J. de Lorenzo

LA MATEMATICA Y EL PROBLEMA DE SU HISTORIA

TECNOS

SERIE DE MATEMATICA

Dirigida por JAVIER DE LORENZO

BENÍTEZ RAMÍREZ, Manuel: *Regla de cálculo.* Nuevos métodos.
CASANOVA, Gastón: *El álgebra de Boole.*
DELACHET, André: *Análisis matemático.*
DELACHET, André: *Cálculo diferencial e integral.*
DELACHET, André: *Cálculo vectorial y cálculo tensorial.*
DELACHET, André: *Geometría analítica.*
FERNÁNDEZ VIÑA, J. A.: *Lecciones de Análisis Matemático I.*
GODEMENT, Roger: *Algebra.*
GROSS, M., y LENTIN, A.: *Nociones sobre las gramáticas formales.*
HILTON, P. J.: *El lenguaje de categorías.*
JEREZ JUAN, Miguel: *Tablas de funciones primitivas.* Formulario de cálculo integral.
LOÈVE, M.: *Teoría de la probabilidad.*
LORENZO, J. de: *Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos.*
MALLIAVIN, Paul: *Geometría diferencial intrínseca.*
SÁNCHEZ CORDOVÉS, J.: *Matemáticas aplicadas a radio y televisión* (2.ª edición aumentada).
SANMARTÍN ESPLUGUES, J.: *Una introducción constructiva a la Teoría de Modelos.*
STEWART, Frank M.: *Introducción al Algebra lineal.*
WARUSFEL, A.: *Diccionario razonado de matemáticas.*
WILLIAMSON, J. H.: *Integración Lebesgue.*

LA MATEMATICA

Y EL PROBLEMA DE SU HISTORIA

JAVIER DE LORENZO

LA MATEMATICA

Y

EL PROBLEMA DE SU HISTORIA

EDITORIAL TECNOS
MADRID

Editorial Tecnos, S. A.
O'Donnell, 27. Madrid-9
I.S.B.N.: 84-309-0720-3
Depósito legal: M. 30049. - 1977

Printed in Spain. Impreso en España por Selecciones Gráficas (Ediciones).
Paseo de la Dirección, 52.—Madrid-29

En el verano de 1965, y mientras trabajaba en los escritos matemáticos de Pascal, tuve la necesidad de realizar una relectura de las Regulae ad directionem ingenii de Descartes. Y en las Reglas, en la relectura crítica de las mismas, vi expresado con total claridad el hecho de las rupturas en el hacer matemático. De modo inmediato, tal visión se reflejó en la que estaba haciendo sobre los escritos matemáticos de Pascal, resultando que también éste conocía la existencia de esas rupturas, la coexistencia de distintos haceres, y lo expresaba incluso con mayor nitidez que Descartes. Influido por el lenguaje pascaliano pensé que tales rupturas, las disciplinas creadas en cada una de ellas, se debían manifestar en un estilo expresivo propio, característico. Y de este pensamiento surgió el plan de un trabajo para el cual solicité ayuda, módica ayuda de investigación, en 1966. Por diversas circunstancias, el libro resultado del trabajo emprendido en esas fechas no se publicó hasta 1971, bajo el título Introducción al estilo matemático. Influjo de Pascal en el sentido de que dicho libro estuvo orientado hacia la especificación de los estilos y, con ello, del lenguaje matemático en que se manifestaba cada hacer, dando por admitidas muchas de las tesis que, ahora, en este trabajo, he procurado exponer de manera más explícita y sistemática, limitando las ejemplificaciones de esas tesis a sólo tres grandes rupturas epistemológicas, y ello en esquema, sin pretender la elaboración de una historia del hacer matemático, fuera de los límites del campo propio de este trabajo.

Debo hacer constar que por aquellas fechas me eran desconocidos los nombres de Kuhn, Lakatos, Feyerabend..., aunque no algo de la obra de Althusser —a quien, junto a Poincaré, debo parte de mi formación autodidacta, bien que no siempre de acuerdo, como se debe esperar, con todas las ideas de ambos—. El posterior conocimiento, muy superficial, de la tesis de Kuhn de las revoluciones científicas —traducido al castellano en 1971, en Méjico, y no encontrado hasta 1973, en Valladolid— reafirmó la la convicción vista en Descartes y Pascal de la existencia de las rupturas epistemológicas, así como la de los dos planos, interno e ideológico, del trabajo matemático; aunque no llegue a estar de acuerdo, por ejemplo, con que la totalidad de los científicos pase a pensar, a enfocar su «objeto» desde el nuevo «paradigma» en el momento de la revolución, sino que, por el contrario, hay coexistencia de distintos haceres, con el problema consiguiente de los diferentes tiempos de los mismos... Sin embargo, ese conocimiento —insisto, superficial— de la posición de algunos críticos de la ciencia constituía la confirmación, por un lado, de mis ideas expuestas en el libro mencionado, en algún otro ensayo, en conferencias inéditas, in-

cluso no expresadas en público; por otro, de la tesis de que, independientes y en contextos socioeconómicos distintos, distintos pensadores han de llegar a unas ideas del mismo tipo en períodos de prerruptura. La diferencia sentida estribaba en que los críticos de las ciencias parecían marginar la matemática de sus consideraciones, centradas preferentemente en la Física; trabajo matemático que por el contrario, y quizá por el contexto profesional en el que me desenvuelvo de observador-enseñante de dicho hacer, constituía el centro de mis preocupaciones, en las que quedan algo marginadas, de momento, las especulaciones en torno a la crítica de las ciencias.

Es reconocimiento que no quiere ser declaración de orgullo o soberbia, ni de falsa modestia —en todo caso constituiría tema para trabajo sociológico-cultural el desconocimiento de los autores mencionados, de muchos otros, por parte de un español que acaba en aquellas fechas su segunda, su tercera carrera universitaria en Madrid—. Trabajar en España, aislado y en soledad, es difícil. De ahí la satisfacción, mezclada con el desaliento, que puede producir el conocimiento en otros, quizá no siempre explícito, de las líneas de trabajo en que me he venido moviendo desde hace años.

CONTENIDO

Matemática & Historia ... *Pág.* 11

1.1. Hacer-Especular ... 11
Historicidad del trabajo matemático ... 14
1.2. Indiferencia del matemático frente a la historia de su hacer ... 15
1.3. El postulado de historicidad ... 18
1.4. Rupturas, coexistencias, tiempos. Un ejemplo ... 21
1.5. 'Al servicio de' ... 24
1.6. «Debemos buscar en la historia...» ... 30

Rupturas epistemológicas ... 35

2.0. No linealidad del 'crecimiento' matemático ... 35
2.1. *Entornos de 1827* ... 39
2.1.1. Problemas clásicos: Algebra y Análisis ... 41
2.1.2. Problema clásico: Las Geometrías no-euclídeas ... 46
2.1.3. Problema clásico: La aplicación del álgebra y del análisis a la Geometría; la Proyectiva, la Diferencial ... 48
La síntesis proyectiva ... 49
El Análisis como herramienta: La Diferencial ... 53
2.1.4. Problema clásico: Disquisiciones aritméticas ... 56
2.1.5. Reflexiones ... 62
2.2. *Entornos de 1875* ... 64
2.2.1. El Programa de Erlangen ... 66
2.2.2. Multiplicidades, conjuntos ... 68
2.2.2.1. Continuidad y números irracionales ... 69
2.2.2.2. Conjuntos lineales ... 74
2.2.2.3. Consecuencias: Nuevas disciplinas ... 76
2.2.3. Los números algebraicos. Algebra; Geometría algebraica ... 78
2.2.4. Reflexiones ... 83
La inflexión axiomatizadora de los entornos de 1920 ... 86
2.3. *Entornos de 1939* ... 89
2.3.1. Algebra 'moderna' ... 95
2.3.2. Geometría-Topología diferencial ... 97
2.3.3. Geometría algebraica 'abstracta' ... 99
2.3.4. Teoría de categorías ... 101
Fundamentos del hacer matemático ... 105
2.3.5. Otros haceres ... 106
2.3.6. Reflexiones ... 109

Consecuencias & Repercusiones ... 111

3.1. Coexistencia de los haceres matemáticos ... 111
3.2. Qué matemática debe explicarse ... 117
3.3. De 'conocimiento' a 'ideología' ... 119
3.4. El término 'matemática' ... 121

APENDICE: La ruptura cantoriana ... 127

1. El hecho ... 127
2. Las demostraciones ... 131
3. El marco ... 136
4. La ideología ... 139
5. Problemas: Intuición-Impredicatividad ... 142
6. Una mirada atrás: Presencia-Ausencia del Infinito ... 150

MATEMATICA & HISTORIA

1.1. HACER-ESPECULAR

Se parte de una observación trivial, convertida en hecho: hay diferencia entre hablar de un objeto y construir ese objeto. Observación trivial, no siempre percibida, de la cual pueden obtenerse más truismos. Construir un objeto, un concepto, supone un trabajo, una práctica teórica conceptual a partir de unos objetos, de unos conceptos previamente dados. Hablar acerca de esa construcción, de ese hacer o práctica teórica supone, ciertamente, un trabajo, pero como práctica especulativa que entraña un aspecto descriptivo, exterior al hacer interno del trabajo acerca del cual se especula.

El hacer matemático no es mera descripción, ni mera especulación. No es una práctica teórica descriptiva al estilo del hacer geológico, por ejemplo, dado que al trabajar se construye y, con ello, se muestra el concepto, el objeto en el mismo acto creador —o recreador— del trabajo. Al hablar de una falla geológica se la «describe» con palabras, con imágenes y figuras, pero no se la «muestra» creando la misma en la descripción, en el acto de conocimiento. Paralelo al trabajo geológico, en Física y Química ocurre lo mismo, en su aspecto elemental; en el no elemental se crea el experimento particular que, convenientemente interpretado a la luz de la teoría por quienes saben lo que quieren ver e interpretar en dicho experimento, ilustra la descripción teórica. En todos estos casos, sin embargo, no hay mera especulación acerca de algún objeto que ni se crea, ni se muestra, ni se describe, en contraposición a otras prácticas como la filosófica no crítica en las cuales meramente se consigue una argumentación reflejo y justificación de unas ideologías.

En esta diferencia entre hacer y especular se encuentra una dificultad básica del hacer, de la práctica teórica matemática: no cabe divagar acerca de ese hacer tomando esa divagación como propia del mismo, como práctica teórica interior a ese hacer. En el trabajo matemático o se hace o no se hace. No caben «caminos reales» intermedios. Pero ello significa, curiosa circunstancia, que es un hacer teórico radicalmente concreto, en el cual no caben divagaciones, abstracciones o especulaciones en su interior, pretendiendo que las mismas sean matemática. Especulaciones que, en el mejor de los casos, pueden considerarse complementarias pero como conjeturas que podrán convertirse, o no, en hacer matemático, siempre en un estadio posterior al momento conjetural; en general, las especulaciones en torno a ese hacer ni siquiera pertenecerán a este plano de conjetura, quedando en terreno especulativo, propio de la ideología de quien hable en torno al hacer matemático.

Estas observaciones triviales conducen a destacar que el hacer matemático actual puede caracterizarse, al menos, por dos notas principales:

1. Es un hacer manipulador sígnico distinto a la práctica especulativa de hablar en torno a ese hacer y gracias al cual se «muestra» el objeto que se fabrica.
2. El hacer matemático, como trabajo, se objetiviza en una mera manipulación sígnica con significado, pero sin referencial; en otras palabras, en un producto de conocimiento objetivo, base para otras prácticas posteriores.

En el uso manipulador sígnico intrínseco sin denotación se encuentra una de las razones de la abstracción formal, dado que se presenta dicha manipulación como forma de trabajo sin «conocimiento»; adoptando aquí por «conocer» el significado empirista del término, es decir, abstracción de esencias de objetos materiales previamente dados frente a un objeto cognoscente, sujeto agente de la abstracción de dicha esencia oculta en el objeto frente al cual se sitúa el sujeto —abstracción tanto en sus matices empiristas sensualistas como racionalistas—. Por causa de tal naturaleza abstracta, se da razón de su validez objetivable mediante la falsabilidad realizable en la subjetivación de otros sujetos, a la vez que se da razón de la consideración de la necesidad de la construcción matemática frente a la contingencia que caracteriza la manipulación sígnica con referencial, propia de las materias calificables de científicas, que proporcionan conocimiento —en el significado anterior del término—, variable y con sus gradaciones correspondientes.

Simultáneamente, en dicha naturaleza abstracta sin referencial se tiene una de las claves de la instrumentalización de ese hacer matemático, instrumentalización no del mismo hacer como práctica, sino del producto que en la misma se logra; se tiene una de las claves por las que una misma estructura sintáctica puede «aplicarse» a dominios muy diversos mediante el empleo de modelos o interpretaciones de los mismos, mediante la asignación de un referencial a sus herramientas sígnicas, modelos que no tienen por qué ser isomorfos entre sí e incluso pueden no ser canónicos respecto a alguna interpretación convertida en usual. Utilización de modelos que, por otro lado, pertenece ya a otra práctica distinta a la propia del hacer matemático, a una práctica técnica o incluso a una práctica teórica como puede ser la Física.

Las dos notas anteriores permiten señalar, insisto, que el hacer matemático constituye una práctica teórica sobre objetos concretos, determinados. Y más que sobre objetos, la práctica teórica matemática se realiza sobre problemas que dichos objetos plantean al matemático.

Por otro lado, hablar acerca de ese hacer supone, también insisto, un trabajo, una práctica pero de naturaleza ideológica. Y ello en el sentido de que se plantea como problema no ya un hacer o práctica sino, fundamentalmente, los resultados de la misma, el producto al que se atribuye, pongo por caso, un carácter de validez para todo tiempo y lugar o el de adecuación de una estructura como modelo para la explicación de un fenómeno social; es decir, se plantea un problema cuya solución va a venir condicionada por unos intereses no intrínsecos al hacer matemático, sino condicionados por otras zonas de interés —religiosas, morales, políticas, sociológicas, económicas...—, de tal manera que permita utilizar o manipular el producto de la práctica teórica como justificación de dichas zonas. Ahora bien, la práctica teórica, el hacer intrínseco matemático viene influido también por este hablar acerca del mismo; en otras palabras, la práctica especulativa, ideológica, no es inocua para dicho hacer. No son prácticas, contra lo que pudiera parecer, paralelas, manifestándose el hacer matemático como independiente de la ideología que lo recubre, sino que ambas se interpenetran de modo constante. Incluso es la ideología la que determina en muchos momentos la propia práctica matemática a pesar de los aparentes intentos de quienes trabajan en este campo por su libertad en el mismo, siendo sobre una u otra ideología sobre la cual se mueve el propio hacer matemático.

En otras palabras, se hace preciso tener presente la existencia de dos planos que van íntimamente unidos en la auténtica práctica matemática:

1. Un hacer intrínseco o práctica teórica matemática —que se plantea básicamente como resolución de problemas y se realiza sobre unos objetos para alcanzar unas soluciones y, con ellos, unos resultados, unos productos—. Es lo que de un modo tradicional, apoyado en representaciones no críticas, se estima como «matemática».

2. Un cuadro ideológico que condiciona ese hacer, bien por un contexto de conocimientos ya adquirido, bien por unas condiciones de trabajo que, en última instancia, pueden explicarse por razones económicas.

Ambos planos pueden calificarse como pertenecientes a una crítica interna, a una crítica externa, respectivamente. Son dos polos inseparables de toda práctica teórica matemática. El hacer matemático puede admitirse como un conocimiento objetivo —en contraposición al uso de «conocimiento» antes indicado y que cabe calificar de «sensualista» o ingenuo— de objetos, de conceptos. Pero el mismo —como ocurre en todo tipo de conocimiento objetivo conceptual— puede llegar a convertirse en parte de la ideología, a convertirse en pseudoconocimiento apoyando o dando lugar a representaciones e imágenes acríticas. En el hacer matemático, en su propia práctica interna, un muy claro ejemplo se presenta en el tratamiento del Cálculo diferencial e integral: el modo de su recreación y las nociones que supone dependen de la previa concepción ideológica —que en este caso implica una concepción de qué sea la matemática— que posea quien hace dicha recreación; así, en algunos contextos, se combina la concepción estrictamente formalista, procedente de Euler, con la representación gráfica de un empirismo sensualista improcedente y con la noción de formas lineales de enfoque estructuralista... Y ello porque dicho cálculo se ha convertido en herramienta de otras prácticas y, como tal herramienta, ha perdido el rigor crítico propio de la conceptualización matemática. Análogamente podría mencionarse el tratamiento del continuo, del número real: su introducción o recreación y discusiones dependen de la previa concepción ideológica en la que enfocar dicho problema.

Cabría apuntar que en otras disciplinas, en otros trabajos, como por ejemplo, en Física, ocurre algo parecido: Galileo convirtió en conceptos teóricos elementos que podrían considerarse como propios de una ideología previa; pero tales conceptos —así los marcos espacio-temporales, los fenómenos astronómicos— terminaron por «generalizarse» pasando a pseudoconceptos y representaciones mentales acríticas, ideológicas, que han perturbado la propia creación científica posterior al convertirse en nociones del «sentido común», representaciones e imágenes contra las que ha debido alzarse, en nueva ruptura, la propia práctica física.

De aquí que ambos planos —práctica interna, crítica externa— no puedan separarse arbitrariamente y deban tenerse presente en un enfoque histórico del hacer matemático, siempre que el mismo sea posible. No deberá limitarse, por ejemplo, a la historia interna del trabajo matemático sin tener en cuenta los condicionantes que la ideología propia de cada momento impone a dicho hacer, prestando validez a los conceptos de la misma. Lo cual no significa, por otro lado, el extremo opuesto y dar una total y rotunda preponderancia al plano ideológico puro.

Historicidad del trabajo matemático

Las notas caracterizadoras del hacer matemático se han dado para un hacer matemático actual, y éste es término a considerar. La validez objetivable de las dos notas caracterizadoras se puede querer para todas las épocas, al igual que la validez de toda categoría abstracta. Sin embargo, por esta igualdad puede atribuirse a ella lo mismo que Marx atribuyó a todas las categorías abstractas, que «son (...) no obstante, asimismo en lo que hay de determinado en esta abstracción, el producto de condiciones históricas, y no poseen plena validez sino para estas condiciones y dentro del marco de las mismas».

La admisión de estas últimas palabras indica, claramente, la de un postulado: la radical historicidad del hacer matemático. Postulado que, aceptado, hace cuestionable a los dos rasgos caracterizadores antes señalados, al menos como rasgos válidos para el hacer matemático de todo tiempo y lugar. Si se admite la historicidad del hacer matemático puede no admitirse la validez para todo marco histórico-geográfico de dichos rasgos. Ambos muestran su validez para el hacer matemático actual en alguna de sus facetas; quizá no lo sean para el hacer matemático de un período del pasado o del futuro o de un presente contextualmente distinto.

Todo ello implica aceptar la existencia de unos marcos de validez de la práctica matemática, de los objetos con los cuales se trabaja, del producto de ese trabajo. Marcos delimitadores tanto del hacer intrínseco como de la ideología que lo posibilita. Y es esta aceptación la que permite comprender el hecho de que, en cada momento de ruptura, aparezcan varios matemáticos que, de modo simultáneo y sin contacto o comunicación entre sí, dedicados a unos mismos problemas, logren unas mismas respuestas. Es la que permite explicar el hecho de que la geometría no-euclídea hiperbólica sea desarrollada simultáneamente por Gauss, Bolyai, Lobatchevski; la geometría analítica por Fermat y Descartes; las funciones abelianas por Abel, Jacobi, Gauss; las funciones automorfas por Klein y Poincaré; la definición por abstracción por Frege, Cantor, Dedekind...

Se hace cuestionable, igualmente, la mutación de dichos marcos, y su aceptación lleva a la admisión de que en el interior de cada marco rige un rigor, una verdad que no son el rigor o la verdad para otros marcos, aunque los conceptos que se manejen en uno parezcan quedar incorporados en la práctica propia de otro de los marcos. Incorporación que conlleva un cambio en el significado, en el uso de los mismos. El problema de la validez se centraría, entonces, en el hecho de que el objeto de conocimiento puede seguir siendo el mismo, pero cambia el enfoque de su visión, de su manejo ante la necesidad de resolver nuevos problemas, nuevos para el marco en el que se encontraban. Y de esa necesidad, interna, se llega o bien a ampliar el objeto y, con él, a un desarrollo teórico interno, o bien a enfocarlo desde nueva perspectiva y, por tanto, a una ruptura epistemológica. Cabe observar, además, que la ampliación o desarrollo teórico de unos temas conlleva, necesariamente, la ruptura en cuanto a que ese desarrollo terminará manifestando los límites inherentes al problema considerado, imposible de resolver con el enfoque interior del marco en el cual está planteado.

1.2. INDIFERENCIA DEL MATEMATICO FRENTE A LA HISTORIA DE SU HACER

Sin embargo, los dos rasgos mencionados como caracterizadores del hacer matemático actual permitirían explicar la ausencia de interés que para el matemático ha presentado la posible historia de lo que él considera como su terreno de trabajo propio. Igualmente permitiría la explicación de que el matemático enfoque tal historia, en general y si llega a aceptar la existencia de la misma, como un hacer no matemático, como una práctica perteneciente al nivel de la especulación y no al nivel interior de su propio trabajo. Igualmente, la ausencia de ambos rasgos caracterizadores quizá explique la necesidad que se tiene en otras prácticas, como la filosófica, del conocimiento de la historia de su saber, a la vez que dicha práctica filosófica admita a su historia como una materia interna, propia o, en todo caso, como un hacer que cae bajo el ámbito de su contexto especulativo, llegándose incluso a la discusión de si toda su problemática especulativa no es más que una teoría antropológica en la que se da únicamente razón de lo que otros pensadores pensaron en su contexto.

En otros lugares me he referido a la especial configuración de quien realiza el trabajo matemático, del matemático como constructor de estructuras sígnicas, abocado a la superación histórica, proyectado a un futuro y, sin embargo, integrador de los problemas pasados que se hacen, en él, presente. También, de las limitaciones que en su deseada y aparente libertad constructiva tiene, tanto internas como externas. Pero cabe destacar que el matemático parte de un bagaje de conocimientos —en métodos y problemas— con un cierto nivel de estructuración fisiológica y en un ambiente socioeconómico particular. Elementos todos ellos objetivos en el sentido de que, en particular, aunque dicho bagaje haya sido construido por otros hombres, por otros matemáticos, en otras circunstancias, en otras épocas, dichas construcciones se han reificado como producto, como conocimiento objetivo con su entidad propia por decirlo así, se han despersonalizado importando por modo exclusivo las condiciones o postulados que caracterizan cada producto construido, cada estructuración formal sígnica, con el juego de proposiciones o teoremas y definiciones que la cortejan y los problemas objetivos a que dan lugar con independencia de quien o quienes han realizado su construcción, y que constituyen lo concreto objetivable sobre lo cual, una vez incorporado por el sujeto, realizar nueva construcción o manipulación sígnica —bien mediante un desarrollo, bien mediante un cambio de perspectiva con la ruptura epistemológica consiguiente— a través de la interiorización subjetiva que permitirá la puesta en marcha de la actividad, del trabajo que supone la práctica teórica matemática.

Desde este punto de vista, la historia de ese producto parece ser secundaria. Lo que interesa es el producto en sí que pueda ser transformado o utilizado como objeto para la construcción de otro objeto más complejo. Con términos de Pascal: «Cuando citamos autores citamos sus demostraciones, no sus nombres.»

