemático. Para alguno, la idea platónica de los cinco cuerpos perfectos se mostraría absurda. Absurda desde un criterio pretendidamente riguroso, de un criterio calificado de «científico», racional. Criterio cuyo valor se pretende superior a lo que critica, aunque tal superioridad no se muestre, sino que se trate de imponer. Criterio, por otra parte, propio de un hacer distinto al hacer platónico. Pero la creencia de los cinco cuerpos perfectos provoca la constitución expresiva de una disciplina, como la geometría, en *Elementos,* convertida tal forma expresiva en el modelo y en el criterio por el cual se llega a criticar su propia constitución. En un segundo momento, la misma creencia permite a Kepler llegar al establecimiento de sus leyes astronómicas...

Igualmente, la creencia en el papel demostrativo en el interior de cada hacer matemático ha conducido, en algunos, a la creación de nuevos conceptos y teorías. En búsqueda de una demostración del último teorema de Fermat, el matemático ha conseguido la creación de lo que vino en llamarse «álgebra moderna» hace ya muchos años. Y no sólo álgebra, sino quizá más importante, la consideración de que tal hacer matemático no consistía, en última instancia, sino en un hacer de «estructuras formales», consideración que llevó a la ruptura epistemológica de los entornos de 1939.

La creencia es, esencialmente, operativa. Y, como consecuencia, lo es la lógica, pero una lógica del imperativo, una lógica modal. Se cree que demostrando se alcanza, en cada momento, el rigor que le es propio. Y esta esperanza es la que provoca, en algunos casos, la creación de conceptos y, con ellos, de teorías. Pero esta creencia comporta un imperativo, núcleo quizá de todo el hacer matemático: el imperativo de hacer tal acción para obtener tal resultado. Imperativo que condiciona el hacer matemático que, como cualquier otro trabajo humano, afinca sus raíces en los campos de la imaginación simbólica, justificadora también de lo que algunos pretenden justificación de ese hacer, la lógica.

***Henri Poincaré*, el célebre matemático francés, ahondó en los procesos de creación matemática, a cuyos problemas dedicó numerosos ensayos.**
***David Hilbert* fue uno de los propulsores del *axiomatismo* dentro de las matemáticas, que pretendía fundamentar mediante axiomas todos los ámbitos de la matemática.**

Javier de Lorenzo. *Doctor en Filosofía, catedrático de Matemáticas y Enseñanza Media. Autor de «La Filosofía de la Matemática de Poincaré» (Madrid, 1974).*