Frente a esta despreocupación o extrañamiento del matemático ante lo que pudiera ser la historia de su hacer, muestra el filósofo una actitud radicalmente opuesta. Como filósofo construirá su sistema, si es que lo tiene, en pugna crítica con lo que otros filósofos han mantenido o cree él que han mantenido. Dará razón de su especulación en contraposición, a veces forzada, con la realizada por otros. Lo cual permite, a la vez, dar una interpretación muy diversa de lo expuesto por cada uno de los distintos pensadores. Igualmente, permite sugerir que en la no ruptura de su reiteración especulativa —en el sentido de que el plano del hablar acerca de, sin mostrar el objeto a construir, se identifica con el plano del hacer dicho objeto en beneficio del sólo hablar acerca de— el hacer filosófico siga sin entrar, en frase kantiana, en el seguro camino de la ciencia, teniendo que partir siempre del nivel de subjetividad individual, nivel que no consigue trascender, encerrado por siempre en su contexto especulativo. Incluso cuando el filósofo pretende la objetividad crítica y aconseja la ruptura con el pasado, con lo dicho por filósofos anteriores, no puede olvidar tal pasado y ha de reconocer que su petición surge, precisamente, de ese pasado y permanece en él, surge de lo encarado con lo expuesto por los «filósofos» anteriores a los que niega validez, siendo que en tal negación se encuentra la afirmación de su propio especular. Así Kant, en el «Prefacio» de los *Prolegómenos,* pide la subjetivización y el abandono de la lectura de obras anteriores a la suya en beneficio de una crítica interna, individual, única vía superadora del griterío —de la *diafonía doxón* permanente, del «griterío de los beocios» como apostillaría Gauss posteriormente— que en torno a la metafísica ha existido. Vía de subjetivización en la que un filósofo español, por ejemplo Zubiri, insiste, porque no tiene otra salida, reiterando el mismo punto de cierre especulativo, negándose a admitir que la verdad para cada sujeto depende de los otros sujetos, negándose a admitir —por preconizar la vía de subjetividad pura como camino de ascesis— que el sujeto individual lo es por contraposición actual y en presencia de otros sujetos en los cuales se objetiviza mediante la falsabilidad de su propia subjetivación. De esta forma la petición de interiorización subjetiva como vía de ascesis individual a través de la práctica especulativa filosófica no es otra cosa que la de una reiteración de la *diafonía doxón,* por prevalencia del sujeto individual, tomado en abstracto, entelequia pura de la razón —lo cual no significa que, como práctica ideológica, no tenga sus consecuencias sociopolíticas.

El matemático no realiza tal juego de contraposiciones interiorizadoras respecto al pasado. Comprueba como máximo, reconstruye las demostraciones e intenta, englobándolas en sí, superar los problemas, resolverlos, crear otros, pero permaneciendo, manteniéndose en el terreno de la objetividad del yo colectivo, mediante un hacer que exige, como trabajo, tiempo; pero un tiempo presente. Por ello, si acude a lo expuesto por los demás, como base para la realización de su trabajo, es a un «los demás» coetáneo suyo: acude a lo que en el momento en que vive, se hace, para trascenderlo —con las dificultades que este acudir tiene en momentos como los actuales que presentan una inundación de publicaciones, por lo que la facultad crítica electiva parece estar siendo aniquilada, al igual que el sentido musical, en general el auditivo, en peligro por la contaminación del ruido; con las dificultades de no pertenecer a uno de los centros de trabajo más avanzados quedándose relegado el matemático ajeno al mismo fuera del cauce de su tiempo presente, abocado irremediablemente a realizar un trabajo que se objetivará en un producto ya superado, anticuado..., problemas a los que posteriormente volveré.

Si el matemático pretende sugerir paternidades en el enunciado o formulación de proposiciones, teorías o métodos, puede ocurrir que cometa errores de atribución, errores para el contexto histórico. Errores que, por otro lado, no le afectarán en modo alguno, dado que tal proposición, teoría o método se ha objetivado —por la falsabilidad que comporta— al ser convertido en conocimiento objetivo, en producto reproducible indefinidamente. Errores como la atribución del principio de inducción completa a

Maurolico o a Pascal, de la fórmula del desarrollo del binomio a Newton y no a toda la gama de matemáticos que culmina en Abel y que fueron completando ese desarrollo, de uno de los lemas maximales a Zorn, del método de cortaduras en el cuerpo de los racionales para construir el cuerpo de los números reales a Kronecker en lugar de a Dedekind... revelan la despreocupación y el extrañamiento mencionados. Aunque sean reflejo, igualmente, de que una misma proposición, teoría, método, puedan construirse por vez primera simultáneamente por matemáticos distintos, en ocasiones muy alejados entre sí. Las condiciones históricas en que se presenta un marco determinado han permitido que tengan validez en él tales construcciones, por lo que las mismas pueden aparecer a la vez como producto construido por varios matemáticos, provocando la elección de uno u otro nombre el mencionado «error» de atribución en algunos casos.

Despreocupación, extrañamiento del matemático ante la posible historia de su hacer se han reflejado —y en algunos países continúa reflejándose, como en España— en la ausencia de cátedras de Historia del hacer matemático o, de existir, que se liguen las mismas a los Departamentos de Metodología y didáctica de la matemática. Es decir, de existir, se considere conveniente su conocimiento por parte de quienes se van a ocupar de la transmisión, no de quienes, al menos de manera oficial o administrativa, van a ocuparse de la manipulación sígnica en sí, deseablemente creadora. Es una clara consecuencia de la consideración de que el hacer histórico se afinca en los terrenos de la ideología más que en los del hacer interno matemático.

Ello es consecuencia, igualmente, del extrañamiento del matemático respecto al estilo de los autores ni siquiera cien años anteriores a él. Los cambios en el reflejo del hacer, en la expresión de su producto, parecen tan absolutos, que la lectura de un autor considerado clásico puede llegar a entorpecer la labor creadora, a pesar de que en algún caso —y consecuencia de una ideología que quiere hacer del presente una mera continuación lineal del pasado, al que da culminación— se llegue a opinar que en dicha lectura podrán obtenerse ideas enriquecedoras, mantenidas en dicho autor en estado latente, en potencia o, con palabras de Galois, «a menudo parece que las mismas ideas se les presentan a varios a la vez como una revelación; si se busca la causa es fácil hallarla en la obra de quienes nos han precedido, en la que tales ideas quedan prescritas sin que sus autores lo sepan». Prescritas, pero únicamente después de que las mismas se hayan creado con posterioridad a la obra en la cual, mediante una vuelta y relectura desde un nuevo marco, cobran un sentido del que en dicha obra carecía por inmersa en un marco de problemática diferente.

1.3. EL POSTULADO DE HISTORICIDAD

Si, en contraposición con el cierre del hacer especulativo, admito que el hacer matemático engloba el pasado a la vez que se muestra como un hacer presente, como una práctica teórica permanentemente actualizada, pero proyectada en la pantalla de lo posible, hay que señalar con radical claridad que tal presente no engloba todo el hacer matemático, toda la práctica teórica que fue, a su vez, presente en un período determinado. Y ello por la interrelación señalada entre los dos planos de hacer interno y de ideología en la cual ese hacer cobra sentido y por la cual adquiere su validez una determinada problemática, una determinada forma de plantear y buscar los problemas que caracterizarán el hacer matemático de un marco concreto.

Constituye, lo último, una de las razones para aceptar el postulado de historicidad del hacer matemático. Otra de las razones se centra en el hecho ya reiterado de constituir un trabajo y, como tal, la práctica teórica requiere del tiempo, pero de un tiempo diferente del «tiempo de comprender» tan claramente puesto de relieve por Lacan. De aquí el rechazo que cabe hacer de las metáforas que identifican el conocimiento objetivo matemático con una obra arquitectónica o con un cuadro pictórico en el cual se van acumulando en un orden y tiempo espacial, por así decir, las distintas partes de una imagen previamente aprehendida en su totalidad.

Si ambas razones abogan por la aceptación del postulado de historicidad, el solo enunciado de éste, su dificultad intrínseca en cuanto a la existencia de distintos tiempos para distintos trabajos o prácticas teóricas, ya indica que es un postulado que requiere precisiones en su formulación, básicamente por la ideología en que este concepto, con sus imágenes geométricas acríticas, se encuentra inmerso.

La historicidad que se encuentra subyacente al hacer matemático no es evolucionista, difusionista o cíclica. Se encuentra sustentada en un tiempo no lineal, no continuo, sino en un tiempo a intervalos discretos, a base de saltos y rupturas. De esta forma, el hacer matemático no puede ser considerado como un hacer nacido en Grecia, o en otro lugar, por ejemplo, ni desarrollado y mantenido a lo largo de un flujo que va presentando su culminación en cada instante posterior, en el cual parece alcanzar su pleno sentido. Enfoque de historia lineal que ha sido predominante hasta tiempos recientes. Pero ello se debe al deseo de justificar el presente a partir del pasado y a la falta de perspectiva tanto para situar nuestro presente como para situarse, realmente, en cualquier otro presente. Por el contrario, la marcha conceptual adecuada del conocimiento objetivo matemático se apoya en la existencia de distintos tipos de hacer matemático, tipos de práctica teórica diferentes que pueden coexistir en un período histórico y que si pueden presentar interrelaciones e influencias mutuas, no implica que deban identificarse, como no se identifican con la práctica teórica del hacer físico, por ejemplo, a pesar de que entre ambas existen o hayan existido influencias e interrelaciones mutuas.

Admitir un tipo de historicidad discreta en el hacer matemático supone rechazar la práctica matemática como reflejo de una evolución continua y constante del hombre hacia una perfección progresivamente alcanzada y alcanzable con uniformidad —bien constante, bien acelerada—. En otras palabras, supone rechazar el historicismo como mesianismo mítico de la especie humana; mesianismo refugio de algunas ideologías que reemplazan el mesianismo religioso por este otro tipo de mesianismo bajo la etiqueta de «humanismo», como si con ello no se cayera en el mismo defecto que se pretende desterrar.

En este punto se presenta un peligro en cuanto al uso del lenguaje. Hegel, al indicar los tipos de historiografía que cabe observar, señalará tres: junto a la original y la reflexiva, la filosófica. En *La razón en la historia* indicará: «La única tarea de la historia es la pura comprensión de lo que ha sido y lo que es, de acontecimientos y acciones», tarea aparentemente objetiva pero que presenta una finalidad, «debemos buscar en la historia un fin universal, la meta final del mundo...», de todo lo cual ha de obtenerse: «Del estudio de la historia universal resulta, pues, y debe resultar que todo en ella ha ocurrido racionalmente, que ha sido la marcha racional y necesaria del Espíritu universal, espíritu que constituye la sustancia de la historia, que es siempre uno e idéntico a sí mismo y que únicamente explicita su ser en la vida del universo.» Si esto es lo que hay que buscar, y lo único que puede encontrarse, Hegel reconoce que el método histórico debe ser empírico —mitología del conocimiento empirista sensualista, contradictorio con el imperativo del «debemos buscar»—, lo cual supone que para captar el Espíritu hay que efectuar calas sincrónicas a base de tal método empírico, aunque el mismo, naturalmente, no quiera decir que sea intrínsecamente objetivo. Lo obtenido en tales calas sincrónicas tendrá su razón de ser en el develamiento de la razón en función de la diacronía, de un proceso o marcha lineal, continuo, con «necesidad histórica», que posibilitará que en las calas sincrónicas se obtenga la esencia de los fenómenos —acontecimientos, acciones— considerados. En esta concepción —en términos de estructuralismo a la moda— se muestra con claridad la admisión de un continuo histórico que ha de ser revelado mediante la historia enfocada, bajo el telón de fondo de dicha necesidad histórica de la razón, como un instrumento para la captación del progreso de esa razón, explicitada en la vida del universo.

Hablar, así, del estudio del hacer matemático mediante el método de calas sincrónicas que se ligan en una diacronía, podría dar a entender una concepción del tipo señalado en Hegel y que de modo explícito se ha venido rechazando en párrafos anteriores. Sin embargo, y a pesar de este peligro de equivocidad, pueden mantenerse los términos anteriores dado que este peligro se desvanece para quien tiene presente el tipo de historicidad señalado: a base de rupturas y saltos, por una parte; por otra, coexistencia de varios haceres en un mismo período, aunque presenten distintos tipos de tiempo, tipos de tiempo coexistentes, siendo alguno un tiempo futuro imbricado en un presente que parece desconocerlo, mientras que otro tiempo se encuentra imbricado en un pasado que impide su desarrollo posterior. Finalmente, cabe la utilización de calas en función de un contexto presente y no en función de una captación de esencias para lo obtenido, de esencias referentes a algún tipo de Espíritu o razón hegeliana. Utilización de calas que, junto a los dos rasgos distintivos del hacer matemático actual anteriormente señalados, obligarían a indicar que carece de sentido el preguntarse por dicha captación de referenciales que, por ambos rasgos, no se admiten como elementos propios del contexto manipulador matemático.

1.4. RUPTURAS, COEXISTENCIAS, TIEMPOS. UN EJEMPLO

Podría ejemplificarse, esquemáticamente y de momento, el hecho de las rupturas y de la coexistencia acudiendo al hacer matemático cartesiano, como un dato para la falsabilidad de la concepción adoptada. Descartes tuvo plena conciencia de que la búsqueda del hacer matemático que él había emprendido era la búsqueda de un hacer radicalmente diferente al de los aritméticos y geómetras renacentistas. Y llegó al extremo de un posible cambio de nombre para la nueva matemática iniciada, aunque se limitara en principio a designarla con el término de «matemática universal» y, finalmente, mantuviera el término «geometría» como título para la exposición de sólo alguno de los resultados obtenidos por él en este nuevo hacer, dejando para la posteridad el trabajo de obtener nuevas proposiciones —es decir, dejando para la posteridad el mero desarrollo de su nueva concepción— con el mismo «método». Pero si tenía plena conciencia de la ruptura con el hacer matemático renacentista en cuanto al tratamiento aritmético, con la geometría euclídea en cuanto al tratamiento geométrico —en el cual se liga incluso a resolver un problema clásico difícil, como el de Pappus, para ejemplo de la potencia que entraña el cambio de marco— también la tuvo con respecto al hacer matemático de alguno de sus contemporáneos; así, con respecto al hacer matemático de Pascal, con el hacer matemático que en *Introducción al estilo matemático* he bautizado con el nombre de «estilo de los indivisibles». Hacer, este último, que suele considerarse incorporado posteriormente en el Cálculo integral funcional.

Coexistencia, ruptura de tres haceres matemáticos: cósico, analítico-cartesiano, indivisibles. Con tiempos de validez diferentes, además. El hacer matemático cósico se encuentra abocado al estancamiento, a un pasado en el cual tuvo su función, su sentido, pero impotente para dar expresión a la generalidad que supone una conceptuación algebraica; el analítico-cartesiano, ligado a un futuro, pero en el marco de otro tipo de hacer, no en el meramente geométrico-analítico, sino analítico puro, al convertir la geometría sintética euclídea en funcional; el de indivisibles, tiempo presente en su momento, hasta el extremo de que, y he reiterado este hecho, constituyen los escritos de Pascal la formulación del hacer matemático «moderno» de su época en expresión de un matemático como Huyghens, base para la posterior ruptura con el mismo, con el propio hacer de indivisibles, provocada precisamente por Leibniz, estudioso de tales escritos.

Leibniz, que es quien percibe con nitidez las limitaciones de ambos haceres sin quedar en el interior de ninguno de ellos: el de indivisibles, falto de un simbolismo operativo que obliga al continuo manejo y abstracción de la figura geométrica, incapaz de dar razón, además, del cálculo diferencial ni del cálculo de integración indefinida al estar abocado a la cuadratura; el geométrico-analítico porque, con palabras de Leibniz, «no da ni las vías más cortas, ni las más bellas construcciones de la geometría», es decir, la geometría cartesiana muestra su impotencia, su limitación para tratar las cuestiones en las que intervienen relaciones de orden y posición —y no se refiere el matemático alemán a la topología como algunos han pretendido, sino a una geometría de carácter vectorial— frente a las declaraciones del mismo Descartes de que con su método algebraico conseguía resolver todas las cuestiones geométricas. Limitación puesta de relieve, por otro lado, por el propio Pascal —y de aquí su rechazo extremado del método algebraico— al construir una geometría de la posición como la proyectiva, con más de cuatrocientas proposiciones, apoyada estrictamente en lo sintético, irreducible al método cartesiano de coordenadas, limitación sin embargo que no lleva a Pascal a crear otro marco, sino a mantenerse en el sintético puro, clásico, así como a mantenerse en el marco de creación del Cálculo como hacer propio, independiente.

Las rupturas de Pascal y Descartes frente al hacer cósico y la geometría euclídea se centraban, a su vez, en las limitaciones que ambas mostraban frente a la formulación, por un lado, algebraica y, con ello, limitadas a lo concreto o aritmético; por otro, de carácter funcional, que impedían un hacer de aproximaciones —mediante series, mediante indivisibles—, por lo cual ambos matemáticos se hicieron conscientes de que debían transformar el marco del hacer matemático para alcanzar otro en el que se englobara el producto del hacer anterior pero, a la vez, que lo trascendiera y permitiera no sólo responder sino hasta plantear las nuevas cuestiones. Incluso en este aspecto cabe consignar cómo el mismo Descartes queda en un marco diferente al más funcional pascaliano, observando sin más el hecho de que a pesar del manejo de sus expresiones algebraicas y su representación geométrico-cartesiana, no percibe la funcionalidad de una relación como la existente entre la velocidad y la distancia de caída de un cuerpo —que sí «ve» Galileo, por ejemplo— con lo cual queda marginado a la elaboración del cálculo integral. Igualmente, el hecho mencionado de que Pascal se negara a utilizar el lenguaje «algebraico» para sus creaciones y demostraciones considerándolo como un medio mecánico apto para «ocultar» la verdadera marcha conceptual creadora. En contraposición, Descartes utiliza el lenguaje «algebraico» pero mediatizado en ocasiones por la simbología cósica coexistente y ello hasta el extremo de que cuando el conde Foucher de Careil publica en 1870 la copia hecha por Leibniz del trabajo cartesiano *De solidorum elementis* la traduce mal, tomando algunos signos cósicos como simples cifras, con lo cual el texto resulta ininteligible. Y sólo cuando se traducen estos signos cósicos al lenguaje algebraico, cuando se uniformiza el texto, el mismo cobra todo su sentido.

Antes de proseguir, quisiera destacar, en este mismo caso, el hecho señalado de la integración o absorción de lo que fue presente en un presente posterior, al hilo del fracaso de la traducción del texto cartesiano. El hacer en el estilo de indivisibles se ha incorporado a lo que hoy cabe calificar de Cálculo integral. Pero tales palabras no son, realmente, correctas. Quizá más preciso sea afirmar que el producto del hacer pascaliano puede traducirse al estilo, y con ello, a la práctica del posterior cálculo integral. En el hacer matemático de Pascal, tal como lo plasmó en sus escritos, el lenguaje de indivisibles era parte sustancial, imprescindible de ese hacer, al igual que las figuras geométricas que lo entornaban. Lenguaje que conllevaba una serie de ideas e imágenes que a duras penas cabe percibir hoy. Y, sin embargo, tal parte sustancial, por la que en algunos momentos se organizaba polémica contra Pascal y quienes como él lo utilizaban por estimarlos faltos de rigor conceptual, llegó a convertirse, mediante su conversión o transformación en infinitésimos, en lo que durante el siglo XVIII se calificó como «metafísica del cálculo». Metafísica que hoy se encuentra desterrada de lo que, desde nuestro hacer, es lo esencial del Cálculo. Pero este destierro entraña una elección supeditada a unas condiciones históricas que marcan su grado de validez. Con lo cual cabe afirmar que lo que se retiene, en el fondo, es únicamente aquello que en otro hacer, en otra matemática, cabe integrar, abandonando como no matemático lo que sí fue matemático en su contexto propio, convertido ahora en ideología o práctica especulativa que acompañaba a lo que desde nuestra perspectiva actual es lo esencial, lo perteneciente al plano interno del hacer matemático.

No puede olvidarse, sin embargo, que la aparición del lenguaje de indivisibles, con sus imágenes geométricas, con el método razonador cuasi-aritmético que implicaba —opuesto a un enfoque operacional y conjuntista, por ejemplo— con el método de inducción completa como nueva forma demostrativa, supuso una ruptura con el hacer matemático atribuible al hacer renacentista o cósico, con el hacer geométrico cartesiano que englobaba las representaciones por coordenadas manejadas ampliamente por los matemáticos del renacimiento.

Sólo otra ruptura, en la que se invertía la problemática pascaliana de indivisibles y, en lugar de adoptarla como mera forma de hablar que no equivocaría al buen geómetra, se ligaba con la afirmación de la realidad objetiva de los infinitésimos para anteponer el cálculo diferencial al integral —aunque el método razonador cuasi-aritmético se mantuviera, pero ahora con carácter operacional—, pudo eliminar en beneficio de un formalismo algorítmico, de un mero manipular de reglas, los indivisibles del terreno del hacer matemático, aun a costa de introducir los infinitésimos. Posteriormente, una nueva ruptura, la provocada por el empleo del concepto de límite, permitiría suprimir tanto el lenguaje de indivisibles como el de infinitésimos, así como los métodos de razonamiento con ellos ligados, procedimientos demostrativos, por un lado, para Pascal, Roberval, Barrow, Huyghens, Fermat..., por otro, para Leibniz, los Bernoulli, Euler..., que no para el matemático actual, interiorizado en otro contexto, en otro marco en el que carecen de sentido incluso dichos supuestos. Y ello hasta el extremo de que intentos como el de A. Robinson y continuadores de «resucitar» el cálculo de infinitésimos, calificando su obra como de análisis no canónico o nostandard, han de realizarse en el marco actual, es decir, en el marco formalista-inscripcionista-axiomático, donde se «resucita» en una Teoría de modelos apoyada en un lenguaje cuya base es el cálculo de predicados de primer orden con igualdad en el que expresar las condiciones de una ampliación no arquimediana del cuerpo de los reales apoyada en los conceptos de ultraproducto y ultrafiltro, y con un vocabulario o lenguaje conjuntista y algebraico ausente de los ámbitos, de los contextos tanto pascaliano como de Leibniz.

Por otro lado, cabe consignar que esta integración del hacer matemático de un contexto en el hacer matemático de otro marco de validez permite precisar los términos de Galois de que cada matemático crea lo que ya estaba prescrito en los escritos de matemáticos anteriores, aun cuando éstos no se dieran cuenta de ello. Desde un marco se «ve» lo que en dicho marco puede verse, dado que en él tiene un sentido mientras que en el contexto anterior carece del mismo, con lo cual o bien el autor o bien sus coetáneos en los que está prescrito o reconocido ni siquiera lo ven o conocen. Este punto podría tener numerosas ejemplificaciones. Así, con el mismo Galois, quien maneja la estructura de grupo, no original suya por otro lado; pero, realmente, esta estructura hoy básica no se incorpora al hacer matemático hasta la obra de Jordan, hasta 1868, que prepara la creación de Lie y Klein de 1872, en la cual dicha estructura de grupo se convierte en el eje central, en el objeto de un hacer matemático hasta entonces marginado. Si se vuelve a Pascal, cabe recordar la afirmación de Leibniz de que el matemático francés parecía tener, en ocasiones, una venda en los ojos, dado que en su obra se encontraba, explícito, el Cálculo diferencial, no conocido por Pascal sin embargo; como tampoco conoció el proceso del paso al límite, cuando de hecho cabe traducir alguna de sus proposiciones a este lenguaje sin aparentemente violentarlas. Es lo ocurrido con la atribución a Descartes del teorema de Euler de los poliedros, apoyándose en que pueden coordinarse varios textos cartesianos, coordinación sólo válida para quien ya conoce dicho teorema, reconocido en Descartes, pero no conocido por el mismo. O bien el desconocimiento de la obra de Bolzano sobre el infinito actual o sobre el Análisis hasta su clarificación posterior por la obra de Cantor, a pesar de las afirmaciones de la influencia de Bolzano sobre el hacer de Cauchy. O la creación algebraica de Poincaré, quien define en 1903 los ideales a izquierda y derecha en una álgebra, así como la noción de ideal minimal, conceptos que deben ser «redescubiertos» años después por la escuela algebrista alemana de Noether y Artin...

1.5. 'AL SERVICIO DE'

Admitir la radical historicidad del hacer matemático no resuelve, sino todo lo contrario, los problemas. Hace surgir todo un haz de cuestiones centradas en unas problemáticas epistemológicas y metodológicas. Por lo pronto, se presenta la ya implícitamente mencionada al citar las palabras de Hegel «debemos buscar en la historia...», y que no debería olvidarse nunca como propia de todo hacer especulativo, condicionado por unas previas tomas de posición —conscientes o no— ideológicas. La historia no se muestra como materia de conocimiento objetivo en la que quepa distinguir una faceta orientada hacia una finalidad extra-práctica determinada; toda ella es esta faceta. Quiero decir, en su práctica sufre la influencia determinante de unas previas concepciones del mismo carácter especulativo del contexto en el cual se hace. Lo que Hegel indica no es una excepción: aplica a la historia los rasgos característicos de toda práctica; la previa delimitación de lo que se va a buscar. Aún más, la historia se hace, en su totalidad, «en función de», una vez precisado, delimitado lo que en ella se va a buscar.

Este último punto puede ser ejemplificado precisando, por ejemplo, lo dicho respecto al extrañamiento del matemático frente a la historia de su hacer, considerándola como una práctica de distinto plano a su trabajo, extrañamiento que quizá explicara el hecho de la ausencia de cátedras de historia de la matemática. Ausencia o presencia, adscripción a uno u otro departamento o independencia, no se deben, sin embargo, por modo exclusivo, a la despreocupación del matemático individual. Inciden, en este punto, otras consideraciones y factores de los que ese matemático individual, generalmente, suele encontrarse marginado o, en el mejor de los casos, subordinado por inmerso en ellas. Ausencia o no, finalidad y objetivo de lo que en ellas se imparta, son elementos que van a depender en gran medida de factores de práctica ideológica —que en última instancia podrán explicarse por factores socioeconómicos— mostrando, de una manera clara, los compromisos de extrapolación, de desvirtuación del hacer matemático, de su adopción como instrumento para justificación de otras finalidades en cuyo marco se adecúa... El hecho no es nuevo, precisamente por esa dependencia. Pero precisamente por ella se tiene aquí una de las más claras razones de la propia historicidad del hacer matemático a la vez que la muestra de cómo el hacer especulativo en torno al mismo se hace «en función de».

Como ejemplo, puede presentarse la creación de la primera cátedra de Historia de la Ciencia en el Colegio de Francia, debida a Comte. Logro de mérito indiscutible en el plano individual, pero que revela con toda claridad una previa posición ideológica en tal creación: la avalada por el positivismo. Es esta posición la que impregna la creación de la cátedra en el sentido de la función que se asigna al contenido que de dicha historia ha de impartirse. Se quiere la historia como un arma más para la legitimización de una ideología previa: aquella que considera *la* ciencia como mero reflejo —aunque en ocasiones se diga «y motor»— del progreso humano, característico en el marco de una burguesía dominante. Reflejo de algo dado de antemano, que el individuo y la sociedad de la que forma parte ha de ir descubriendo, a retazos, para colocar a los mismos en su lugar adecuado, como el pintor ha de ir cubriendo el lienzo a pinceladas para componer un orden ya dado. Evolución y progreso se identifican. Con lo cual *la* ciencia no mostrará ruptura alguna en su desenvolvimiento, enfocado linealmente en el sentido de un continuo temporal, admitido tácitamente como necesario telón de fondo. Versión de este enfoque lo constituye la posición difusionista que quiere que todo salga de una cultura y época determinadas, mientras que otras culturas de ámbitos geográficos distintos, de tiempos diferentes, se limitan a tomarlo, desarrollarlo y, fundamentalmente, transmitirlo. Y ello siempre que tales culturas penetren en la «corriente» lineal base. Esta última ideología ha tenido y tiene aún en las historias de la matemática escritas hasta ahora un predominio casi absoluto. Es la que insiste en el *nacimiento* de la Matemática en Grecia prolongado hasta hoy. Nacimiento, evolución progresiva, aunque con estancamientos —de los que no se sabe dar razón— son términos que se han hecho lugar común, tópico y problema a explicar mediante atribución de especiales *geist* al pueblo griego, por ejemplo, como puede observarse en Spengler y en todos aquellos que, tras él, se han dejado arrastrar por el «finitismo heleno».

Si Comte puede ser paradigma respecto a la historia de *la* ciencia considerada como la explicación de la unidad de las ciencias experimentales particulares, historia que permitirá develar la unidad subyacente a las diversas ramas o parcelas en que la misma ha de ser descompuesta por la «limitación» del ser humano, impotente para captar la esencia de la ciencia en una sola visión, en un solo proceso de abstracción, paradigma respecto a la historia particular de la matemática podría considerarse la figura de Félix Klein. Y si elijo a Klein es por la influencia que ejerciera sobre Rey Pastor, quien transportaría este tipo de preocupaciones históricas al ámbito español, llegando a escribir, también él, una Historia de las matemáticas en colaboración con Babini. Para el gran matemático alemán la historia, orientada fundamentalmente como conocimiento que ha de tener el buen profesor de matemáticas, presenta un objetivo: dar razón última de la génesis de los conceptos y métodos matemáticos, génesis de carácter no epistemológico, como ocurriría en Poincaré, sino de carácter pretendidamente objetivo, con la misma pretensión con que el positivismo considera la existencia del hecho científico como algo independiente de quien experimenta y de la teoría en la cual una observación se eleva al rango de hecho. Por ello, en Klein tal génesis conlleva las dos ideas implícitas ya señaladas en Comte: la de una evolución y progreso con posibles estancamientos y aceleraciones, nunca rupturas, y la mencionada unidad de las ciencias, en el sentido de enfocar la matemática, realmente, como una disciplina de la naturaleza más, reflejo y, ahora sí —por algo escribe un matemático—, motor de las mismas. Por esta idea Klein planteaba batalla análoga a la de Comte en favor de la Historia de las matemáticas considerándola imprescindible como conocimiento, fundamentalmente en el terreno pedagógico.

Ahora bien, en realidad, se la tomaba como arma en dos terrenos. Por un lado —aparentemente el único, por más visible, incluso explícito en algunos escritos de Klein, y que sin embargo no considero como fundamental—, como arma contra un enfoque que en aquellos momentos estaba surgiendo y que era opuesto a lo que el matemático alemán consideraba que debía ser la matemática: el enfoque axiomático formalista apoyado en los trabajos de Hankel, Heine, Dedekind, Poincaré y que culminará tras Hilbert —y que es un ejemplo más de la coexistencia de dos haceres, y de dos tiempos distintos, coexistentes, uno de cierre, el que enfoca la matemática como una ciencia de la naturaleza más en íntimo enlace con los haceres empíricos, y otro de futuro, el formalista axiomático—. Y ello a pesar de la afirmación de Klein de 1921 de las ventajas de introducir un formalismo adecuado: «No se debe subestimar la ventaja que un formalismo bien adaptado aporta a las investigaciones ulteriores, en lo que aventaja, por decirlo así, al pensamiento.» Formalismo como auxiliar, que no como objeto de trabajo fundamental. Que, como tal, constituye un enfoque de ruptura precisamente con el pretendido enlace de las matemáticas con las ciencias de la naturaleza; ruptura que lleva consigo, quizá por vez primera, la toma de conciencia de la constitución de la matemática en un hacer unitario e independiente, que se convierta en el hacer denominado *la* matemática, como orgullosamente proclamará Bourbaki en 1948. Klein adoptaba la historia como defensa de una concepción de la práctica matemática que estaba, realmente, desvaneciéndose, pasando de unos marcos de validez a otros.

Por otro lado, y éste sí lo estimo fundamental, la historia se convertía en un instrumento de una concepción de vida, y de ahí el tomarla con un carácter predominante de la formación del buen profesor, y no sólo del creador matemático, y ello porque la matemática debía servir principalmente para preparar a los futuros ingenieros, arquitectos, técnicos, base y fundamento del progreso imperial de la nación alemana. Y en función de esta futura preparación Klein dirigirá —como «bonzo supremo», según llegó a ser calificado por alguno de sus alumnos, así Max Born— toda la reforma educativa alemana de las matemáticas en los primeros veinte años de este siglo, remarcando en su historia el papel que los matemáticos alemanes habían desempeñado en la evolución y desarrollo de la matemática.

Si cabe tomar a Klein como ejemplo, no puede olvidarse —hecho quizá curioso— que las matemáticas constituyen un trabajo de cuyo producto se hace historia, permanente, incluso por los propios matemáticos, como Chasles, van der Waerden, E. T. Bell, Bourbaki, Eves, los mencionados Klein y Rey Pastor...; pero, como no puede ser de otra forma, historia «en función de». Y no sólo se hace historia, sino que es uno de los trabajos de los que se hace historia primerísima. Si Platón recomendaba o exigía la composición de *Elementos* a algunos miembros de su academia, Aristóteles parecía indicar la necesidad de componer historias de dichos elementos. Y bajo su incitación Eudemo será el primero en realizar una obra de este tipo, la más antigua de la que se tiene noticia, transmitida por Proclo. Petición consecuente con lo dicho hasta aquí, dado que en tal historia se plasmará la afirmación del nacimiento en Grecia no sólo por chauvinismo heleno, sino porque la misma se enfoca como reflejo de «ciencia por elementos» que formulara explícitamente Aristóteles, y era obligado que la misma tuviera validez sólo en esos marcos de «elementos». Formulación que, por otro lado, y desde nuestra perspectiva actual, se muestra precisamente a la inversa, como mera explicitación de los marcos de un hacer matemático previo, dado que la composición en elementos se realizaba ya desde los tiempos de Hipócrates y Demócrito.

Si Proclo realiza nueva enumeración de matemáticos, lo hace por una finalidad pitagórico-platónica que consideraba, como expresión culmen de la Matemática, tal plasmación expositiva en Elementos como exigía Platón, exposición de un hacer y de una construcción con finalidad no interna, sino mística. Y lo es porque al ser Euclides platónico en sus planes, y la expresión es de Proclo, se propuso «como fin de la compilación entera de los Elementos, la coordinación sistemática de las llamadas figuras platónicas». De aquí que Proclo pueda referirse a la obra de Euclides con palabras tan claras como «es, pues, este libro purificación y ejercitatorio». Palabras en las cuales puede pensarse que se refleja, no ya el fin del mismo Euclides, sino la proyección en el mismo de la finalidad de la matemática para el neoplatónico Proclo.

En otros términos, se toma a la Historia del hacer matemático como arma especulativa que dé justificación de unas concepciones de las que no puede dar justificación directa la manipulación sígnica en sí, el propio hacer matemático en ninguno de sus dos planos, interno-ideológico.

En el momento actual, consideraciones como las anteriores se han agudizado al plantearse el problema de la historia de la matemática en términos más radicales que en épocas anteriores; podría decirse, al plantearse como problema el de la historia en sí de la matemática. Y ello tras el previo reconocimiento de la necesidad de la historia no sólo en los terrenos de una «cultura» general, o de una formación más adecuada de quien va a enseñar esta materia, sino en el propio hacer interno matemático. En otros términos, se ve necesaria la historia en función de la propia práctica teórica de la que construir tal historia. Necesidad sentida, fundamentalmente, por dos razones:

En primer lugar, y con frase de Hilbert, «la Matemática es un organismo para cuya fuerza vital es condición necesaria la indisoluble unión de sus partes». Ahora bien, la unión es difícil de sostener en la actualidad por la imprescindible especialización a la que el matemático ha de acogerse si quiere no ya crear algo original, sino dominar la parcela a la que se dedica. Y no sólo en las grandes divisiones en que puede estimarse dividida la actividad matemática actual, sino incluso dentro de cada una de ellas. Y la especialización supone el riesgo, por un lado, de separación; por otro, de impedir la intuición de analogías entre distintos terrenos, analogía que constituye uno de los más fecundos métodos de creación matemática; finalmente, de repetición de unos mismos razonamientos, con lo que supone de esfuerzo inútil, mal orientado. La historia de cada parcela, de las ideas que en ellas rigen, de los matemáticos que trabajan, permitiría evitar la desunión al dar relieve a los enlaces entre las distintas ramas, las analogías de unos y otros problemas, la igualdad de métodos constructivos... La historia en función de dar la visión de una unidad global de la práctica matemática, considerada como un organismo vivo en el que cada órgano muestra su propia unidad, su importancia relativa, pero siempre subordinada a la unidad total del organismo, unidad cuya visión corresponde explicitar a la historia.

Junto a la razón anterior, apoyada en la escisión interna del producto matemático, y que ve a la historia como amalgama para evitarla, se muestra otra razón, quizá fundamental en el marco del hacer matemático actual: las limitaciones alcanzadas en el marco de este hacer, en la práctica matemática formalista. Limitaciones que nada tienen que ver con las limitaciones de fundamentos, como pueden ser las gödelianas, y que se remiten básicamente al producto de la actividad matemática y no a ésta misma, sino limitaciones propias, internas a este hacer y que se manifiestan, por ejemplo, en el abandono de la práctica matemática por alguno de los grandes matemáticos contemporáneos, en la aridez de estilo que refleja la obra como algo ya perfecto, acabado, que admite sólo perfeccionamientos secundarios, retoques en lo accidental, por lo que la misma debe ser abandonada en beneficio de otra obra en la cual quepan las indicaciones de las vías que han conducido a la creación, las motivaciones de la misma, sus enlaces con otras creaciones... y la aparición de nuevas ideas. A pesar y, quizá, como consecuencia del gran número actual de publicaciones, se ha llegado a callejones sin salida en cierto tipo de matemática, la que gusta de la abstracción por la abstracción del sistema formal, sin auténticas ideas renovadoras. Todo ello, unido a las distintas especializaciones, ha provocado un cierto estado de paralización en el sentido de necesitar la aparición de nuevos «genios» que señalen vías nuevas, o más bien «problemas centrales» por los que discurra el hacer matemático futuro. Es decir, las limitaciones presentidas en el seno de la matemática formalista llevan a la oscura necesidad del establecimiento de nuevos marcos que den sentido a un nuevo hacer. Desde este enfoque de limitación presentida, la historia del hacer matemático se considera necesaria para hacer ver los orígenes de cada teoría y, con ello, se pretende que esa historia consiga dar orientaciones al nuevo hacer que se desea y aún no se ve por dónde o por qué problemas va a surgir. Al servicio de, una vez más, pero ahora para condicionar el futuro, para volver a las fuentes de los problemas y, con esta vuelta, encontrar problemas originales, o nuevas remodelaciones de un mismo objeto, remodelación que entraña un «nuevo» conocimiento y no un mero desarrollo.

Si la historia, desde los puntos anteriores, se ve como necesaria para el hacer matemático interno, bien como misión de unificadora de un organismo, bien como orientadora de un futuro, dicha historia se ve necesaria igualmente desde otro enfoque, externo a la práctica matemática en sí, desde un enfoque cuya base se centra en una ideología a la que ya me he referido anteriormente: la que se apoya en el ideal de un nuevo humanismo. Desde esta posición, el hacer matemático es un hacer del hombre, como tantos otros haceres, y la misión de la historia, lo que en ella debemos buscar, es el papel precisamente de ese hombre, del creador de esa práctica. Sujeto que se trasciende y que se oculta en su obra, como el artista. Pero, a diferencia del individualismo de éste, de su extraña condición de que ocultándose se muestra en tal obra por el estilo que en ella refleja, el producto matemático es un producto sin sujeto individual, sino colectivo. Es lo que he afirmado, lo que han afirmado distintos matemáticos, con el convencimiento de la validez eterna de su producto, convertido en conocimiento objetivo. El ideal de un nuevo humanismo opone a esta ausencia de sujeto individual el carácter humano —como si la anterior no lo fuera— del trabajo matemático y, con ello, pretende afirmar el sujeto individual, su enlace con las distintas prácticas tanto teóricas como técnicas. Frente a la idea de la obra expresada en forma axiomática, que se estima como petrificada e inhumana, como dando idea de una construcción independiente de quien la construye, se quiere anteponer el hombre como sujeto individual constructor, y ello en función de lo que Roger Godement, al plantearse el porvenir de la matemática hacia 1948 en su ensayo «Les méthodes modernes et l'avenir des Mathematiques concrètes», publicado en la antología de Le Lionnais *Las grandes corrientes del pensamiento matemático,* estimaba como hipótesis sobradamente justificada por sus consecuencias, «la unidad del espíritu humano y de la naturaleza», por lo cual el trabajo de Hilbert se puede poner en relación con el de Perrin o el de Monet, Debussy y Proust, por ejemplo. Todos ellos «trabajaban en el mismo principio, que también será el del porvenir: el conocimiento del universo total». Y si de Proust, Debussy, Monet, lo que puede interesar no es solamente su obra, sino su vida, sus pensamientos, sus relaciones y concepciones acerca tanto de su obra como de otros campos, también debe preocupar de un matemático como Hilbert lo mismo y no quedar relegado a un nombre tras unos términos como «teorema de», «proposición de», «espacio de»..., sin más referencia. Naturalmente, con este enfoque, la consecuencia es que la historia del hacer matemático no debe limitarse a una narración de descubrimientos sino que ha de hacerse en función de una cultura «humanística», desde un terreno que en terminología algo anticuada cabría calificar de perteneciente a las «ciencias del espíritu». Pero, con ello, lo que se logra es perder la autenticidad del trabajo matemático. La necesidad de la historia se muestra, así, como una necesidad no interna sino externa, en función de una ideología de clara raíz utópico-mesianista, influida por las consideraciones del papel «humanístico» que la ciencia debe poseer frente a la pura y estricta técnica maquinista que, para algunos, ha hecho desaparecer al hombre. Se enfoca como un sustituto del viejo papel que han mantenido bien las ideas religiosas, bien las filosóficas como concepciones del mundo y que hoy se encuentran desgastadas.

1.6. «DEBEMOS BUSCAR EN LA HISTORIA...»

Es claro que la necesidad de la historia, siempre en función de, condiciona algo tan fundamental y hasta ahora no abordado aquí: aquello que debe buscarse en tal historia; es decir, el objeto de la práctica especulativa histórica.

Si se parte del condicionante ideológico del nuevo humanismo, el objeto de la historia del hacer matemático, del trabajo matemático, parecerá centrarse en la vida y época de aquéllos que se han considerado matemáticos; biografía de todo aquello que, en el fondo, es ajeno a la práctica interna matemática. El ensamblaje con el conocimiento objetivo producido en el trabajo matemático se muestra, realmente, difícil dado que la objetivación de ese producto, de ese conocimiento, se muestra independiente de quien lo produce. Se recaería en la justificación del trabajo creador matemático de Pascal referente a la cicloide, con la creación de la integral definida, por su dolor de muelas, como quería su hermana en la biografía justificadora de la *libido sciendi* pascaliana... Justificación quizá apta para otros contextos, si es que lo es para alguno, pero no para el matemático.

Si se parte del condicionante de la necesidad interna matemática, necesidad actual, y se enfoca bien como amalgama bien como posible orientación y búsqueda de problemas viejos para enfocarlos como nuevos objetos a resolver, la historia del hacer matemático, su objeto, se centrará en los temas considerados como centrales de dicho hacer. Es decir, no ya en la adquisición, en el producto de cada rama o especialidad matemática —esto sería «hacer» matemática o más bien reconstruirla— sino en la evolución de cada tema propio de dichas especialidades o ramas, en la evolución de su concepción, aunque esto suponga, desde luego, o bien el previo conocimiento de tales temas o bien la indicación sumaria de los mismos. Con lo cual el objeto de la historia de la matemática se centraría en la estructura de esta misma evolución de concepciones, estructura del progreso de cada una de las concepciones de la materia considerada. Naturalmente, la afirmación de estructura se hace a posteriori, porque la misma sólo surge mediante la elección de los hechos que el historiador considera como más sobresalientes y no mediante la mera yuxtaposición de datos. La afirmación de que tales concepciones constituyen una estructura es una concepción calificable de recurrente en el sentido de Bachelard. Ejemplo de este tipo de historia interna —en la cual desaparecen los motivos «humanísticos» queridos por el anterior enfoque— se tiene en *Elementos de historia de las matemáticas,* sin más unidad orgánica que el haber sido «notas» históricas a cada capítulo de los *Elementos,* de Nicolás Bourbaki, o en el reciente *Cours de géométrie algébrique. Aperçu historique,* de Jean Dieudonné.

Ahora bien, estos análisis únicamente tienen presente el aspecto interno del hacer matemático desde un pretendido marco objetivo actual, válido para siempre, por lo que son claramente parciales. Parcialidad en la que muestran su propia limitación. Básicamente, si se pretende que el objeto de la historia de la práctica teórica matemática estriba, como indica Morris Kline —en una magnífica *Historia del pensamiento matemático* en cuanto a documentación, y en la que se traduce al inglés a veces textos completos de los *Elementos de historia,* de Bourbaki, sin más referencia o entrecomillado, lo cual se justificaría únicamente si Kline fuera uno de los redactores de Bourbaki—, en explicar las ideas centrales de ese hacer, poniendo especial énfasis sobre aquellas corrientes de actividad que más han durado e influido en la actividad matemática posterior, se estará haciendo una historia condicionada por la imagen de un continuo temporal lineal que explícitamente rechazo en los parágrafos anteriores, rechazando igualmente el apelar al «hecho histórico objetivo», porque éste es mera consecuencia de la previa toma de postura que adopte el historiador. Desde este enfoque, esas «ideas centrales» lo son en cuanto su coronación es el estado presente, en el cual alcanzan su sentido, su justificación de temas básicos en un hacer determinado, con lo cual lo único que esta posición manifiesta es la falta de perspectiva para situar en su marco histórico —y, meramente, insisto en lo ya dicho— lo que le corresponde. En otras palabras, la gran limitación de esta posición interna, parcial, del objeto de la historia de la matemática como la de las grandes ideas, se encuentra en no reconocer el hecho de los marcos de validez de cada una de dichas ideas o temas, de las teorías que se analizan. Marcos de validez que dan sentido a los dos grandes apartados de toda práctica teórica matemática: hacer interno o intrínseco-ideología que posibilita y condiciona tal hacer o trabajo. Y ello a pesar de que la existencia implícita de estos marcos de validez, de las rupturas epistemológicas que permiten la creación de otros marcos, se encuentran implícitos en esas historias o en palabras como las mencionadas de Godement, parafraseador de Denjoy, o en la afirmación de que junto a la historia de las grandes ideas o temas también deba historiarse lo que los grandes matemáticos pensaron acerca de lo que estaban haciendo, ya en cuanto a los fundamentos —desde el enfoque actual, como sistema de principios, nociones comunes y métodos de «su» hacer—, ya en cuanto a la situación especial respecto a otras disciplinas, respecto a la «realidad». Elementos que, claramente, no pertenecen a la práctica intrínseca pero que, al no reconocerse como tal, queda enmascarada y, con ello, mezclada en cuanto al objeto propio de la historia del hacer matemático.

De aquí la afirmación de que únicamente calas sincrónicas permitirán barruntar el tipo de hacer de cada período para el cual tenga sentido dicha cala. A la vez, supone el claro reconocimiento de que lo captable en las mismas va a depender, esencialmente, del contexto de quien realiza las calas sincrónicas en las cuales no podrá captar lo que de auténtico hacer objetivable se tenía en el presente para el cual se realiza la cala sincrónica. En otras palabras, únicamente tendrá carácter de hacer matemático aquél que cobre sentido, que pueda subjetivarse en el yo colectivo desde el presente en el cual se enfoque el pasado. Extrapolación en cuanto a la intervención del experimentador en el experimento, para fijar con términos de ciencia experimental la imposibilidad de una cuestión por el ser del objeto puro sin intervención de quien trata de aprehenderlo. Y, a la vez, la afirmación de que el objeto de la historia a considerar no puede estimarse como algo clausurado de una vez para todas, sino que depende de los contextos históricos en los cuales se haga dicha historia. Si se hace la historia de unas concepciones, habrá que precisar a la vez las limitaciones que las mismas muestran para el ulterior desarrollo y, con ello, se mostrará la necesidad interna de la ruptura siguiente, mostrando que el hacer matemático no puede concebirse como saturado, sino abierto, nunca clausurado.

Desde este enfoque, la práctica que conlleva la historia del hacer matemático no es un hacer matemático. Sin embargo, cabe afirmar que es una práctica que debe ir imbricada en ese hacer, por pertenecer al plano ideológico que lo posibilita. Y ello aceptando las razones de la necesidad interna anteriores, tanto de amalgama como de búsqueda de problemas para un hacer nuevo, pero sin la parcialidad de quedarse en la mera descripción interna. De esta forma el objeto sería, por un lado, la historia de los descubrimientos internos, así como los métodos válidos en cada marco; por otro, las ideologías tanto individuales de cada matemático como del contexto en que en una época se mueven y que condicionan esos marcos, con la historia de las concepciones que de su hacer se hacen, remarcando las limitaciones que las mismas imponen al trabajo. Es, desde este segundo componente, desde el cual cabe la posibilidad de incluir algún rasgo especial o característico de aquél o aquéllos matemáticos que dejan su impronta en su oficio, y a causa, básicamente, de hacer más ligero el estilo...

En plano quizá secundario, aún no menos importante, respecto a la problemática que el objeto de la historia presenta, se encuentra un haz de repercusiones y consecuencias —motivadas por las tesis sostenidas hasta aquí— no sólo en el interior de la práctica matemática, sino incluso en contextos como los sociológicos, didácticos..., en los que se ejecuta el trabajo matemático. Consecuencias y repercusiones a las que volveré posteriormente y que permitirán situar el lugar propio de la práctica especulativa histórica. Ahora, brevemente, cabe plantear la cuestión acerca de quién debe ser el sujeto productor de la historia del trabajo matemático. Según lo dicho respecto al aparente extrañamiento del matemático frente al nivel de la práctica teórica de su historia, no parecería ser el matemático el más indicado para hacer la historia de su trabajo. En este punto incidiría, además, la consideración de que si el hacer matemático se considera como un trabajo, afirmar que debe ser el propio matemático el historiador de su oficio, equivaldría a admitir que es el minero el más indicado para hacer la historia de la minería. Sin embargo, desde el enfoque que quiere la historia en función de una necesidad no meramente cultural o especulativa sino interna, dicha necesidad obliga a que el autor, el trabajador de la historia sea, en este caso, matemático. Aunque la especialidad del mismo se oriente no ya a la creación interna pura, sino a la de fundamentación de la misma, enfocando su trabajo como una especialización como las demás, al estilo del topólogo, del algebrista, del geómetra diferencial o algebraico...

RUPTURAS EPISTEMOLOGICAS

2.0. NO LINEALIDAD DEL 'CRECIMIENTO' MATEMATICO

Una de las tesis planteadas en el capítulo anterior se centra en la afirmación de que la práctica teórica matemática no se desarrolla de manera continuada, sino a base de saltos o rupturas epistemológicas. Se sostiene que hay distintos haceres matemáticos, con tiempos distintos, métodos diferentes, en marcos de validez propios, coexistentes algunos entre sí, pero con tiempos distintos. Equivale, esta tesis, a negar la idea de un crecimiento lineal continuo, idea que ha llegado a plasmarse incluso en imagen gráfica de curva exponencial o al menos de curva en S. Continuidad y crecimiento que no creo adecuados para reflejar el proceso de creación matemática ni en su aspecto individual ni en su aspecto de aporte colectivo, enfocado este último como un hacer único a lo largo del tiempo.

En apoyo de esta tesis, además de lo ya expuesto, cabe consignar que, frente a la imagen del desarrollo exponencial, pueden realizarse varias consideraciones. Si se toman como obras matemáticas todas aquellas que llevan en su título ese término o alguno de los ligados con ese hacer, sin otro criterio, entonces cabría aceptar la existencia de dicha curva, en paralelo a la curva demográfica mundial. Es lo aceptado por autores como Price al plantear una problemática metacientífica, la de la posibilidad de una ciencia de la ciencia que tenga en cuenta fenómenos como el anterior —y que más que al contexto matemático pertenecería a contextos como los sociológicos—. Ya, en España, había adoptado una actitud calificable de semejante un polígrafo como Menéndez Pelayo al hacer inventario de publicaciones 'matemáticas' españolas en la Polémica de la Ciencia Española. Al tomarse el trabajo de ver las mismas y no solamente los títulos sino el contenido, tanto un matemático como José Echegaray como, más fundamentalmente, Rey Pastor, con criterio no de recopilador de títulos, sino estrictamente matemático, consideraban tales obras en el mejor de los casos como simples manuales y, en los demás, quizá los más numerosos, como meras recetas para sastre... La masa de títulos y no el criterio en cuanto al contenido, se muestra como clave para sostener el crecimiento exponencial y la continuidad de un hacer, aunque de hecho un mismo término haga referencia a materias distintas en diferentes marcos.

Actualmente, en apoyo del crecimiento exponencial, cabe consignar el rápido aumento en el número de páginas de revistas de carácter bibliográfico como *Mathematical Review*, pero en las cuales ciertas reseñas se muestran superabundantes por la nimiedad del contenido de los trabajos originales reseñados. Podría buscarse la explicación de este fenómeno en el hecho de que el matemático se ha convertido en un profesional más que gana su salario «investigando»; reflejo de tal investigación, los ensayos y, cuantos más publique, más sólida será su posición, más beneficio obtendrá en forma de contratos de enseñanza, becas... Este afán de publicación, mera fórmula para poder vivir como profesional, conduce a la proliferación de notas, de artículos nada originales, sino meros desarrollos de un teorema, de una zona ya elaborada pero que cabe considerar desde otro enfoque... Así, las publicaciones reflejan no ya una auténtica creación con ideas originales, sino la necesidad de obtener un título o un salario que mantenga un cierto estatuto profesional. De ahí la proliferación de las publicaciones en la actualidad, frente a las comunicaciones particulares, a las cartas en épocas anteriores.

Ahora bien, si se buscan criterios «objetivos» en cuanto al contenido, con independencia del título, aparece claro que dicho criterio objetivo, único y válido para realizar una delimitación entre lo que es y no es producto matemático, entre lo que puede tener una repercusión o no en el hacer futuro, no existe. Cabría admitir tal existencia desde el rigor, la verdad, el método y contenido de un marco determinado, pero que pueden no serlo en otros marcos. Con nítida visión Galois reflejaba esta idea en el escrito que deseaba como único Prefacio de su obra indicando que hasta el impresor creería que sus ensayos no eran «matemática» por contener excesiva literatura frente a los desarrollos algorítmicos propios del estilo en que se reflejaba el hacer matemático de un marco existente en el cual no se encontraba inmerso Galois ni su obra... Pero años antes una creación como la de Monge, plasmada luego en su *Tratado de geometría descriptiva,* no llegaría a ser considerada como aporte matemático sino de ingeniería militar, por lo que se estimó debería mantenerse en secreto durante diecisiete años, en los cuales ciertamente fue desarrollada y perfeccionada en la Politécnica francesa, pero siempre como una herramienta no matemática. Elevada posteriormente, y por la recreación de la Geometría proyectiva, al rango de disciplina matemática, la Geometría descriptiva ha vuelto a desaparecer del contexto matemático, a pesar del nombre. De modo análogo, una obra como la de Luca Pacioli en la que recoge los problemas de della Mirandola, y que constituye una de las grandes plasmaciones del hacer matemático cósico, desde nuestro hacer es difícil mantener como obra matemática, ni siquiera como reliquia histórica. O, para ser más actuales, el hacer matemático reflejado en el Cálculo diferencial e integral elementales, que para algunos constituyó y sigue constituyendo, con la Geometría proyectiva, «toda» la matemática, podría muy bien enfocarse hoy día como un hacer no matemático, sino como una herramienta para otros haceres, ciertamente, pero no como un objeto matemático en sí, al que deba prestarse demasiada atención.

Las publicaciones acerca de estos temas quedarían a un lado, o deberían quedar, al igual que los manuales de divulgación —lo que no implica que los mismos sean inútiles, sino todo lo contrario, ya que son imprescindibles, como son imprescindibles los textos de enseñanza media que no se estiman, sin embargo, obras reseñables—, o las múltiples tesinas y tesis que se elaboran por año —imprescindibles para la obtención de títulos y, con ello, de prebendas de profesionalidad—. De la curva exponencial se suprimiría, de esta manera, la condición de exponencial. Y si se atiene, además, al hecho de los marcos de validez, la propia idea de continuidad también desaparece, aceptándose, en todo caso, la existencia de la campana de Gauss para cada uno de los marcos, llevándose la representación más que a gráfica plana, a espacio E_3...

El criterio de la mera publicación no es, en ningún caso, criterio objetivo válido para apoyar tesis alguna de crecimiento y continuidad; es criterio apoyado en el mito de la ciencia como recopilación de «hechos», en este caso de datos inconsecuentes si no vienen tamizados, si no se convierten en tales hechos científicos por una teoría previa desde la cual quepa consignar que, de modo efectivo, y a pesar de lo que ya he dicho antes respecto a las grandes ideas, éstas se deben en general a un muy escaso número de matemáticos, mientras que los demás se limitan a asimilarlas, desarrollarlas, divulgarlas... y hacerlas apoyatura para su profesión.

Lo que sí cabe consignar es que el trabajo matemático va dando tumbos de un lado a otro, como diría Galois, sin plan preconcebido o finalidad que de antemano permita prever el futuro, dado en general por la propia dinámica de la creación, del trabajo, aunque esta dinámica permita, al dar una mirada atrás, y desde la perspectiva de otro contexto, observar que esos tumbos han conducido a un resultado común y, con ello, permita afirmar, permita sostener la ilusión de que las distintas concepciones de cada momento tenían una estructura objetiva. Hay cortes, rupturas que conducen, desde la estructura dada, a nuevos haceres provocando la variación de los cuadros de validez, y de tiempo, en que una determinada matemática es adecuada. Rupturas que no se centran por modo exclusivo en el manejo de nuevos objetos matemáticos, sino en una nueva manera de manejarlos, de plantearlos como problemas; enfoque que conlleva su cohorte de perspectivas epistemológicas y ontológicas distintas y que da paso a otros tipos de hacer, a otras matemáticas. Ello implica que, a veces, dada la aparente permanencia del objeto —entre otras cosas porque aparentemente es englobado, incorporado en la nueva forma de trabajar— parezca existir una «continuidad» temática y el nuevo hacer no se vea más que como una prolongación del anterior fundamentalmente para quien está inmerso en uno de ellos. Es, por ejemplo, la postura que en recientes polémicas en torno a la «matemática moderna» sostienen algunos matemáticos sin ver que, de hecho, tal nueva matemática existe en su aspecto epistemológico, aunque naturalmente parte del objeto que se maneje y de los problemas que se pretendan resolver en los haceres «clásico» y «moderno» parezcan el mismo.

La tesis mantenida de la no linealidad, de la no existencia de un único hacer matemático cabe defenderla recurriendo a la historia para su confirmación. Historia que, una vez más, se hará en función de, al servicio ahora de mostrar tales rupturas. Procedimiento no convincente para quienes sostienen o un logicismo a ultranza o la desconfianza apriorística del recurso a la historia. Y, sin embargo, plenamente válido al menos para crear frente a la creencia en la categoría primaria de la deducibilidad lógica, una cierta creencia en el trabajo científico hecho a base de intuiciones, analogías, nociones plausibles que, a lo largo, llegan a convertirse en teorías internas con la misma necesidad y coherencia internas que las creencias actualmente sostenidas en la deducibilidad y necesidad lógicas.

Pero, al recurrir a la historia, y por lo ya expuesto, no se admite la existencia de la «historia objetiva» independiente de quien la realiza y del marco en el que se encuentra quien la realiza. Al recurrir a la historia se convierten en hechos aquéllos que las previas hipótesis de trabajo quieren que se conviertan en tales hechos, confirmadores —o negadores, en cuyo caso habría que variar alguna de las hipótesis previas de trabajo— de lo obtenido de modo absoluto, dialécticamente. Proceso idéntico, si se es consciente, al que ocurre en las ciencias experimentales, donde la teoría previa —cargada, por supuesto, de ideologías y no sólo de trabajo intrínseco— es la que decide el experimento a realizar y aquello que en dicho experimento debe ser observado y cómo debe ser interpretado.

Desde esta posición se van a considerar en lo que sigue varios momentos como instantes de ruptura del hacer matemático, de corte. A partir de esos instantes, el hacer matemático anterior vendrá a ser calificado de «clásico» frente a la «modernidad» del nuevo enfoque del trabajo matemático. Clasicismo y modernidad como términos relativos... dado que el conocimiento teórico propio de un hacer, propio del momento de ruptura, pasará a convertirse en mera ideología posterior obteniendo el consentimiento acrítico de quienes se ven envueltos por la misma, consentimiento que se convertirá, a su vez, en resistencia a aceptar unas nuevas formas de hacer que conducen a nuevos conocimientos objetivos, «modernos».

Los momentos de ruptura a considerar serán tomados como mera ejemplificación, quedando marginados haceres como el heleno —con sus tres muy distintos contextos: pitagórico, platónico, arquimediano—, el hindú o el producido a comienzos del siglo XVII y al que me he referido como ejemplificación en 1.4. La ejemplificación no puede ser, salvo pedir su ausencia, completa de aquello que se ejemplifica. Por otro lado, las fechas, no pretenden ser hitos, de ahí que vayan precedidas del término «entorno». Además, y por los mismos motivos, cada momento elegido es sólo una muestra, no pretendiendo este capítulo ser una historia en sí plenamente desarrollada, por lo cual las creaciones intrínsecas se dejan realmente marginadas, prestando más atención a las «concepciones» en cada instante, sin detenerme en el «desarrollo» de las mismas, concepciones que en algunos casos irán precedidas del término «problema» para destacar el hecho de que, en general, el objeto matemático viene constituido, básicamente, por problemas que suelen ser muy clásicos pero que, al transformarse por un nuevo planteamiento, por su inversión, provocan la aparición de un objeto «nuevo», de un problema nuevo, desde el cual se permite la explicación de la irresolubilidad, de la limitación en el planteamiento del anterior. Es la apoyatura a la tesis de que el objeto del conocimiento matemático puede seguir siendo, aparentemente, el mismo, pero que de hecho se hace otro con el nuevo cambio de visión, cambio sólo posibilitado por la fabricación de un marco en el que el mismo tenga sentido.

2.1. ENTORNOS DE 1827

En 1827 muere Laplace. Cien años antes, Newton. Coetáneo de Laplace, Lagrange se había permitido sostener que muy poco quedaba por hacer en la Matemática, disciplina abocada al cierre, frente a la física y la química, que reemplazarían a la matemática como ciencias exactas, regidoras del pensamiento futuro; con sus palabras, referidas básicamente a la geometría, en carta a d'Alembert de 21 de septiembre de 1781, «Me parece también que la mina es ya demasiado profunda, y que a menos que se descubran nuevos filones, será necesario abandonarla más pronto o más tarde.» Ideas consecuentes con la situación especial del marco en el que se encuentra inmerso Lagrange —además de su propia situación de abatimiento personal en las fechas de esta carta—: íntimo amigo de Lavoisier, como Monge lo será de Berthollet, creadores de la ruptura de la química con la alquimia; posteriormente inmerso Lagrange, como Monge, en resolver las necesidades que la Revolución creó en cuanto a la pólvora y la fundición de metales para las armas, o las fortificaciones y la balística que llevaron a una República, realmente, de científicos. Comparando ambos genios, Laplace-Lagrange, un matemático-científico como Poisson se inclinaría ante Laplace considerándolo no sólo matemático, sino, más aún, filósofo, por su condición de físico y por haber llevado a lo que hoy calificaríamos de extremado dogmatismo el cuadro espacio-temporal mecánico de Newton, por haber eliminado incluso del resumen de su obra magna todas las fórmulas matemáticas. Laplace suponía el culmen del científico matemático a lo Newton.

Desde este cuadro, Lagrange tenía razón: la matemática que él había vivido y desarrollado, que incluso había intentado variar, como en los terrenos del Análisis donde pretendió, sin éxito, suprimir las llamadas a los infinitésimos, se encontraba total y absolutamente limitada, por encontrarse abocada al mero desarrollo algorítmico en función de la mecánica celeste, de los problemas de la física como la conducción del calor... Pero también se encontraba abocada a la desaparición la forma de vida del matemático a su propio estilo, ligado a la política o dependiendo del favor de los nobles, sin ocupación o profesión delimitada, salvo la de Académico. En los entornos de 1827, el matemático se profesionaliza como tal en su vertiente de enseñante, en la función preponderante que alcanzarán las Universidades, la Politécnica en París. De modo simultáneo surgirán las revistas dedicadas a sólo la matemática, como la fundada por Gergonne o como la más permanente, aparecida en 1826, el *Journal* de Crelle, donde el primer año se publicarán seis ensayos de Abel y cinco de Steiner, seguida después por el *Journal* de Liouville...

Alrededor de esta fecha, en los entornos de la misma, se produce un cambio de mentalidad en el hacer matemático, que rompe con los moldes, con las limitaciones sentidas por Lagrange, aunque los matemáticos que provoquen la ruptura se hayan formado, precisamente, en los trabajos y enseñanzas de Lagrange, Laplace, Euler, Legendre... Cambio, ruptura radical con el cuadro existente. Y que provocará la aparición de distintos haceres manifestados en distintas disciplinas. Todos ellos como reacción frente a un hacer matemático que se verá «carente de rigor», carente de demostraciones, acrítico; reacción que puede centrarse en la divisa plasmada por Abel, *hallar la razón,* por una parte, mientras que por otra se apoya en un proceso que puede calificarse de sorprendente desde el enfoque que quiere para la matemática un desarrollo orgánico, lineal: el proceso de *inversión.* Alcanzados los límites en el hacer matemático, tales límites impiden dar razón de unos problemas a la vez que de sí mismos; impiden dar explicación del por qué resultan infructuosos los métodos de resolución frontales de algunos problemas. La inversión reside, entonces, en variar tales métodos frontales de atacar los problemas matemáticos, partiendo de lo que parece inalcanzable para dar razón del por qué pueden o no resolverse. Y, al hacer esta inversión, los matemáticos no tienen otra opción que la de crear nuevos instrumentos, haciendo que el objeto, el problema parezca el mismo pero sea diferente en cuanto enfocado desde otra perspectiva; los matemáticos no tienen otra opción que crear una matemática «moderna».

Que la reacción se haga en nombre de «hallar la razón» puede comprobarse sin más que empalmar frases de matemáticos como Abel, Galois, Lobatchevski..., frases de sus cartas, diarios o manuscritos y que, por ello, obligan a admitir el desconocimiento entre sí de estas manifestaciones, además del hecho de que, en realidad, fueran ajenos los mencionados entre sí. Frases que muestran el nivel ideológico en el que estos matemáticos, jóvenes, se mueven, nivel ideológico que condicionará en gran medida su actividad intrínseca, el modo en el que se liguen al propio hacer matemático. En carta a Hölmboe de enero de 1826, Abel manifestará claramente que su objetivo se centra en «hallar la razón» por la cual operando con formas no sancionables por el rigor deductivo se logran resultados correctos, dado que no hay, en la matemática del momento —la plasmada en los libros de Lagrange, Euler, incluso Cauchy...—, auténticas demostraciones: «No creo que podáis citar muchos teoremas en los cuales aparezcan las series infinitas y donde no pueda hacer a la demostración objeciones bien fundadas. (...) La misma serie del binomio no ha sido derivada rigurosamente.» El hacer matemático se plasma, según estas palabras, en meras conjeturas sin demostración auténtica, fundamentalmente en la Matemática superior, el Análisis, lo cual sorprenderá a la mayoría de las personas, agregaría Galois, porque de todas las demostraciones «ninguna de ellas, sea del tipo que sea, merece llamarse una demostración matemática en el completo sentido de la palabra, y sólo se pueden tomar como aclaraciones», escribiría Lobatchevski.

Si hallar la razón es un imperativo, el mismo entraña un cambio en la orientación metodológica: frente al desarrollo algorítmico en función de las aplicaciones a las ciencias, en función del desarrollo en serie por el desarrollo en serie, se alza el intento de buscar la razón interna que posibilite ese desarrollo, sin aceptarlo acríticamente, aun cuando muestre, posteriormente, su interés respecto a posibles aplicaciones. El cuadro metodológico varía, así, con Abel, Galois, Jacobi, Lobatchevski, Peacock, Cauchy, Poncelet... de manera radical. Elemento interesante a considerar, por otro lado, que estos mismos matemáticos busquen el apoyo «popular» mediante la publicación, la difusión de ensayos en revistas y no sólo de especialización, no sólo para el matemático profesional o puro que surge en estos momentos, sino para «el hombre de la calle». Creación de revistas que, a veces, como en el caso de Galois, no llegan a plasmarse en obra hecha, quedando en mero intento de encontrar un medio, no académico, de difundir las «nuevas» ideas frente a las «clásicas».

Si el nivel ideológico conduce a la inversión como método, el mismo permitirá la aparición de unos grandes contextos, al principio separados, coexistentes y con tiempos diferentes las disciplinas, los productos que en ellos se fabrican.

2.1.1. Problemas clásicos: Algebra y Análisis

Ligándose a un problema clásico algebraico, el de hallar una resolvente para la ecuación de quinto grado, Niels Henrik Abel pretende, a los diecinueve años, haber encontrado la solución. Es problema abierto desde que Tartaglia y Cardano dieran el método algebraico para hallar la solución de la ecuación de tercer grado y Bombelli la de cuarto. Problema abierto en los terrenos del álgebra, quien lo resuelva logrará fama imperecedera, y de aquí que casi todo joven matemático trate de encontrar la solución. Pero tantos años de esfuerzos indican, mera conjetura, que la resolvente es imposible de hallar, por lo que algunos matemáticos, así Gauss, ni se dignarán estudiar las posibles soluciones que le envíen, convencidos de que el error habrá de encontrarse más o menos oculto en tales soluciones. Y Abel encontrará, efectivamente, el error en su propia demostración. Encuentro crítico afortunado, que le conducirá a un giro radical en el planteamiento del problema: en lugar de buscar una resolvente directa, al estilo de lo utilizado en las ecuaciones de grado anterior al quinto, buscará, en primer lugar, la forma de la expresión algebraica que puede satisfacer a una ecuación de quinto grado, logrando un resultado capital, todos los irracionales que entran en la expresión pueden formularse en función de las raíces. De aquí, segundo paso —y sigo la marcha de la memoria original de Abel—, es preciso que permutando las raíces, el irracional tome todos sus valores pero, por un teorema demostrado por Cauchy y que establece que el número de valores de una función racional de grado n no puede ser inferior al mayor número primo contenido en n sin ser 1 o 2, resulta que la función racional de grado cinco no puede tomar más que los valores 2 o 5. Como ninguno de estos valores la satisfacen cabe concluir: la ecuación de quinto grado es imposible de resolver algebraicamente.

Abel ha invertido el problema. Y, con ello, ha dado razón del por qué eran infructuosos los intentos de los algebristas tanto en esta ecuación particular como en las de grado superior. Hasta el momento en que Abel rompe la pregunta ésta se había hecho en términos parecidos a: ¿Cuál es la resolvente de una ecuación de quinto grado, algebraica? La rotura se produce cuando se transforma en: ¿Qué condiciones han de cumplir las raíces de una ecuación para que ésta tenga solución? El simple cambio de planteamiento indica que se encuentra ya en otro plano, porque aunque Abel maneje las «permutaciones» de las raíces, estas permutaciones responden a algo mucho más importante, y que corresponderá poner de manifiesto a Galois: responden a la estructura de grupo. De aquí que el teorema mencionado de Cauchy indicaría que un grupo simétrico de cinco elementos tiene todos sus subgrupos de índice cinco salvo el alternado que lo tiene de índice dos. Es la razón de la imposibilidad de resolver algebraicamente la quíntica. Es la razón que imposibilita la pregunta original, por lo que ésta carece de sentido por el cambio metodológico que la inversión de Abel entraña. Inversión que cierra todo un capítulo de búsquedas, en el fondo aisladas, y que por este aislamiento la pregunta original, aun si hubiera tenido respuesta, habría carecido de trascendencia auténtica. Trascendencia obtenida para el hacer matemático por el cambio de enfoque que conduce, no sólo en el plano metodológico sino también epistemológico, a un cambio en el contenido, en el objeto de la propia *álgebra.* De ser el estudio de la resolución de ecuaciones, tendrá que variar su objeto para convertirlo, de momento, en el estudio de las permutaciones, de los grupos de sustituciones a que las raíces de una ecuación tienen que verificar, así como al estudio de los invariantes algebraicos que tales permutaciones ponen de relieve. Cambio de objeto con una limitación, por otro lado, por concreción. El objeto de estudio del álgebra tendrá que romper con el propio término de ecuación y pasar a convertirse en el estudio de las estructuras como la de grupo, como la producida al combinar dos o más de dichas estructuras, como la de campo o cuerpo. Pero es limitación que pondrá de manifiesto una ruptura posterior.

El éxito obtenido con el cambio de planteamiento explica el programa de Abel de hallar la razón y que le lleva a demostrar lo que aparentemente estaba demostrado, en otro problema calificable, igualmente, de clásico: el binomio de Newton. Y que Abel, en este caso, y en carta, plantea en los términos: «Hallar la suma de la serie

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \dots$$

para todos los valores reales e imaginarios de x y de *m para los cuales la serie es convergente.*» Y subrayo estos últimos términos porque precisamente el hacer matemático anterior —representado básicamente por Euler pero también por Lagrange, Legendre, Laplace...— se centraba en la búsqueda de procedimientos algorítmicos —analíticos, como se los denominaba—, desarrollos en serie de funciones sin plantearse el problema de la validez o no de los mismos, sin plantearse la admisibilidad o no de dichos desarrollos según fueran o no convergentes. Planteamiento carente de sentido por previamente admitido como válido. Nuevamente, la inversión. Y, nuevamente, esta inversión abre perspectivas en los terrenos del Análisis; entre otros, convertir en problema el tema de la convergencia y, con ello, obligar a la creación de los «criterios» para obtener dicha convergencia. Problema, entre otros, inexistente en el hacer matemático del marco anterior a la inversión.

Siguiendo con Abel para ejemplificar la inversión en los terrenos del Análisis, cabe consignar que la misma le conduce a una de sus más geniales creaciones, en los entornos de 1825, aunque se plasme en sucesivas publicaciones que llegan hasta 1829, en que se edita la memoria que contiene el «teorema de Abel»: las integrales abelianas, ligadas a las integrales elípticas. Podría señalarse que el origen del problema se centraba en el estudio de las integrales eulerianas de la forma $\varphi(x)=\int_0^x \frac{r\,dt}{\sqrt{R(t)}}$, donde r es una función racional y $R(t)$ un polinomio de grado 3 o 4; integrales que expresan bien la longitud de un arco de elipse —de ahí el nombre de elípticas, como en el caso $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ — o bien el arco de una lemniscata —figura geométrica que aparece, precisamente, en el borrador parisino de Abel como signo equivalente al «eureka» arquimediano—. Euler había demostrado que, en el caso particular mencionado de la elipse se tenía una igualdad de la forma $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(z)+C$, con C función racional de x,y, o bien suma de una función racional y una logarítmica de x,y. Igualmente había conjeturado la imposibilidad de generalizar la expresión cuando $R(t)$ era un polinomio de grado mayor o igual a cinco. Conjetura, pero sin dar razón de la misma.

Abel se sitúa, de entrada, en un plano de mayor generalidad, invirtiendo el problema y partiendo de la igualdad obtenida por Euler como final, es decir, y en paralelo a la pregunta de la quíntica, se plantea como problema «hallar entre ellas [entre un número cualquiera de integrales de la forma general dada] todas las relaciones posibles que puedan expresarse por funciones algebraicas y logarítmicas». Para lo cual ha de cambiar el objeto y en lugar de considerar $R(t)$ como mero polinomio lo enfoca considerando que y es función algebraica de x, que «podrá expresarse de una manera cualquiera *explícita* o *implícitamente* con la ayuda de funciones algebraicas y logarítmicas»; es decir, y aparece como función de x —además de que surge el problema de las expresiones o funciones implícitas y explícitas y su conversión— mediante una ecuación polinómica $F(x,y)=0$, que en lenguaje geométrico-algebraico equivale a decir que se tiene una curva algebraica. De esta forma, la integral euleriana queda en la forma de integral abeliana $f(x)=\int_a^x R(t,y)dt$ que, en la integración, permite reemplazar y por la función de t obtenida en la expresión $F(t,y)=0$. Así, la función $\varphi(x)$ queda reemplazada por la suma de los valores de la integral en un número finito de puntos, queda reemplazada por $f(x_1)+\ldots+f(x_n)$. Suma que es igual, teorema de Abel, a la suma de una función racional y una función logarítmica de unos parámetros a^i —que son los coeficientes, variables, de la función que expresa y en términos de x, por lo cual los términos x dependerán de ellos—.

Al buscar las condiciones para que $f(x)$ sea constante, Abel demuestra la relación $R(x,y)\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$, donde $Q(x,y)$ es un polinomio sometido a condiciones que hoy se califican de lineales y que no dependen más que de $F(x,y)=0$, es decir, de un número p de parámetros, fijo. Se tiene así, y en terrenos de innovación aparentemente alejados del puro campo analítico, la primera aparición del invariante fundamental de una curva algebraica, el género de la misma. Con lo cual, al dar r valores, se obtiene la integral $f(x)$ como suma de $m-r$ integrales, suma que posee un mínimo que sólo depende de la curva $F(x,y)=0$, y que es precisamente p. Se obtiene que si la curva es de grado $2m$ o $2m-1$, entonces $p=m$. Resultado que da la razón, la explicación de la conjetura de Euler y que sólo puede encontrarse, como en el caso de la resolución algebraica de la quíntica, rompiendo el tratamiento directo; sólo tiene explicación desde otro nivel, en el que se ha partido de la función $F(x,y)=0$ o curva algebraica, para encontrar la razón de ser, la función euleriana, suma de funciones racional y logarítmica. Pero, con ello, no sólo se da respuesta a las causas de una limitación; a la vez, se crea un nuevo campo matemático, el de las integrales abelianas y las funciones elípticas de cuya extensión algún entusiasta llegaría a exclamar que daría trabajo, su desarrollo, para más de un siglo.

Simultáneamente Abel se liga a un terreno que cobra todo su interés a partir de estos entornos, la *geometría algebraica*, a la que aporta, como he indicado, la noción de género de una curva. El método característico de esta geometría va a encontrarse en la eliminación algebraica. Y ello porque el problema de hallar la intersección de dos curvas algebraicas, por ejemplo, es equivalente al de resolver el sistema de ecuaciones que representan a ambas curvas. Unido a la Geometría proyectiva se muestra que todos los problemas de índole proyectiva —es decir, apoyados en las intersecciones, secciones y proyecciones de variedades algebraicas— se reducen a eliminaciones algebraicas. Pero, desde este enfoque algebraico lo que se permite es generalizar las nociones de «curva» por ejemplo, dado que al manejar el álgebra en el cuerpo complejo aparecen «curvas complejas» que rompen con la idea del trazo continuo. Así, una propiedad esencial, teorema fundamental en la geometría algebraica creada en los entornos de 1827, se tiene el teorema de Bezout que establece que dos curvas de órdenes *mn* sin curva parcial común se cortan en *mn* puntos; naturalmente estos *mn* puntos pueden ser propios o no, reales o imaginarios, distintos o no. El paso al cuerpo complejo se encuentra apoyado en el mismo principio de continuidad en que se apoyará Poncelet para la Geometría proyectiva sintética, y al cual volveré con detenimiento, principio que permite establecer con total generalidad proposiciones que en el cuerpo real no se consiguen sino para casos particulares y a costa de grandes complicaciones.

La unión con las propiedades proyectivas de los métodos algebraicos conduce al estudio de las transformaciones birracionales como objeto central de la geometría algebraica fabricada en estos entornos. Objeto central, conduce a la creación de la teoría de invariantes algebraicos de la que Sylvester llegaría a exclamar que contenía todo lo que de válido hay en el hacer matemático.

Ahora bien, Abel no es el único, ni siquiera el más representativo, en los terrenos del Análisis que se inicia en esta ruptura, en los entornos de 1827. Su influencia, principalmente a través de su coetáneo y rival Jacobi, dos años más joven y que sigue sus mismos pasos desde el intento fracasado de resolver algebraicamente la quíntica hasta las funciones abelianas, se ejercerá tras su muerte en 1829, pero gracias a la ruptura sufrida por todo el Análisis en general. Si lo he tomado con mayor extensión ejemplar es por la relativa brevedad y uniformidad de su obra, toda ella condicionada tanto por hallar la razón como por la impronta de la inversión en dicha obra. Es Cauchy, realmente, la figura clave en el panorama francés, en el panorama de la «nueva matemática analítica». Pero Cauchy utiliza el mismo proceso de inversión, radicalizándolo hasta el extremo de aplicarlo no sólo a temas particulares como Abel, sino a todo el Análisis, desde sus fundamentos e inicios. Así, frente al mencionado desarrollo algorítmico de las funciones, supuestas continuas, Cauchy plantea como problema la misma noción de continuidad y, con ello, la propia noción de función, conceptos aceptados hasta el momento en forma puramente intuitiva. De modo análogo las cuestiones ligadas al concepto de integral, por ejemplo, mediante un mismo proceso que el de la diferencial: el proceso de paso al límite. Proceso o método que cabe calificar de nuevo, herramienta clave para el análisis moderno que permite suprimir, por un lado, toda la metafísica de los infinitésimos de Leibniz y sucesores —lo que no pudo lograr, como he indicado, Lagrange— y, por otro, dar razón del puro mecanicismo operatorio de la derivación e integración en Euler. El nuevo método de definibilidad de Cauchy supone no ya una mera revisión del Cálculo, sino la formulación del Análisis mediante el estilo que posteriormente se decantará a lo largo del siglo XIX, principalmente con Weiertrass y que he denominado «estilo de los ε». No hay que olvidar, por otro lado, que Cauchy continúa razonando con el infinito potencial y de ahí que al proceso que en él, que en este entorno se inicia respecto a los fundamentos del Análisis con el método de paso al límite pueda ser llamado, con Klein, proceso de aritmetización, que culminará en 1872 con la formulación definitiva del concepto de número real. Y que manifestará su gran limitación: la imposibilidad de manejar el infinito actual y, con él, la imposibilidad de dar cuenta directa de ese número real, que se admite como dado, pero que carece de auténtica definición, lo que muestra el mismo Cauchy en sus dudas ante el número irracional. Limitación en el manejo de un concepto de número sin que el mismo haya sido definido, establecido.

Junto a la creación anterior Cauchy elabora, a partir de 1830, otro terreno en el Análisis: el de variable compleja o de los imaginarios, apoyándose en el diagrama gráfico realizado por Gauss y Argand como toda base de fundamentos, además de los beneficios pragmáticos que tal análisis de variable compleja entrañaba. Análisis de factura diferente al Cálculo real, porque el mismo ha de partir, de entrada, del concepto de integral a lo largo de un contorno cerrado que rodee un punto. Integral de variable compleja con la limitación consiguiente de admitir el concepto de curva cerrada como algo dado de antemano, así como la noción de dimensión del espacio en el cual se encuentre dicha curva y que Riemann intentará superar mediante su noción de multiplicidad, pero que no se convierte en auténtico problema hasta la ruptura con el marco establecido por Cauchy.

Del papel del gran matemático francés cabría indicar, nada más, que entre 1830 y 1859 publica más de seiscientas memorias originales y unas 150 reseñas creando no sólo unos temas dentro del Análisis, o un método como el del paso al límite válido tanto para la definición como para las demostraciones, sino un ambiente, un marco para un nuevo hacer distinto al puramente formalista euleriano, un hacer matemático calificable de Análisis. En el cual se pretende «sustituir el cálculo por las ideas», en palabras de Dirichlet y donde «es necesario triunfar de la demostración no por el cálculo ciego, sino por el pensamiento», en términos de Riemann.

2.1.2. Problema clásico: las Geometrías no-euclídeas

Es, quizá, la ruptura más estudiada desde el enfoque de Fundamentos o Filosofía de la Matemática, por lo que simplemente esbozaré unas líneas. Desde Proclo, en sus comentarios, el postulado V de los *Elementos* se había intentado sustituir por otro más de acuerdo con la formulación de los restantes postulados euclídeos. Y más que reemplazar, se había intentado demostrar como una proposición o teorema más. Los últimos intentos se debían a Saccheri, Legendre, Taurinus... Como en el caso de la quíntica, pero con mayor antigüedad, era un terreno apto para lograr la inmediata fama. Problema de las paralelas que, igualmente, se estimaba como de imposible solución, por lo que algunos matemáticos lo dejaban de lado, aun sabiendo su categoría de «clásico». Así, Bolyai lo calificaría, al aconsejar a su hijo Janos que no se dedicase al mismo, como problema dominado por las nieblas e imposible. Pero, al igual que la quíntica, el problema alcanza su auténtica dimensión mediante su inversión y, con ella, se transforma en otro desde el cual cobra todo su auténtico sentido. En lugar de la demostración directa, con la admisión del paralelismo, se niega éste y se busca la razón de la imposibilidad directa. Y se alcanza, simultáneamente, una de las geometrías no-euclídeas por Lobatchevski, Janos Bolyai, Gauss. Una geometría «imaginaria» —el período está lleno de elementos «imaginarios», como se va viendo— pero que da paso, incluso, a un intento de carácter experimental, como si la matemática se mantuviera en dicho terreno, consecuencia tanto de un empirismo ingenuo como de la idea de la necesidad de la constitución del hombre para comprender la naturaleza: tanto Gauss como Lobatchevski pretenden confrontar la «verdadera» geometría con la naturaleza, en un intento de *experimentum crucis* que, como no podía ser de otra forma, fracasa.

Es intento que destaco en el sentido de cómo la ideología que entorna a los matemáticos condiciona su obra creadora, incluso la difusión de la misma —y basta recordar el temor de Gauss ante el posible griterío de los beocios, en clara alusión a la kantiana *diafonía doxón* de los filósofos—. Intento que, por otro lado, muestra que la idea de un espacio previamente dado, homogéneo, en el cual se encuentran inmersos los cuerpos rígidos, se haya subyacente a estos enfoques de tal manera que el matemático parece limitado a descubrir, como el físico, las propiedades que los objetos de tal espacio poseen, propiedades que caracterizarán a la geometría. Idea de objeto como dado previamente y, con ello, objeto determinador de geometría, que conlleva la ideología de un claro realismo positivista, muy querido y tradicional en el hacer matemático de la época.

Y si es en 1829 cuando se publica uno de los ensayos de Lobatchevski —el primero lo fue en comunicación de 1826—, la influencia de este hacer, fundamentalmente en los terrenos epistemológicos, no cobrará toda su importancia en el hacer interno hasta la obra de Riemann y el modelo de Beltrami, para alcanzar su trascendencia en la nueva inversión ya en los entornos de 1875. Trascendencia en el hacer interno como el primer ejemplo de una nueva herramienta: el modelo matemático.

Sin más que este bosquejo, lo destacable es el método: invertir, con una finalidad: hallar la razón para resolver un problema clásico. Y aunque de momento permanezca, en su plano elemental, respecto a la práctica teórica intrínseca matemática en un nivel secundario, al dar las demostraciones al estilo euclídeo, muestra una decisiva influencia en el nivel epistemológico, en el nivel de la crítica ideológica o externa como la he denominado, al plantear desde nuevas perspectivas las relaciones matemática-realidad, así como el propio concepto de espacio matemático que se hace ahora cuestionable y, en él, el papel que la figura y, consecuentemente, la expresión analítica o algebraica que la representa desempeñan en dicho espacio. Son consecuencias que se manifestarán con claridad en la obra de Riemann, por ejemplo, con total nitidez, o en la de Möbius.

2.1.3. Problema clásico: la aplicación del Álgebra y del Análisis a la Geometría; la Proyectiva, la Diferencial

Lázaro Carnot, el «organizador de la victoria» y geómetra distinguido, se une a un viejo problema originado tras la creación de Fermat y Descartes de la Geometría mal llamada analítica, de la Geometría de coordenadas. Frente a ésta, lanza Carnot una divisa: «liberar la geometría del análisis»; es decir, sustituir los métodos algebraicos cartesianos por los métodos geométricos intrínsecos, por los métodos sintéticos. Con la divisa, un método: generalizar y sustituir las numerosas demostraciones, una por cada posición particular de los puntos y líneas en cada figura, por una demostración única, que abarque a todas las particulares considerando que la figura se encuentra «en posición general», términos que se difunden y mantienen hasta bien entrado el siglo actual.

Realmente lo que pretenden Lázaro Carnot y Gaspar Monge es desterrar de la geometría no ya el Análisis, sino el álgebra. Es corriente en la que no se encontraban solos, dado que las coordenadas habían tenido permanente oposición, aunque la misma careciera de fuerza alguna. Es por lo que con la obra de Monge, con la divisa de Carnot, se va a producir una auténtica renovación, no ya de nuevos filones como indicara Lagrange, sino de nuevas minas. Por una parte, se van a crear geometrías puramente sintéticas: la Descriptiva y la Proyectiva; por otro, una geometría auténticamente analítica en el sentido de utilizar el cálculo o análisis infinitesimal y no sólo las coordenadas y los métodos algebraicos, la Diferencial. Y ello porque vueve a plantearse el dilema de análisis y síntesis —de coordenadas algebraicas y de construcción geométrica—, precisamente allí donde la geometría cartesiana, la geometría de coordenadas, mostraba sus mayores limitaciones:

a) En las propiedades de situación, independientes de la medida. Limitación cuya única posibilidad de superación se encontraba en el abandono momentáneo del instrumento cartesiano para volver a «ver» en las figuras lo que el desarrollo puramente algebraico impedía percibir y, con ello, se volvía aparentemente a la mera construcción gráfica, con las propiedades de posición o descriptivas.

b) En las curvas y superficies la geometría de coordenadas mostraba también su limitación ya que al definir a tales curvas y superficies mediante los métodos algebraicos elementales, éstos impedían dar cuenta de curvas y superficies en su total generalidad, dado que tales métodos sólo sirven para el estudio de curvas y superficies muy específicas; el Análisis elaborado durante el siglo XVIII permitiría superar esta limitación del método cartesiano, con un cambio en el mismo establecido al poner el acento en la herramienta del Análisis más que en la analítica elemental clásica.

Son las dos grandes líneas de ruptura que siguen a la divisa de Carnot, al trabajo de Monge y que, como puede apreciarse, siguen la misma técnica de inversión de viejos problemas, en paralelo a las inversiones antes apuntadas. Líneas que inauguran dos nuevos haceres matemáticos, en dos disciplinas, que esbozo a continuación.

La síntesis proyectiva

Siguiendo la petición de Carnot, y acentuando la separación entre analítica o por coordenadas y sintética o por construcción gráfica y razonamiento sin fórmulas, pretendidamente intuible, es Poncelet quien da cuerpo desde 1820 a dicha petición. En 1822 publica su *Traité des propriétés projectives des figures,* el mismo año que Fourier publica su *Teoría analítica del calor* —y donde el análisis utilizado, con los desarrollos que posteriormente serán calificados «de Fourier», muestra una total falta de rigor, consecuente con la despreocupación respecto a la convergencia o no de los mismos y que obligaron a no darle el premio de la Academia a un borrador anterior—. Con su obra Poncelet crea la Geometría que recibió, entre otros, los nombres de «superior» por liberarse de las medidas, «proyectiva» por el empleo de la proyección como transformación fundamental y que es el que se ha mantenido, y «moderna» en contraposición a la clásica o euclídea, con el cual Pasch dará título a su obra y todavía en 1943 alguna breve historia de la geometría francesa continuaba calificándola.

Poncelet distingue dos tipos de propiedades geométricas: *a*) métricas, en las cuales interviene la medida de distancia y ángulos; *b*) descriptivas, proyectivas o de posición, que sólo dependen de la posición relativa de los elementos de la figura considerada. Las métricas no se conservan al realizar una proyección puntual de la figura, mientras que las que se conservan serán las calificadas de proyectivas o de posición. El exagrama místico de Pascal, por ejemplo, constituye una propiedad geométrica proyectiva de las cónicas —y cito esta propiedad por encontrarse en el *Tratado de cónicas,* tratado de geometría proyectiva que Leibniz ordenó para su publicación en las mismas fechas en las que hace el comentario a la geometría cartesiana de no dar cuenta de un análisis de la posición, de la situación de los elementos geométricos, lo que se ha entendido por una afirmación de que Leibniz había entrevisto la «topología» en lugar de considerar sin más que hablaba de la proyectiva— mientras que una propiedad como la reflejada en el teorema de Pitágoras es métrica y no se conserva en la proyección puntual.

A partir de las operaciones de proyección y sección —diferenciadoras de unas u otras propiedades—, Poncelet estudia las relaciones de situación entre las figuras, entre los elementos de una misma figura, especialmente las propiedades de cónicas y cuádricas. Junto a estas operaciones acepta dos principios fundamentales:

a) El de *dualidad,* manejado por Gergonne igualmente y que motiva polémicas en cuanto a prioridad en su formulación, y por el cual se puede obtener de una proposición otra, la dual, intercambiando los términos que previamente se han mostrado duales.

b) El de *continuidad* en el que sistematiza el método de generalización de Carnot y que procede, intuitivamente, del proceso de proyección de las cónicas. Según este principio, dada una figura en la cual se han encontrado unas propiedades, métricas o proyectivas, si se hace variar, con palabras de Poncelet, «la figura primitiva por grados insensibles o se imprime a ciertas partes de la figura un movimiento continuo cualquiera, ¿no es evidente que las relaciones encontradas por el primer sistema seguirán siendo aplicables a todos los estados sucesivos de este sistema siempre que se tengan en cuenta las modificaciones particulares que hayan podido sobrevenir...?». Ciertos objetos cambiarán de posición, otros se alejarán al infinito o se aproximarán a distancias insensibles, pero las relaciones generales continuarán aplicándose. Con lo cual, ocurrirá que habrá que admitir, en ocasiones, «nociones singulares» y «verdaderas paradojas», pero ello no es obstáculo para tal admisión en la práctica matemática. Así, en ésta entrarán objetos como las rectas imaginarias, los puntos del infinito... En otras palabras, el principio de continuidad conlleva la idea básica de despreocuparse de las variaciones de forma de las figuras, de manera que las relaciones sugeridas en la figura primitiva entre ciertos elementos sean válidas en todas las circunstancias, incluso en aquéllas en que las mismas parezcan imposibles, en aquellas en que por ejemplo no existan los puntos de intersección de algunas líneas.

Si destaco este último principio, fundamental para la proyectiva sintética de Poncelet, es por la auténtica falta de fundamentación lógica que encierra. Intuitivo, ciertamente, lo es. Pero carece de fundamento en la presentación y formulación de Poncelet. Y así, corresponde a Cauchy atacar el empleo y formulación vaga del mismo por ser principio apoyado únicamente en una «fuerte inducción» —experimental— pero no en razonamiento riguroso, matemático, y de ahí la necesidad tanto de restringir su campo de validez como de revisar las aplicaciones del mismo hechas tanto por Poncelet como por otros matemáticos, así Monge, años antes y sin formulación explícita Leibniz. Pero ni Poncelet ni quienes siguen el camino por él emprendido pueden aceptar tal crítica, dado que no tienen capacidad para fundamentar dicho principio, que debe ser aceptado porque es el que permite integrar en la práctica teórica matemática una serie de nuevos objetos, ideales, como los calificaría posteriormente Hilbert, imposibles de admitir por otra vía. Y ello, en paralelo posterior a principios como el de elección.

La Geometría «moderna» así establecida por Poncelet encuentra eco inmediato. Y se crea una auténtica edad de oro para este hacer geométrico. Chasles —quien introduce la razón anarmónica o doble— mantiene la elaboración sintética, al igual que Steiner, que von Staudt, quien con su *Geometrie der Lage* de 1847, escrita sin una sola figura para huir de la posibilidad de concentrarse en el caso particular, sistematiza y resume toda la geometría sintética proyectiva existente hasta el momento, procurando cubrir la laguna de fundamentación hasta entonces existente mediante un tratamiento axiomático coherente.

Ahora bien, nacida con una radical limitación, consciente, el método sintético, pronto la geometría proyectiva ha de recurrir al manejo de coordenadas y no sólo por la «costumbre» de los matemáticos a la geometría cartesiana —según alguna *explicación* histórica—, sino por la excesiva limitación de lo sintético. Ya Chasles y Riemann ponen de relieve el papel de la razón doble, con el escape que la misma supone hacia la métrica. Pero serán Plücker y Möbius quienes logran crear las *coordenadas proyectivas* que jugarán el mismo papel que las cartesianas, en el sentido de poder expresar las propiedades que permanecen invariantes en las operaciones de proyectar y cortar, propiedades de situación, caracterizadoras de este hacer geométrico, como las cartesianas permiten la expresión de las propiedades que permanecen invariantes mediante la métrica. Con ello, tanto desde el aspecto sintético como desde el que utiliza coordenadas proyectivas, el hacer geométrico se enfoca como una práctica teórica en la cual se estudian los invariantes no sólo proyectivos, sino de cualquier otro tipo, según sea la geometría que se considere. De esta forma se logra que *la* geometría desaparezca como disciplina única, dividiéndose en varias, caracterizada cada una por los invariantes que va a manejar, por el método que para su caracterización va a utilizar. En otras palabras, la Geometría comienza a desaparecer, en el mismo momento de su creación, como la ciencia del espacio para pasar a convertirse en ciencia de los invariantes del espacio en sí mismo. Por otro lado, y gracias al manejo de las coordenadas proyectivas, lo que se hace es demostrar que las propiedades métricas pueden enfocarse como mero caso particular de las proyectivas, es decir, pueden reducirse a éstas. Es lo que pone de manifiesto en 1853 Laguerre —a los diecinueve años—, al ligar la medida de un ángulo con la razón de sus lados y de las dos rectas isotropas del mismo vértice. Aunque es Cayley, en 1859, quien da con total claridad la definición proyectiva de la distancia entre dos puntos y muestra, así, que las propiedades métricas de una figura son las propiedades proyectivas de la nueva figura obtenida agregando a la dada los puntos cíclicos. La geometría métrica pierde, junto a la aparición de las no-euclídeas, su papel de privilegio. Simultáneamente cabe considerar que las propias geometrías no-euclídeas encuentran su mejor expresión gracias a la formulación en términos proyectivos. De esta forma se hace comprensible la afirmación de Cayley, de 1859, de ser la geometría descriptiva toda la geometría.

Realmente, la afirmación de Cayley refleja no sólo el papel de la geometría proyectiva —tanto en su vertiente sintética pura como en su vertiente de coordenadas— respecto a la geometría métrica sino que refleja el estado de casi toda la matemática surgida en la ruptura de los entornos de 1827. La masa de publicaciones acerca de la proyectiva supera a las restantes, y en algunos países constituye prácticamente «toda» la matemática, fundamentalmente por la absorción que realiza de otros terrenos como el que podría constituir la geometría algebraica. Y ello hasta muy mediados de este siglo. Es un hacer que domina a los restantes, que parecen permanecer en un segundo plano para el espectador no matemático. Pueden darse varias razones como justificación del éxito, que pueden concentrarse en las siguientes:

1. Suprime, de entrada, el álgebra y el análisis, volviendo a un hacer que pretende ser originario, apoyado directamente en el estudio directo, intuitivo, de las figuras. Con ello, responde plenamente al ideal de inversión en el que he insistido como clave de la ruptura epistemológica y que, junto a las expresiones ya citadas de algunos matemáticos, podría resumirse en la de Galois, «saltar de puntillas sobre los cálculos», aunque se refiera el matemático francés fundamentalmente al álgebra. Por otro lado, introduce la intuición geométrica, la «visión» de lo real en el hacer matemático frente al formulismo puro del Cálculo euleriano, frente al lenguaje artificial de los ε con abundantes subíndices que inaugura Cauchy, frente a los desarrollos algorítmicos que pretenden expresar fenómenos naturales o físicos pero que carecen de fundamentación y rigor como en los desarrollos en serie de Fourier para el estudio de la conducción del calor... Con todo ello, la Geometría descriptiva, proyectiva o moderna, logra una elegancia formal y un contenido aparentemente intuitivo que carece de rival en los restantes estilos; permite expresar breve y elegantemente, pero a la vez, con total generalización, lo que en el método de coordenadas exige largos desarrollos calculísticos de difícil interpretación geométrico-intuitiva.

2. Tanto el principio de dualidad como, principalmente, el de continuidad aportan simplificaciones excepcionales y permiten, como deseaba Carnot y las palabras de Poncelet ponen de manifiesto, enunciar en toda su generalidad algunas propiedades sin tener que detenerse en casos excepcionales. Así, las cónicas y las cuádricas no degeneradas se presentan como equivalentes entre sí en el plano o el espacio proyectivo respectivamente; las cúbicas planas se reducen a sólo tres tipos según sus puntos singulares... Además, el lenguaje proyectivo permite la unificación geométrica de forma que se muestra como la geometría más general o primera, particularizándose en la afín y ésta en la métrica; en otras palabras, unifica y jerarquiza los distintos tipos de invariantes geométricos que cabe estudiar.

Es claro, sin embargo, desde el presente posterior a la «edad de oro» de la geometría, que el enfoque originado en la ruptura de los entornos de 1827 conllevaba, a la vez, sus propias limitaciones. Así, de entrada, y aunque de modo inmediato se logre romper con esta limitación, la proyectiva surge como extremada al aceptar el método sintético puro como único o propio. Ello imposibilita la generalización pedida a otros espacios de más dimensiones, ya que la síntesis intuitiva, la «visión» geométrica se muestra inalcanzable al considerar figuras en espacios de más de cuatro dimensiones. Naturalmente, es limitación no sentida en los entornos de 1827 en los cuales el espacio como lugar de puntos, de tres dimensiones, se consideraba como algo dado de antemano, careciendo de sentido, de «realidad» otro tipo de multiplicidades de otras dimensiones. Multiplicidades como espacios sólo entrevistas por Grasmann en 1844 y después por Riemann, reconocidas por estas fechas sin llegar al conocimiento de las mismas. Por otro lado, la síntesis intuitiva, autolimitada a las propiedades proyectivas por modo exclusivo, vería otra limitación tan grave como la anterior, la imposibilidad de aprehender la geometría diferencial que también se origina en la ruptura de 1827, pero con recursos no precisamente sintéticos, sino del cálculo diferencial. No puede dar cuenta de toda esta nueva geometría, aunque lo intente desde otra perspectiva, desde un enfoque en el cual tenga que suprimir lo puramente sintético.

Junto a estas limitaciones surgen otros problemas de carácter metodológico. Si la condición sintética y la intuición geométrica obligan a desarrollar cierto tipo de geometría, también obligan a aceptar principios como el de dualidad y, sobre todo, el de continuidad. Consecuencia, la generalidad buscada se obtiene con sólo una justificación: su éxito pragmático, y no por fundamento lógico alguno. Aunque posteriormente este fundamento pueda lograrse —con la axiomática de Staudt, por ejemplo—, en el entreacto justifica la admisión de cualesquiera otros principios que muestren alguna utilidad; no hay barrera alguna. Con lo cual cabe reemplazar los razonamientos algebraicos —el «calculemos» de Leibniz— por principios más o menos vagos, produciéndose un descenso en el rigor, sólo apoyado, con palabras de Poncelet, «en el razonamiento explícito ordinario, es decir: por la marcha que, en ciertos casos, se considera como la única rigurosa», sin más explicitación de qué considerar razonamiento explícito ordinario sobre la figura enfocada «en su total indeterminación». Frase que, por otro lado, refleja una vez más, la consideración del espacio idéntica a la esbozada al hablar de las geometrías no-euclídeas que, por otro lado, quedarán posteriormente englobadas en la órbita proyectiva aunque en los entornos de 1827, incluso en la obra de Cayley, ambos haceres sigan sin conexiones entre sí.

El Análisis como herramienta: la Diferencial

La limitación apuntada de la geometría cartesiana o de coordenadas respecto al estudio de las curvas y superficies encuentra su superación por la aplicación del Análisis, del Cálculo infinitesimal. Práctica técnica del Cálculo que, a su vez, condiciona la geometría a estudiar pero que, de hecho, supone una inversión respecto al propio cálculo enfocado ahora con una finalidad práctica y no por el desarrollo en sí. De esta manera, el objeto central de esta aplicación geométrica se centrará en el estudio de las propiedades locales, diferenciales, de las figuras consideradas; figuras que, por otro lado, se admiten definidas por funciones de una o varias variables continuas en el entorno del punto considerado —en términos actuales, de entorno— a la vez que se supone que tienen un número suficiente de derivadas. Hipótesis que, realmente, ni siquiera se explicitan, dándolas por supuestas como problema no propio de la geometría, sino del Cálculo.

Estudio local de curvas y superficies sistematizado por Monge y por Gauss como tema, como hacer matemático independiente y que se realiza gracias al cálculo infinitesimal y con un método de «aproximación», es decir, comparando en el entorno del punto considerado la curva o la superficie a estudiar con otras curvas o superficies más conocidas y que den una aproximación máxima posible. De esta forma surgen los conceptos de tangente —en el entorno del punto es la recta que menos se desvía de la curva—, curvatura —recíproco del radio del círculo que se aproxima más a la curva en el entorno considerado—, plano osculador —el que se encuentra más próximo a la curva en el entorno del punto—, torsión, así como el fundamental de la longitud de un arco de curva.

Junto a este enfoque local, obligado por el instrumento analítico con el que se opera, cabe observar que, subyacente, se encuentra otro elemento más o menos oculto en esta geometría: la supresión de los métodos coordenados globales y su sustitución por otros medios más adaptables. Es decir, se tienen que reemplazar, por inoperantes, las coordenadas cartesianas en beneficio de coordenadas propias, intrínsecas, al estilo de las coordenadas proyectivas para las propiedades proyectivas. Naturalmente este tipo de coordenadas requerirá medios distintos a los algebraicos elementales cartesianos. Es lo que se consigue gracias al triedro móvil o sistema de referencia intrínseco que se forma tomando como ejes de referencia las rectas normal, tangente, binormal que dan paso a los planos de referencia osculador, normal y rectificante. El triedro móvil permite observar que todas las propiedades de una curva en el entorno de un punto pueden expresarse en función de la curvatura y la torsión de la misma siempre que vengan en función de la longitud del arco como parámetro «natural», relacionándose entre sí por las fórmulas de Frenet-Serret, por lo que pueden tomarse como los fundamentos para la definición de todas las propiedades de la curva mediante lo que se califica de ecuaciones intrínsecas o naturales de la curva dada, independientes por tanto del espacio o receptáculo en el cual dicha curva se encuentra sumergida.

Pero los conceptos anteriores también permiten expresar los que entran en juego en el estudio de las superficies gracias al plano tangente —la superficie que más se aproxima linealmente a la superficie dada en el entorno del punto de contacto— y a la recta normal a dicho plano tangente en el punto de contacto. Recta normal por la que pasan planos ortogonales a la superficie provocando secciones normales en ésta. De entre estas secciones normales hay dos especiales, mutuamente perpendiculares, que se denominan direcciones principales y que dan lugar a las curvaturas principales de la superficie en el punto dado. Función de tales curvaturas se tienen la curvatura media y la curvatura total o de Gauss. Pero con ello aún no se ha logrado una caracterización intrínseca de la superficie al estilo de la dada por el triedro móvil en la curva alabeada. Caracterización lograda mediante lo que se conoce como primera y segunda fórmulas fundamentales de la superficie y que permiten expresar tanto la longitud de una curva sobre dicha superficie como ángulos, áreas, las curvaturas... Para la formulación de ambas formas cuadráticas —que no son independientes entre sí— se requiere el empleo de las coordenadas curvilíneas introducidas por Gauss en sus *Disquisitiones* de 1827, coordenadas curvilíneas que permiten el estudio de las propiedades intrínsecas de la superficie sin tener en cuenta el espacio en que la misma se encuentra sumergida.

Naturalmente el estudio no se limita a las propiedades en sí de las superficies, sino de las relaciones que pueden existir entre ellas. Propiedades que, en una transformación geométrica entre dos superficies, permanecen invariantes. Transformación que, de una manera intuitiva, viene planteada por ejemplo en el problema cartográfico, en el de representación de mapas. Estudio de propiedades invariantes que conduce a destacar el papel de las geodésicas de una superficie mediante las transformaciones isométricas, así como el papel de la curvatura geodésica, en cuanto a las coordenadas «intrínsecas» de la superficie.

Lo que puede destacarse, aquí, de la creación de la Geometría diferencial es, por un lado, y como ya he indicado anteriormente, que la misma supone una inversión del Cálculo diferencial supeditado, ahora, en su propio desarrollo y sobre todo en el terreno de las ecuaciones diferenciales, a las previas concepciones geométricas a las que ha de servir. Por otro lado, y aunque se conserve como objetivo central del estudio geométrico la figura y no el espacio en el cual se encuentra sumergida, la simple posibilidad de establecer y estudiar las propiedades intrínsecas obliga a plantearse desde una perspectiva nueva el papel de ese espacio, obliga a cuestionar las propiedades del mismo y, con ello, obliga a un cambio de perspectiva en cuanto a la naturaleza en sí de dicho espacio. Así, se observa que la ilimitación e infinitud no son sinónimos, de manera que «si se atribuye al espacio una medida de curvatura constante, el espacio sería necesariamente finito», siempre que esa curvatura sea positiva y por muy pequeño que se admita su valor, afirmará Riemann y, sin embargo, ese espacio será ilimitado, como se observa en el modelo de la esfera. Palabras de Riemann en su *Disertación* de 1854 en la que como consecuencia de este tipo de estudio geométrico diferencial plantea la posibilidad de la geometría no-euclídea «riemanniana» frente a la creada por Lobatchevski y Bolyai, y en la cual dos rectas no podían encerrar espacio alguno precisamente por la condición ideológica de admitir como sinónimos la infinitud y la ilimitación del espacio receptáculo.

Constituye, de esta forma, la Geometría diferencial un elemento revolucionario para la concepción del espacio, más aún que las restantes geometrías, dado que éstas mantenían la imagen de un espacio real intocable en el cual se encontraban las figuras, cuyas propiedades «reales» tenía que develar el matemático bien con unos métodos sintéticos puros, bien con unos medios de coordenadas no intrínsecas. Aspecto revolucionario en cuanto a la ideología —y que no he visto suficientemente destacado, por darse preferencia a las discusiones «filosóficas» provocadas por las geometrías no-euclídeas, de repercusión inferior en el interior de la práctica teórica matemática—, no ya en cuanto al contenido o plano interior, en el cual se convierte en otra «disciplina» más de dicho hacer, prácticamente independiente de las restantes, aunque en su origen se haya centrado en los mismos motivos y métodos que los demás marcos que aparecen tras la ruptura de los entornos de 1827: invertir y hallar la razón.

2.1.4. Problema clásico: Disquisiciones aritméticas

Al igual que en Geometría proyectiva con su introducción de elementos «no-reales» —rectas isotropas, puntos y recta del infinito...— en Algebra y, sobre todo, en Aritmética, se produce una auténtica invasión de elementos imaginarios como nuevos objetos del hacer matemático. Por lo pronto, junto a los números naturales y enteros se admite como número, con el mismo estatuto que los anteriores, al racional y no como mera razón o proporción entre enteros. En este aspecto la Aritmética va a convertirse en una de las fuentes centrales del hacer matemático como campo de problemas que exigen la creación de nuevos objetos y que culminará con la afirmación de Kronecker, tan mal interpretada, de «Dios hizo los números naturales, el resto es obra de los hombres».

Corresponde fundamentalmente a Legendre y, sobre todo, a Gauss, mantener la línea de Fermat, de Euler de los siglos anteriores. Observando un hecho, con A. Weil: tanto Fermat como Euler trabajaron aislados, en problemas aislados; Legendre y Gauss logran crear un ambiente y, en él, un nuevo hacer: la Teoría de números, que no llegará nunca a concretarse en disciplina autónoma, sino en campo de trabajo y origen de ideas. Y ello hasta el extremo de que Abel, por ejemplo, insistirá al crear su teoría de las integrales abelianas en el enlace que las mismas presentan con la teoría de números. Así, en carta a Hölmboe de enero de 1827, desde Berlín —y en la que indica que quiere encontrar editor para un libro con todas sus búsquedas sobre la integración— señalará algunos resultados particulares como, «He hallado, por ejemplo, que con la regla y el compás se puede dividir la longitud de la lemniscata $\rho=\sqrt{\operatorname{sen} 2\varphi}$ en tantas partes iguales como Gauss ha dividido la del círculo, por ejemplo en 17 partes. El dividir en m partes exige una ecuación de grado extremadamente elevado, a saber: m^2-1 (si $m=17$, por ejemplo, es el grado $17^2-1=288$). Si m es primo de la forma 2^n+1, he demostrado que esta ecuación de grado $2^{n+1}(2^{n+1}-1)$ puede ser resuelta simplemente por medio de raíces cuadradas».

El enlace entre la teoría de números y las funciones o curvas elípticas es tal que el propio Gauss no marcará demasiada diferencia entre ambos campos —lo cual es explicable si se piensa que expresiones como $x^4-y^4=z^2$, $x^3-y^3=z^3$, que son ecuaciones de género uno, representan geométricamente curvas elípticas—, ligados igualmente con el álgebra que surge en estos momentos a la vez que, como ya he señalado, se enlazará con la Geometría algebraica calificable actualmente de clásica y cuyo mayor exponente podría considerarse a Riemann.

Me limito, aquí, a enumerar alguno de los números que, a partir de los entornos de 1827, van a introducirse como nuevos objetos del trabajo matemático, agrupándolos en tres grandes zonas.

a) Anfibios entre el ser y el no ser, los «imaginarios» o complejos los enlazaría durante el siglo anterior de Moivre con la trigonometría, Euler con los números e y π, aunque su definición, su estatuto conceptual, no esté establecido. Corresponde a Argand, a Wessel, a Gauss, dar su representación geométrica en el plano. Y es gracias a esta representación geométrica por la que cobran «realidad» los números complejos, al menos para Gauss. No será hasta 1837 en que su estatuto aritmético quede fundamentado gracias a Hamilton, quien los considera como pares ordenados de números reales. Ello obliga a admitir que dichos pares ordenados, con sus reglas de adición y multiplicación —esta última nada «natural»— puedan enfocarse no ya como pares, sino como números en sí que satisfacen las mismas propiedades formales que los racionales —constituyen un cuerpo— aunque no puedan ser ordenados como aquéllos.

La admisión del cuerpo *C* se apoyaba no en definición alguna formal hasta la obra de Hamilton, sino en consideraciones estrictamente pragmáticas: daban resultado y permitían obtener proposiciones de una generalidad y simplicidad imposibles en el cuerpo de los reales —así, en teoría de ecuaciones, se lograba el teorema fundamental del álgebra—. Es el fundamento de la admisión de los imaginarios en proyectiva, el fundamento del principio de continuidad de Poncelet...

Tras la fundamentación aritmética realizada por Hamilton, será Cauchy quien dé, a partir de 1847, otra apoyada en las clases de restos en el anillo de polinomios en una indeterminada módulo x^2+1. Enfoque más algebraico y de teoría de números a lo Gauss con las congruencias en el anillo de los enteros módulo uno dado, que el aritmético y formal de Hamilton.

Con uno u otro proceso —formal, aritmético— los complejos quedan incorporados, ya sin duda alguna —aunque todavía en 1953 Borel continuara denominándolos signos «ficticios»— en el hacer matemático. Pero hay que observar que tales definiciones no hacen otra cosa que consagrar un uso ya establecido mediante el dato de una definición formal, mediante una definición operatoria, con tales números. Además, y este punto es interesante, con una inconsecuencia: los números reales no han sido definidos, establecidos rigurosamente desde un enfoque aritmético, admitiendo, por el contrario, la existencia de unas «magnitudes» no definidas, apoyadas en la intuición, en la representación geométrica. Incluso Cauchy, en aras del rigor, ha de suprimir el que un límite caracterice un irracional porque de lo contrario cometería círculo vicioso.

Indefinidos los reales, base de los complejos, permite, sin embargo, establecer un cuadro de sucesivas «ampliaciones del número», con pretendido carácter lógico. Cuadro que todavía se mantiene en alguno de los textos actuales y que comprende los naturales, enteros, racionales, reales, complejos. Cuadro que muestra otra limitación tan clara como la señalada en el caso de los reales: el número natural que, en el origen, no ha sido definido. Es lo que Frege pondrá de manifiesto, y luego Poincaré apostillaría irónicamente respecto a la superabundancia de definiciones de ese número, lo que indica que ninguna es satisfactoria. Pero, realmente, no había necesidad de tal definición en los marcos existentes hasta los entornos de 1875; la necesidad de establecerla surge cuando se hace problema el estatuto del objeto. Y ello sólo se produce en los entornos de 1875.

b) Generalización inmediata del proceso de definición de los complejos como pares ordenados que satisfacen ciertas condiciones en cuanto a sus operaciones, cabe manejar ternas ordenadas como si fueran también números, siempre que las operaciones que puedan definirse entre ellas —por ejemplo, entre los «tripletes» de Hamilton— satisfagan las mismas propiedades formales que las componentes de las que se forman tales ternas o, al menos, que cuando se particularicen a dichas componentes se verifiquen todas las propiedades que las verificaban previamente. Es lo que Hamilton hará con sus ternas o cuaterniones, que van a satisfacer todas las propiedades formales salvo la de conmutatividad para el producto, por lo que constituyen el primer ejemplo de cuerpo no abeliano. La representación geométrica o aplicación práctica, en este caso, no existe como para poder mantener la admisión de dichas ternas ordenadas. La aplicación práctica vendrá después de haber sido creados. Y esta admisión se produce, pura y sencillamente, en la generalización al estilo del principio de continuidad, que en este campo adquiere la forma mencionada de mantener las leyes formales que esboza Peacock en el terreno del Cálculo diferencial e integral —al aceptar las notaciones de Leibniz frente a las de Newton— y que Hankel establecerá de manera definitiva como «principio» y apoyatura del formalismo matemático, en línea paralela al formalismo del hacer matemático en los terrenos de la extensión, geométricos, en las multiplicidades cualesquiera que preside la creación de Grassmann en su *Teoría de la extensión*, de 1844, apoyatura de los números hipercomplejos o n-tuplas ordenadas en una extensión de multiplicidad n. Multiplicidad que si, por un lado, permite ampliar la noción de espacio, independizándola de ser el receptáculo del cuerpo «real», por otro permite establecer las álgebras lineales de n objetos como siendo el estudio de las propiedades del conjunto de las combinaciones lineales de n objetos linealmente independientes con coeficientes reales o complejos que darán paso al álgebra lineal y, con ella, a la absorción de la geometría en tales terrenos algebraicos.

En la misma línea de preponderancia del signo formal del cálculo, abreviador y, a la vez, simplificador, creador y herramienta para otros haceres, se tiene lo que vino en denominarse la «notación abreviada», utilizada en primer lugar por los matemáticos ingleses, aunque parece corresponder a Lamé la idea de representar un polinomio por solo una letra, lo cual supone una gran simplicidad para la formulación y expresión en la geometría algebraica clásica, por ejemplo.

Junto a la notación abreviada y el estudio de las aplicaciones lineales que llevaba consigo, se tiene el desarrollo de los determinantes, cuya forma de escritura se debe a Cauchy desde 1812 y que a partir de 1830 cobra importancia como tema en sí y no como mera aplicación de la resolución de sistemas de ecuaciones. Además de los tipos especiales como el jacobiano, o el hessiano, obliga a definir el producto y la suma de determinantes, manteniendo una vez más las condiciones formales de tales operaciones como básicas para la caracterización de las mismas. Unido a los puntos anteriores, permite a Cayley, desde 1854, crear un nuevo tipo de algoritmo, la matriz y, con ella, lo que se calificó de «álgebra universal».

Igualmente es en 1854 cuando otro matemático británico, autor de tratados sobre ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias finitas, George Boole, publica un libro fundamental, *Las leyes del pensamiento.* En él, y ligándose a la corriente formalista británica provocada por el d'ismo de Peacock, Herschel, Babagge... en los entornos aquí considerados, expone sistemáticamente el tipo de cálculo de clases que hoy lleva su nombre, «álgebra de Boole», que cobrará toda su importancia tras la crisis de los fundamentos de los primeros años de este siglo.

c) En los terrenos algebraicos también se da paso a la creación de nuevos elementos, imaginarios. Galois, al establecer que las raíces de una ecuación constituyen un cuerpo finito, ha de introducir los «imaginarios» de dicho cuerpo, elementos ficticios que permiten que cada congruencia de grado n respecto a un módulo primo p tenga exactamente n raíces.

La creación de Galois estaba ligada estrechamente al tema de congruencias módulo un entero creado por Gauss en sus *Disquisitiones arithmeticae* de 1801. En ella Gauss da por vez primera la definición por abstracción, aunque la misma sólo será tomada como instrumento matemático a partir de los entornos de 1875. Posteriormente, Gauss llega a la creación de sus enteros complejos, es decir, complejos de la forma $a+bi$, con a y b enteros. Para ellos Gauss demostró que la teoría de la divisibilidad se mantenía como en Z, aunque con las consiguientes modificaciones; así, las unidades son, en $Z[i]$, 1, -1, i, $-i$, mientras que los números primos son aquellos que no poseen otros divisores que 1, -1, i, $-i$, α, $-\alpha$, αi, $-\alpha i$, donde $\alpha = a+bi$. El teorema fundamental de la aritmética, la descomposición única en factores primos, continúa siendo válido. La importancia en el hacer interno de los enteros de Gauss se centraba en que gracias a su creación se permite resolver el problema aritmético de hallar aquellos números naturales que se pueden descomponer en suma de los cuadrados de dos enteros. Pero mucho más importante era el hecho de tener que crear otros números, complejos, para resolver problemas aparentemente elementales de la Aritmética. No sólo lo real pasaba por lo complejo, como en geometría o en análisis, sino hasta lo mismo natural, ahora la Aritmética. Había, pues, que invertir para dar razón, mediante creaciones adecuadas de objetos, de lo que en el terreno elemental mostraba sus límites internos.

En este campo lo más destacable, equivalente a la revolución copernicana de las geometrías no-euclídeas, se me aparece la obra de Kummer, ligada al problema regio de Fermat. Este había establecido la proposición: «Es imposible dividir un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, en general una potencia cualquiera superior al cuadrado en dos potencias del mismo grado; he descubierto una demostración verdaderamente maravillosa que este margen demasiado estrecho no puede contener.» Problema abierto, dar la demostración de imposibilidad de $x^n + y^n = z^n$ anunciada por Fermat. Y, como tal problema abierto, elemental por aritmético en cuanto al enunciado, se convierte en tema, en objeto de los teóricos de números, mantenido actualmente como problema, no sabiéndose en este momento si es o no decidible, utilizando términos algo distintos a los del matemático francés.

Euler resuelve el caso particular de los bicuadrados y cubos. En este último introduce los imaginarios en la teoría de números por vez primera al tener que convertir la expresión p^2+3q^2 en un cubo, para lo cual «no hay más que suponer $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$ y $p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$...». Introducción y suposición arriesgadas, que sólo Gauss sistematiza en los entornos de 1830 mediante la introducción de los enteros complejos mencionados. La hipótesis de Fermat atrae a los matemáticos. Dirichlet, en 1825, y Lamé, en 1839, demuestran la imposibilidad de la misma para $n=5$, 7. Cauchy pretende haber resuelto el problema general. También Kummer por estas fechas.

Kummer, figura central de un problema clásico, posible tema de estudio al tipo más común cantoriano, tema de estudio que, aquí, ni siquiera se esboza; tema de estudio no orientado hacia los terrenos del nuevo humanismo criticado en 1.6. Desde 1835 se dedica al tema como obsesión. Y lo hace a partir de la descomposición $x^n=z^n-y^n=(z-y)(z-ry)(z-r^2y)\ldots(z-r^{n-1}y)$, donde r es raíz n-sima de la unidad, es decir, de la ecuación $r^n-1=0$, con $r\neq 1$. Naturalmente, ello implica una generalización inmediata de los números: r aparece como un entero algebraico racional, por ser raíz de una ecuación algebraica de grado n. Ecuación ciclotómica ligada a los problemas de Gauss de la división de una circunferencia en n partes. Pero ello implica la admisión de nuevos números, los algebraicos. Kummer acepta la existencia de tales números y, con ello, del cuerpo de números algebraicos definido por los complejos de la forma $a_{n-1}r^{n-1}+\ldots+a_1r+a_0$, con los a_i enteros y r raíz n-sima de la unidad. Como todo el problema de Fermat se reducía a la descomposición lineal mencionada y ésta al estudio de los enteros complejos, el problema se centraba en la divisibilidad de estos números enteros. Kummer supone que el teorema fundamental de la aritmética se satisface y cree haber demostrado la hipótesis de Fermat. Pero Dirichlet hace ver que tal hipótesis de unicidad factorial no se verifica, la descomposición factorial no es única —así, en $Z[\sqrt{-3}]$ utilizado por Euler, se tienen dos descomposiciones o factorizaciones diferentes de 4, como $4=2\cdot 2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$—. Y en 1844 Kummer introduce, para devolver dicha unidad, los números ideales. En 1847 escribe a Liouville: «En cuanto a la proposición elemental para estos números complejos de que un número complejo no puede descomponerse en factores primos más que de un modo (...) puedo asegurarle que no se cumple de un modo general, cuando se trata de los números complejos de la forma $a_0+a_1r+\ldots+a_{n-1}r^{n-1}$, pero que es posible salvarla introduciendo un nuevo género de números complejos, al que he llamado complejo ideal.» De esta forma Kummer daba paso al estudio de los números algebraicos y de los ideales.

Junto al estudio de las formas cuadráticas —uno de los grandes temas del hacer matemático aritmético del período iniciado con la ruptura de los entornos de 1827— hay que destacar en este campo el reconocimiento por parte de Liouville de números que no son algebraicos, que son, por ello y en contraposición, trascendentes. Liouville da un método constructivo para indicar que existen «cantidades» cuyo valor ni es algebraico ni es reducible a irracionales algebraicos, cantidades hoy llamadas «números de Liouville». Inmediatamente el problema se centra en caracterizar algunos otros números trascendentes. Hermite, en 1873, consigue dar la demostración de que e es trascendente; en 1882 Lindemann sigue la línea de Hermite y prueba que π también lo es. Los números reales han quedado, así, clasificados en algebraicos y trascendentes. La dificultad estriba en que dicha clasificación, puramente aritmética, se apoya en la aceptación geométrica de los reales. Limitación sentida en los entornos de 1875 respecto a la necesidad de definir aritméticamente dicho número real sin apoyatura alguna en las ideas geométricas. Ahora bien, es clasificación que permite dar cuenta de la limitación, del porqué de la misma, de unos problemas considerados como «clásicos» en el hacer matemático griego: la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. Los elementos que intervienen en dichas construcciones son trascendentes, de aquí la imposibilidad de resolverlos con solo la regla y el compás. Naturalmente, la explicación no es interna al hacer matemático griego, sólo se obtiene saliendo del mismo, rompiendo con la terminología de la regla y del compás y traduciendo ambos instrumentos a expresiones algebraicas y trascendentes. Expresiones de otro hacer, desde el cual cabe enfocar el antiguo, incorporando lo que de éste puede traducirse y cobrar sentido en el nuevo.

La teoría de números, inaugurada como hacer propio por Gauss y no como hacer de mero pasatiempo o hacer de aficionado, iba a llegar, en sus distintos aspectos, a la creación de otra serie de números muy distintos a los admitidos hasta entonces como únicos. Junto a los naturales —apoyados en la experiencia sensible—, los enteros, los racionales, van a adquirir estatuto de número los complejos, los irracionales con sus distintas clases —algebraicos, trascendentes—, los imaginarios de Galois, los ideales de Kummer, los hipercomplejos y cuaterniones de Hamilton, los determinantes, las matrices... La mayoría, entes «ficticios», pero que han de responder a las mismas propiedades que los enteros y ello obliga a poner de manifiesto cuáles son dichas propiedades o, al menos, cuáles son las esenciales que cabe mantener. Propiedades que se concentran en el llamado principio de permanencia de las leyes formales enunciado por Hankel y que va en paralelo al principio de continuidad. Principios que permiten la generalización y demostración de propiedades generales imposibles de establecer en el terreno «real» o «natural». Con lo cual, nuevamente, se ha invertido el proceso y, para establecer las propiedades reales o elementales de la teoría de números, se da la vuelta pasando por su demostración en terrenos ficticios, generales, para después particularizar.

Ello condiciona, igualmente, la ideología del hacer matemático, dado que las repercusiones de este tipo de inversión se van a tener no sólo en los terrenos aritméticos o algebraicos, sino en campos muy distintos; así, en los cuaterniones de Hamilton, los hipercomplejos, además de sus aplicaciones al hacer físico, van a dar lugar a las álgebras lineales que con su interpretación geométrica consiguiente originarán el álgebra lineal y la posibilidad de los espacios lineales de dimensión cualquiera, mientras que la representación geométrica de los complejos incide en la consideración, también, de dichos espacios con la idea de vector correspondiente. Incide, igualmente, el estudio de las formas cuadráticas, estudio al que cabe reducir el de cónicas y cuádricas. Ideológicamente, condiciona el enfoque del hacer matemático que se va a considerar como un hacer formal, es decir, como un hacer de objetos creados por el pensamiento del matemático, cuya «verdad reside en la concordancia de los procesos mentales entre sí», como afirmará Grasmann en el prefacio de la segunda edición de su *Teoría de la extensión,* contraponiendo este hacer con el real, cuyo objeto se encuentra en la naturaleza independiente del sujeto que se limita a reproducir dicho objeto, no a crearlo. Condiciones ideológicas que también se manifestarán en un platonismo exacerbado al suprimir la referencia a los procesos mentales tachándola de psicologismo, y teniendo en cuenta que las propiedades de los números que se van creando parecen mostrarse independientes de quien los crea. Son dos vertientes ideológicas que romperán, en todo caso, con el empirismo existente y que se manifestarán en los entornos de 1875 con total claridad, condicionando, además, el tipo de hacer del matemático que adopte uno u otro enfoque. Y ambos, básicamente, se originarán en los terrenos del hacer numérico.

2.1.5. Reflexiones

La aparición de los haceres mencionados, geométrico puro o sintético, geométrico diferencial, cálculo de variable compleja, teoría de números, álgebra como resolución de ecuaciones y eliminación en su vertiente geométrica —y la coexistencia con los convertidos desde esta ruptura en «clásicos»—, apoyados en la inversión como método, se refleja en las historias al uso como la aparición súbita de un nivel de rigor superior al hacer matemático anterior —lo cual permite considerar como coherente la idea de continuidad sin más, con una mera inflexión rigorista— que naturalmente no es explicación adecuada, sino ocultamiento y deseo de no ver la ruptura y el consiguiente nacimiento de otros haceres matemáticos, con sus ideologías consiguientes. Aumento de rigor que claramente no existe en Geometría, como he intentado poner de manifiesto, y ello a pesar de que la proyectiva, tanto en su versión sintética como en la de coordenadas y el consiguiente comienzo de la algebraica por el estudio de los invariantes, se convierte en el hacer más importante de este período; pero también inexistente en el propio Análisis, dado que se aceptan los números reales sin definición, los irracionales y los complejos sin una base suficiente, la continuidad se plantea como problema pero debe ir precisándose respecto a la continuidad uniforme... Demasiadas lagunas para poder hablar de simple aumento de rigor.

Lo que sí cabe considerar es la aparición de lo que viene denominándose la especialización, y que no es más que el confinamiento de cada trabajador en un hacer matemático determinado. Así, Poncelet, Steiner, Chasles, Staudt..., serán geómetras; Abel, analista; Galois no tuvo tiempo para ser otra cosa que algebrista... Haceres que exigen sus propios métodos y que coexistirán entre sí, con influencias mutuas sin duda, pero consideradas como marcos separados. Incluso he señalado que las tres geometrías que aparecen en este entorno de 1827 no se interpenetrarán entre sí hasta que, precisamente, desde otro marco, se vea la unión de dos de entre ellas, proyectiva y no-euclídea.

Además, y como rasgo interesante desde el punto de vista que aquí interesa, se produce otro fenómeno: la relativa independencia del trabajo matemático respecto a problemas particulares de la física, de las ciencias naturales. Los temas matemáticos se van a nutrir, por vez primera quizá, de ellos mismos, en el sentido de tener que imponer condiciones necesarias y suficientes para cada una de las propiedades que en cada hacer se establezcan, desarrollen y demuestren. La práctica teórica matemática se va a desarrollar en paralelo a los problemas físicos, pero no en íntima unión, subordinación, como era lo característico del hacer matemático anterior a la ruptura. Aunque continúe como ciencia que, en cierta forma, se elabora a partir de un esquema de realidad previa, de la realidad o materialidad de las figuras o marcas materiales dadas; aunque continúe como ciencia ligada a lo científico-natural, pero ya con su propio campo objetual. Es lo que se manifestará en Abel, con claridad, cuando falla al resolver una cuestión de mecánica racional —la acción de la Luna sobre el péndulo— o como cuando en sus cartas a Hölmboe refleja el «extraño» ambiente matemático del París oficial de los años 1826, 1827, donde lo más importante no parece ser un teorema acerca de las condiciones de convergencia de una serie, sino de si esa serie expresa adecuadamente o no una cuestión física. Lo que también quedará plasmado, con cita ya convertida en lugar común, por reiterada, en la protesta de Jacobi ante la afirmación de Fourier de que «las ideas fundamentales son aquellas que representan fenómenos naturales», al exclamar: «Es verdad que Fourier tiene la opinión de que el objeto principal de las matemáticas es el interés público y la explicación de los fenómenos naturales, pero un científico como él debería reconocer que el objeto único de la ciencia es el honor del espíritu humano, y con esta premisa una cuestión acerca de la teoría de números vale tanto como una cuestión acerca del sistema planetario.» Lo que también se refleja en el olvido de las memorias de Abel y de Galois presentadas a la Academia, la poca atención a las geometrías no-euclídeas, las discusiones en torno a los «imaginarios» y a los cuaterniones... Discusiones que, por otro lado, indicarán la ruptura sentida contra no sólo la subordinación ante otras materias, sino contra el empirismo ingenuo y que a lo largo del período iniciado en este entorno se irá acentuando, radicalizando, gracias a una separación nítida entre el hacer matemático como trabajo formal y el científico como hacer descriptivo. Lo que se refleja en Kummer, por ejemplo, que dedica toda su atención a la teoría de números, que nada debe a la experiencia, y se permite asombrar a sus contemporáneos con su dominio y enseñanza de la balística.

Naturalmente, y debo insistir en ello, una ruptura no es algo que arrase el pasado. Este continúa, aunque ya su tiempo de validez se convierta, a partir de dicha ruptura, en un tiempo pasado, con marcos de validez en cuanto a ideas originales que ya no son adecuados para el nuevo trabajo ni para un trabajo interno original, profundamente marcado en su limitación interna por el marco que surge en la ruptura. Las nuevas prácticas, además, influyen en esos haceres convertidos en clásicos, al intentar el trabajador inmerso en ellos incorporar, al menos, los nuevos temas, aunque no su contexto ideológico y con él los nuevos métodos, su espíritu revolucionario. Incorporación aparente por la que puede representar, incluso, al exterior, una fuerza superior a la de los nuevos haceres, con su tiempo abocado al futuro, pero lo único que se logra es una amalgama de confusiones que pueden impedir, a veces, la visión de lo que de más auténtico tiene la ruptura y, con ella, el nuevo hacer matemático. Por otro lado, la nueva práctica matemática hace uso del pasado, no sólo por su origen de hallar razones o invertir métodos, sino en forma de citas, de búsqueda de precedentes que permitan encontrar una especie de justificación que facilite el reconocimiento por parte de quienes siguen aferrados a un tipo de trabajo ya anticuado, pero que, por su carácter clásico, gozan de una consideración y prestigio que puede impedir el triunfo de las ideas, enfoque y métodos de la nueva práctica teórica. Es curioso, aquí, mencionar cómo a Galois se le achaca, cuando se publica, póstuma, parte de su «Prefacio», el no cumplir esta práctica «social», no mencionando en sus escritos más que a Abel, y ello por el no reconocimiento oficial de la obra de éste —aunque debo hacer constar que también menciona a Wronski y elogiosamente a Euler.

Coexistencia, con sus mutuas interrelaciones y aversiones, de varios haceres, es lo que ocurre en los entornos de 1827. Coexistencia que permitirá, en versión simplificadora, llegar a la conclusión antes mencionada de constituir un simple aumento de rigor y que las palabras de Jacobi pertenecen más a la retórica que a una realidad concreta tras la muerte de matemáticos «puros» como Galois y Abel. En todo caso, el matemático pragmático mantendrá aparentemente un realismo ingenuo, aunque insatisfactorio, aceptando el previo dato de la experiencia, aceptando que su objeto se centra en el estudio de las propiedades «reales» de las figuras dadas, obteniendo así un conocimiento más profundo de la auténtica realidad, de la naturaleza.

2.2. ENTORNOS DE 1875

El éxito de la Geometría proyectiva arrastraba consigo el estudio de los invariantes de las figuras consideradas y, con él, el enfoque algebraico.

Suponía, esta derivación, una de las primeras limitaciones del método puramente sintético. Como ya he indicado, implicaba, junto a la existencia de otras geometrías como la Geometría diferencial y las no-euclídeas, una verdadera proliferación de geometrías, una diversidad real aunque la misma viniera a enmascararse por el predominio de la Proyectiva. Es en los entornos de 1875 cuando Sophus Lie y Klein van a intentar la unificación de todas ellas atendiendo a lo que de común pudieran tener, algo común que va a suponer precisamente la desaparición de lo unificado, de lo puramente geométrico o sintético. Por su parte, el Cálculo de variable compleja creado por Cauchy alcanza un desarrollo espectacular, pero lo más significativo en el terreno del Análisis es la consolidación del concepto de número real y, a la vez, la presencia, como problema, del continuo. Simultáneamente surgen las primeras curvas patológicas por identificación continuidad-diferenciabilidad y, con ello, se hace problema la noción misma de función y, naturalmente, la noción de función de variable real que va a exigir la creación de nociones de carácter topológico. Problemas clásicos se mantienen los ligados a la teoría de números, básicamente teoría de números algebraicos, con un nuevo planteamiento debido a Kronecker y Dedekind.

Aparentemente, en los entornos de 1875 se va a continuar con unos haceres, en unas disciplinas surgidas en los entornos de 1827, aumentándolos por extensión a la vez que se pretende su definición rigurosa, en profundidad. Pero esto es sólo aparente. De hecho, lo que se produce en los entornos de 1875 es una ruptura tanto en los marcos surgidos en la anterior como en los que coexistieron con la misma. Es lo que cabe observar en los párrafos siguientes. Así, Klein y Lie se ocuparán del hacer geométrico, pero de forma que invierten el mismo, haciéndolo desaparecer, convirtiéndolo en un hacer algebraico; de modo análogo, Pasch, ligándose a la geometría moderna, la convertirá en un hacer puramente axiomático, deductivo, independiente de cualquier consideración de aplicable a espacio alguno, aunque mantenga el empirismo de que los axiomas se obtienen por abstracción de las propiedades de la naturaleza. El proceso de inversión va a ir en paralelo al efectuado en la ruptura anterior: ligándose a los problemas clásicos, o convertidos en clásicos por un trabajo de varios años, se los invierte tanto en el método de tratarlos —en el plano interno de la práctica matemática— como en el enfoque en que los mismos se consideran —en el plano ideológico de dicha práctica—. No es mera evolución, sino ruptura, que en alguno de los puntos que esbozo a continuación ha llegado a ser calificado como un auténtico «cambio en el curso del pensamiento matemático». Me limitaré a destacar, como en el caso anterior de los entornos de 1827, más que las innovaciones o aportes propiamente dichos, los factores que condicionan tales aportes y ello con la suficiente brevedad.

2.2.1. El Programa de Erlangen

«El régimen dictatorial de la idea proyectiva en geometría fue contestado primero con éxito por el astrónomo y geómetra alemán Möbius, pero el documento clásico y fundamental de la plataforma democrática en geometría estableciendo el grupo de transformaciones como principio director en cualquier tipo de geometría, y concediendo iguales derechos de consideración independiente para cada uno de tales grupos, fue dado en el Erlangen Program de F. Klein». Palabras de H. Weil de 1936, muy a tono con la época, pero que reflejan el éxito de la revolución kleineana.

En 1871, Félix Klein es el primero en establecer el enlace entre las geometrías no-euclídeas y la proyectiva, de manera explícita. Sigue, para ello, por un lado, las ideas de Beltrami, quien da el modelo que hoy lleva su nombre para la geometría de Lobatchevski sobre la pseudoesfera, superficie de curvatura negativa, y por otro las de Cayley con la noción de medida proyectiva. Klein muestra que las geometrías euclídea, de Lobatchevski y de Riemann, son los tres únicos tipos de geometrías proyectivas de curvatura constante. Lo notable del hecho: La caracterización de dichas geometrías que, como reconoce el propio Klein, se realiza por consideraciones muy distintas a aquellas que se establecen en la creación, en la introducción de las mismas; sólo rompiendo el marco en el que se habían creado, desde otra perspectiva, pueden quedar unificadas. Caracterización aparentemente bajo el predominio de la proyectiva pero, más real, bajo las nociones de propiedades intrínsecas puestas de relieve por la geometría diferencial.

Este logro conduce a Klein a otra síntesis aún más espectacular, verdadero cambio de perspectiva, que manifiesta en la disertación de octubre de 1872, *Consideraciones comparativas sobre las investigaciones geométricas modernas,* conocida simplemente como *El programa de Erlangen.* En él se comienza haciendo notar el estado bien imperfecto de la Geometría, dado que quien domina la proyectiva, por ejemplo, domina muy poco de la teoría de curvatura de superficies, a la vez que la separación entre los procesos sintético y analítico se presenta como una separación artificial, superada por el hacer matemático. Además, existen otras geometrías, quizá menos desarrolladas, como la de radio vectores recíprocos, transformaciones racionales, etc. Para Klein, todas poseen algo común, que es el objetivo de su trabajo. Y ese algo común viene dado, precisamente, por lo que los creadores no percibieron, por la noción subyacente de grupo de transformaciones. Idea central en Galois, sólo en los entornos de 1870, tras los trabajos de Jordan, la noción de grupo adquiere su relevancia. Consagrada, aquí, por Klein —influido por Lie durante la estancia de ambos en París— para la Geometría, pero requiriendo para ello un salto, una ruptura con la imagen ideológica del hacer geométrico anterior. «Hagamos abstracción de la figura material que, desde el punto de vista matemático, no es esencial, y no veamos en el espacio más que una multiplicidad de varias dimensiones...» Esta es la clave: el espacio deja de ser un receptáculo homogéneo, una forma de nuestra sensibilidad o entendimiento para convertirse en una multiplicidad de un número cualquiera de dimensiones en la cual operan «transformaciones», correspondencias entre los elementos de la multiplicidad, pero no de una manera aislada, sino cumpliendo unas leyes formales determinadas, las leyes de grupo. Con lo cual la cuestión central de la Geometría se convierte en la siguiente: «Dadas una multiplicidad y un grupo de transformaciones de la misma, estudiar los seres desde el punto de vista de las propiedades que no son alteradas por las transformaciones del grupo». Cuestión general que puede particularizarse para las transformaciones lineales, en cuyo caso el geómetra tiene como objeto de estudio «desarrollar la teoría de los invariantes relativos a ese grupo».

De lo que se trata no es de estudiar los seres de una multiplicidad como objetos en sí, sino la cuestión inversa, como explícitamente declara Klein; se trata de encontrar las propiedades que permanecen invariantes, inalteradas por los grupos de transformaciones. Pero entonces, cada grupo que se considere es el que caracterizará a una u otra geometría. En otras palabras, no son los objetos en un espacio amorfo los que determinan una geometría; son las propiedades formales de los grupos de transformación las que definen las propiedades geométricas de los objetos y, a la vez, del espacio en el cual operan.

Es una inversión radical, que hace variar la perspectiva, el enfoque del objeto geométrico. Desde esta ruptura se pueden tomar los grupos de transformaciones en toda su generalidad; cada uno de ellos determinará su geometría correspondiente. Las geometrías quedan así clasificadas y estructuradas precisamente por el grupo que las caracteriza. Esto conlleva la posibilidad de construir las geometrías que cada matemático prefiera, siempre que consiga dar un grupo adecuado. La libertad creadora de geometrías —problema nuevo— dependerá, entonces, de la existencia de los distintos grupos de transformación que puedan establecerse y, posteriormente, cabe «adaptarle convenientemente nuestras concepciones geométricas». Libertad no sólo de geometrías, sino de espacios en los cuales tengan sentido las mismas.

Los trabajos de Sophus Lie, de Klein, se orientan en esta línea. A partir de los grupos de transformación pueden estudiarse no sólo los elementos geométricos, que ahora se muestran como desligados totalmente de la propia representación sensible, figurativa, no siendo más que «puntos» en una multiplicidad abstracta, sino otros elementos como los puramente algebraicos o del análisis, como pone de relieve Lie en las transformaciones infinitesimales y en las ecuaciones diferenciales, Klein en las funciones modulares elípticas o Poincaré creando a partir de 1875 el grupo de las funciones meromorfas y automorfas con apoyatura intuitiva en la geometría hiperbólica de Lobatchevski. El grupo constituye la estructura base que, convenientemente traducido, permitirá enunciar propiedades geométricas, o analíticas... Ha desaparecido, con ello, la noción de geometría como estudio de los objetos de *el* espacio. Ahora, el objeto de estudio es este mismo espacio, esa multiplicidad abstracta de objetos no previamente dados o determinados, con sus transformaciones correspondientes.

Lo que interesa destacar en la ruptura de Klein, básicamente, es el hecho de haber marcado la limitación de las geometrías tanto en el sentido querido por Poncelet, como en el de coordenadas; haber invertido la noción de espacio pasando a manejar las multiplicidades cualesquiera en lugar del espacio sensible que había sido elevado a categoría de espacio geométrico absoluto y, fundamentalmente, haber puesto de relieve que el matemático maneja multiplicidades abstractas y transformaciones de las mismas.

Sin embargo, Klein mantiene la intuición geométrica como última apoyatura para el trabajo matemático, no planteándose, por ejemplo, como problema la naturaleza de esas multiplicidades, su estructura interna, generalización de la noción de espacio, ni la de transformación. Desde otra ruptura provocada por las mismas fechas, corresponderá a Cantor plantear como problema esas naturalezas, sus enlaces, las posibles relaciones entre distintas multiplicidades...

Igualmente cabe reseñar que el programa kleineano presenta otra limitación, esta vez en su propio terreno geométrico, limitación puramente interna. Klein unifica las geometrías, cambiando el objeto de las mismas, mediante el grupo de transformaciones. Pero ello no es toda la geometría. Por un lado las geometrías infinitesimales quedan fuera del marco porque no pueden caracterizarse por grupo de transformación alguno; por otro, la geometría de posición no proyectiva, el análisis situs o topología tampoco entra en el juego, aunque Poincaré cree la topología algebraica o combinatoria mediante la caracterización del grupo fundamental a partir de 1895. Son limitaciones sentidas por el propio Klein al señalar: «Su grupo estaría constituido de hecho de modo diferente a los considerados hasta aquí», aunque deja la puerta abierta a una caracterización también por grupo de transformaciones, insuficiente para el estudio de la diversidad de espacios que la topología conjuntista va a poner de manifiesto. Son limitaciones a las que cabría agregar otras, que constituirán el motivo de ulteriores revisiones del Programa de Erlangen y, con ellas, de la creación de nuevas disciplinas del hacer matemático, ya en los entornos de 1939.

2.2.2. Multiplicidades, conjuntos

Si 1872 ve el lanzamiento del Programa de Erlangen por el cual se provocaba una inversión total en los terrenos geométricos al quedar supeditado el hacer geométrico al de transformaciones, con su estructura de grupo, entre elementos cualesquiera de multiplicidades cualesquiera, 1872 ve lo que desde un enfoque evolucionista se quiere la culminación de la construcción de los números irracionales, que no es más que el comienzo de una inversión profunda en el hacer del Análisis matemático, a la vez que en la teoría algebraica a más largo plazo. Aunque ambos puntos aparezcan aparentemente alejados, el hecho de la inversión y la ruptura consiguiente con el hacer anterior, con las ideologías previas condicionadas por el trabajo interno y condicionantes de ese mismo trabajo es, en ambos aspectos, el mismo; incluso los matemáticos que intervendrán en las rupturas en ambos campos, analítico, algebraico, serán los mismos, aunque a veces polemicen entre sí, en ocasiones violentamente.

2.2.2.1. *Continuidad y números irracionales*

Con este título publica Dedekind en 1872 un ensayo, hoy clásico. Publicación motivada por el ambiente creado, ya que las ideas contenidas en él son muy anteriores, según confiesa explícitamente el autor, pero ideas demasiado revolucionarias para ser publicadas antes. En el ensayo se expone el concepto de continuidad de Dedekind y la creación del número irracional a partir de los racionales que esté de acuerdo con dicha idea previa de continuidad. El mismo año, y poco antes de la publicación de Dedekind, Heine y Cantor han dado otra construcción de los números irracionales; en su misma línea Kossak y el maestro de los últimos, Weiertrass, han elaborado otra construcción de los irracionales. Adelantado en Francia, Méray, en 1869, publicó otra, en paralelo a la de Weiertrass. En dos grandes líneas se centran las distintas construcciones: *a*) Las que atienden básicamente al concepto de distancia: Weiertrass, Méray, Cantor; *b*) La que atiende al orden: Dedekind. En 1883, Cantor perfeccionará su construcción para convertirla en uno de los instrumentos más operativos del hacer matemático, más que el proceso de cortaduras de Dedekind, cuya clave se centra en la claridad con que expone la inversión y la consiguiente ruptura tanto con el hacer intrínseco anterior como con la ideología que lo condicionaba, así como, por esa inversión tan profunda, la no comprensión clara de la misma por parte de algunos matemáticos contemporáneos.

Aparentemente las construcciones de los irracionales seguían el proceso clásico, al menos en su línea *a*). Constituían un perfeccionamiento, un aumento de rigor, apoyado en el deseo de evitar los pretendidos círculos viciosos cometidos por los matemáticos anteriores, los formados en el hacer de los entornos de 1827. Para éstos, el límite de una serie convergente definía un número real, aunque para establecer dicho límite se requería el dato previo de dicho número. Naturalmente el círculo es sólo aparente: lo es desde que el matemático se sitúa en el terreno puramente aritmético; no lo es si se admite la existencia de la idea geométrica como soporte y, en ella, la creencia en las magnitudes geométricas. Desde este enfoque, algunas magnitudes geométricas eran medibles, pero entonces surgía el problema de aquellas magnitudes geométricas que, existentes, no eran medibles. Magnitud inconmensurable pero «existente» geométricamente, por lo que debía existir un número, irracional, que la representara. Esta intuición geométrica, en el concepto de sucesión, tenía su imagen en la idea de distancia entre puntos y así se aceptaba la idea de límite. En términos de Cauchy de 1821: «Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo terminando por diferir de él tan poco como se quiera, entonces este último se llama límite de los demás. Así, por ejemplo, un número irracional es el límite de las distintas fracciones que dan valores cada vez más aproximados al mismo.» La contradicción en estas frases es clara: El límite, si irracional, no existe si previamente los irracionales no se consideran como dados. El propio Cauchy suprimió la última frase en edición posterior.

Es «evidente», sobre los puntos de una recta, que las distancias del punto fijo, del límite, a los restantes elementos de la sucesión, se hace cada vez más pequeña. También, que la diferencia entre dos valores cualesquiera de la sucesión se va haciendo muy pequeña cada vez que ambos se tomen próximos al valor fijo, al límite. Es el criterio dado por Cauchy respecto a la convergencia de una sucesión, independientemente del límite o punto fijo, ya que para valores de n muy grandes, los términos s_n, s_{n+1}, ..., difieren «uno de otro» en cantidades infinitamente pequeñas. Desde el terreno de la intuición geométrica, ello es, insisto, evidente. Aritméticamente, la suficiencia del criterio de Cauchy, la suficiencia de $|s_n - s_{n+1}| < \varepsilon$, para que $\langle s_i \rangle$ sea convergente, requiere el previo conocimiento del número real.

Es Weiertrass el primero en señalar esta laguna, esta limitación. Y el primero en dar una solución, apoyada en ideología previa: la de aritmetizar todo el Análisis, algebrizarlo suprimiendo todos los elementos trascendentes y geométricos en el mismo. En octubre de 1875 lo expresaría con nitidez en carta a Schwart refiriéndose al análisis de variable compleja creado por Cauchy y seguido por Riemann que hacen uso «de trascendentales (para expresarlo brevemente) para el establecimiento de teoremas algebraicos simples y fundamentales». Ello implica la búsqueda de un tratamiento sistemático, pero intrínseco aritmético, comenzando por los fundamentos numéricos. Y así, para Weiertrass, un número estará determinado cuando se conozcan sus elementos y las veces que cada uno de ellos aparece en él. Una cantidad numérica es un agregado cuyos elementos y el número de veces que intervienen están perfectamente determinados. Y es aquí donde se ha producido una inversión conceptual: los números que se vayan a definir aparecerán como agregados de elementos previamente definidos. Agregado, sistema, colección..., no objeto o elemento individual, sino conjunto caracterizado por alguna propiedad común. Y gracias a esta inversión —que destierra la imagen geométrica por su individualidad— podrá aceptarse el número real y, tras ella, la de límite de números reales o de números racionales. Es decir, en lugar de primero el límite y después el real, ahora será el real y después el límite. Inversión no puramente mecánica sino conceptual, deseo subrayar, apoyada en colocar en el manejo del hacer matemático el agregado antes que el objeto individual. Y que permite introducir nociones como la de punto de acumulación de un agregado de infinitos elementos, cosa imposible de realizar si no se admite tal agregado previamente.

Cantor utiliza, para definir el número irracional, en lugar del criterio de Weiertrass de los agregados de infinitos elementos que satisfacen una condición, las sucesiones de números racionales que satisfacen el criterio de Cauchy, y en 1871, en noviembre, da «algunas explicaciones, o más bien indicaciones» de esta construcción en un ensayo acerca de las series trigonométricas. Para ello ha de utilizar el dato previo de un sistema o agregado de números racionales, dados en su totalidad; en el mismo se construyen las sucesiones de Cauchy o series fundamentales, como las denominará Heine. Y serán las sucesiones de Cauchy las que definan un nuevo sistema de números, el de los reales. Dos sucesiones definen el mismo real, $\langle a_i \rangle$ y $\langle b_i \rangle$, siempre que la sucesión $\langle a_i - b_i \rangle$ tenga como límite cero. La operación con sucesiones da paso a la estructura de cuerpo al que puede dotarse de una ordenación. Los racionales quedan incluidos en este cuerpo dado que una sucesión como $\langle a \rangle$ define el número a. Además, en este cuerpo toda sucesión tendrá límite, es decir, el nuevo sistema de números —que realmente son clases de equivalencia de sucesiones fundamentales— es un sistema completo. Por otro lado, Cantor da la imagen geométrica de dicha completitud, imagen geométrica o propiedad fundamental del continuo señalando que a cada número real así construido se le asocia un punto y recíprocamente, lo que no ocurre con el sistema de números racionales. Esto último permite dar cierta «objetividad» a la construcción cantoriana, a las magnitudes numéricas, construidas desde un enfoque puramente formal aritmético, ya que «es esencial en la teoría aquí expuesta, según la cual la magnitud numérica, no teniendo en general ninguna objetividad al principio, sólo aparece como elemento de teoremas que tienen cierta objetividad...». Carecer de objetividad equivale a carecer de «realidad», y ello implica que los números reales así construidos, atendiendo exclusivamente a las condiciones formales de las operaciones aritméticas, carezcan de existencia real alguna. Son puras creaciones del espíritu matemático, apoyadas en el formalismo, es decir, en la coherencia de los procesos mentales a la vez que en la subsistencia de las propiedades de los números a partir de los cuales se realiza la construcción. Es la misma línea, ya explícita, del hacer matemático formal, no real, que expresara Grasmann y que ya he mencionado, indicando aquí que la obra de Grasmann permaneció en la oscuridad precisamente hasta estos entornos, en los cuales realiza la segunda edición y se difunden sus ideas, antes prácticamente desconocidas por pertenecer a un marco de validez posterior a las fechas de su fabricación.

Es la misma ideología la que preside la construcción que efectúa Dedekind. Frente a la intuición geométrica que exige el proceso de abstracción real aristotélico, frente a la aproximación a un valor fijo límite recurriendo a las evidencias geométricas o apoyándose en ellas, Dedekind contrapondrá el proceso creador puro aritmético. «Considero el total de la aritmética como una consecuencia necesaria, o al menos natural, del acto aritmético más simple, el de contar, y el contar mismo como la creación sucesiva de la serie infinita de los naturales en la que cada individuo está definido por el predecesor inmediato; el acto más simple es el paso de un individuo ya formado para formar el nuevo consecutivo.» Los restantes números «han sido creados por el espíritu humano». Su existencia, la puramente lógica, formal. La intuición geométrica, en tal acto creador, servirá en todo caso de guía, pero nada tiene que hacer en el verdadero trabajo matemático. Desde este punto de vista, Dedekind pasa a definir, a caracterizar la noción de continuidad y, con ella, la de número irracional. Por supuesto rechaza la previa existencia de magnitudes geométricas medibles, concepto que le parece no suficientemente claro, ni definido rigurosa, aritméticamente, constituyendo un subterfugio intuitivo para no dar una auténtica caracterización. En este sentido es interesante observar cómo Dedekind da ejemplos de espacios discretos —lo que supone, para la época, una verdadera revolución—, rechazando la idea de la necesidad del espacio euclídeo continuo e indicando cómo dichos espacios discretos no sólo son concebibles, sino que pueden fabricarse en concreto; así, el formado por los puntos con distancias dadas por números algebraicos. La idea de configuración continua no es, por ello, necesaria; el matemático puede crear los espacios que le satisfagan, incluso discretos.

Dedekind parte del cuerpo de los números racionales, para lo cual da la axiomática del mismo en perfecta definición implícita o por postulados, en lugar de seguir la línea del análisis como Weiertrass y Cantor, que exigen la noción de distancia entre elementos de las sucesiones de los agregados. Dedekind es más radical pensando que esa noción de distancia también tiene connotaciones geométricas y pueden existir agregados en los cuales la misma no sea válida. Y elige la relación de orden observando que el cuerpo de los racionales está totalmente ordenado. Cadena, y aquí viene concesión a la imagen geométrica, comparable con la línea recta, observándose que a cada racional se le asocia un punto, pero no a la inversa. Dedekind pasa, entonces, a caracterizar aritméticamente tal continuo, que es más completo que el cuerpo de los racionales, continuo que aparece enfocado como una ampliación, como una extensión algebraica del cuerpo totalmente ordenado de los racionales, extensión que ha de ser completa, y ello porque no debe confundirse la densidad —entre dos elementos siempre existe otro— que poseen los racionales, con la continuidad que expresa la idea intuitiva de que no exista hueco alguno entre dos elementos cualesquiera. La noción de continuidad, su esencia, se le muestra, entonces, en el principio de cortadura: Si se divide una línea en dos partes y todo punto de una es menor que los de la segunda, entonces existe uno y sólo un punto que provoca la división en dos partes. Por contraejemplo, se ve que hay cortaduras que no están producidas por racionales. El contraejemplo elegido procede de «los primeros elementos de la teoría de números». Naturalmente, tras esta introducción de la noción de continuidad en lenguaje geométrico, Dedekind pasa a caracterizarlo aritméticamente.

No entro, al igual que en las construcciones antes citadas, en los detalles de la realizada por Dedekind, o en alguna crítica como la esbozada por Weber de resultar confusa esta construcción en el sentido de que el número irracional no es la cortadura misma, sino algo distinto que corresponde a la cortadura, al igual que los números racionales generan cortaduras pero no son la cortadura, que es un concepto creado por nuestra potencia mental. Lo que sí quiero destacar es el modo de razonar explicitado por

Dedekind: cada cortadura aparece como un par (A_1, A_2) de clases de infinitos elementos y para poder comparar cada cortadura o bien operar con ellas, Dedekind ha de realizar un doble proceso, elegir un elemento de cada clase, operar o comparar esos elementos entre sí, y volver a la clase de la cual el nuevo objeto es elemento. Este doble proceso es lo esencial. Porque obliga a manejar tanto las clases infinitas en sí, como representantes de dichas clases, pero representantes como «elementos de» una clase; en otras palabras, no es el objeto quien dará paso a la clase, sino la clase quien da paso al elemento que la representa. Naturalmente hay que demostrar, en esta inversión, que la elección del objeto de cada clase y la operación consiguiente entre dichos objetos, no influye en la clase final. Es lo que Dedekind señala en la sección VI en los términos «Es fácil ver que todo se reduce a demostrar que las operaciones aritméticas poseen una cierta continuidad» y que hoy se calificaría con el término de uniformidad de dichas operaciones.

Por ser más radical y no aparecer enmascarado como un proceso más del Análisis ligado a los conceptos de sucesión, se opondrán objeciones a la construcción de Dedekind, con sus sucesivos actos creadores a partir del número natural y, fundamentalmente, con el proceso demostrativo señalado, clave de todo el nuevo hacer que se inaugura con las rupturas de este entorno. La más interesante, la de Stieljes, indicando que la originalidad de Dedekind no existe, dado que toda su exposición no es otra que la que puede encontrarse en los Elementos de Euclides cuando transcribe la construcción de Eudoxio. Es crítica que, por otro lado, se ha mantenido, incluso hoy día se sigue indicando que la obra de Dedekind no es otra cosa que una modernización de la teoría de Eudoxio. La inversión es tan profunda, que la misma no se ve, al menos por todos los matemáticos. Decir que $\sqrt{2}\,\sqrt{3}=\sqrt{6}$ ya estaba demostrado por los matemáticos griegos aritméticamente, es olvidar el explícito rechazo que Dedekind hace de la idea de magnitud medible, por un lado; olvidar que los números racionales como cuerpo totalmente ordenado no existían en el hacer matemático griego, por otro; no ver que se manejan clases con infinitos elementos en lugar de elementos como objetos individuales y que ello exige un nuevo modo de razonar, además de la aceptación de una serie de principios, de una ideología diferente.

Naturalmente, la limitación de la construcción de Dedekind —como la de Weiertrass, la de Cantor— aparece en otro lugar: los agregados, las clases, los sistemas no han sido definidos, caracterizados en parte alguna, apoyándose en la intuición de los mismos, en la intuición que se pretendía desterrar. Además, se hace uso de tales sistemas, con infinitos elementos, dados en acto, presencia del infinito actual que los matemáticos habían rechazado y que, al menos, se planteaba como problema nuevo, problema a resolver. Por otro lado, en Dedekind se parte de los racionales como ya clasificados, ordenados, en dos sistemas, haciendo uso del cuantificador universal como en «todos los elementos» de uno de los sistemas han de ser menores que «todos» los elementos del otro. Manifestación claramente no constructiva, sino existencial. Razonamiento global que no permite dar una regla de aquello que, en dicho razonamiento, se pretende construir.

2.2.2.2. *Conjuntos lineales*

A cubrir la laguna de la caracterización de los sistemas, agregados o clases que ha surgido en la inversión de la caracterización del número irracional, dedicará sus esfuerzos Cantor en colaboración, oculta colaboración, con Dedekind. Es punto en el que, por otro lado, inciden otras consideraciones, procedentes principalmente del terreno del Análisis que es profundamente modificado.

El nuevo enfoque ideológico de creación intelectual del matemático, al aceptar la existencia de las clases como agregados de elementos cualesquiera como dato inicial, permite crear una nueva serie de conceptos en el terreno, en el hacer del Análisis, inconcebibles en el hacer anterior, en el marco existente a partir de los entornos de 1827. Por lo pronto, el establecimiento de los principios o criterios del continuo, como los mencionados de Dedekind, el de los intervalos encajados de Cantor, el de Weiertrass del punto de acumulación de conjuntos acotados... Además, Dedekind define explícitamente el intervalo de números reales, Weiertrass maneja la noción de punto de acumulación... Nuevo hacer desde el cual el contexto del Análisis cobrará un aspecto radicalmente nuevo al desarrollar Cantor, fundamentalmente, las estructuras de los intervalos abiertos, de los cerrados, las definiciones de conjunto derivado, de conjunto perfecto, de conjunto denso..., aunque todo ello en el cuerpo $\mathbb{R}$, demostrando, por ejemplo, que todo intervalo abierto de $\mathbb{R}$ puede considerarse como la unión de una familia numerable de sus componentes siempre que los mismos sean disjuntos entre sí. Nociones de carácter esencialmente topológico, por otro lado, nociones que se desligarán de este hacer estrictamente analítico-real más tarde.

Junto a las consideraciones anteriores intervendrán en la ruptura cantoriana otras, también procedentes del Análisis. Así, la aparición de las curvas patológicas o teratológicas surgidas de la identificación entre los conceptos de continuidad y diferenciabilidad de una función. En 1872-4 Weiertrass comunica a Du Bois-Reymond un nuevo ejemplo de función continua no diferenciable —comunicación a la Academia de Berlín el 18 de julio de 1872 y a Du Bois-Reymond en carta de 1874—. Este último, por su parte, da en 1873 un ejemplo de función continua en $]-\pi,\pi[$ cuya serie de Fourier no es convergente a ningún punto particular, así como otros ejemplos en que la serie converge en los puntos de un conjunto denso. El hecho de la aparición de estas funciones constituye un manifiesto contra la aceptación en el Análisis de la intuición geométrica que identificaba la diferencial de la función con la recta tangente en un punto a la curva. Ello se pone más de manifiesto con la correspondencia biyectiva creada en 1878 por Cantor de $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}$ siempre que la misma no sea continua y, sobre todo, con la curva de Peano que cubre un cuadrado. También con la función de Cantor que da el llamado «conjunto perfecto de Cantor» que es cerrado, perfecto, no posee intervalo abierto alguno y tiene la potencia del continuo. Su función inversa es discontinua, pero su curva integral, que es continua, no es primitiva porque no admite derivada. Son hechos, todos ellos, que obligan a una revisión radical de los conceptos que intervienen en estos elementos, que dan las limitaciones a que el Análisis surgido de las rupturas de los entornos de 1827 se veía condicionado.

A la vez obliga a revisar la idea de «curva» que se presentará, a partir de Jordan, como un conjunto de puntos que puede ponerse en correspondencia biyectiva con los puntos de un intervalo cerrado, suprimiendo así la «idea» del trazo sobre el papel. Inmediatamente, el de multiplicidad o espacio, así como los elementos característicos del mismo, sus invariantes. Es en los escritos de Cantor y en su correspondencia con Dedekind donde primero van surgiendo estos problemas, como el de la dimensión de una multiplicidad. Problema que no se conseguirá resolver hasta entrado el siglo XX, cuando Poincaré propone una definición inductiva de la dimensión, que Brouwer reconoce insuficiente al año siguiente, 1912, proponiendo otra más adecuada.

Con ello se crea, realmente, la Teoría de funciones de variable real, apoyada o fundamentada en la teoría de conjuntos y en las nociones topológicas ligadas a la misma. En este contexto Cantor sistematiza todas las nociones pertinentes en cinco memorias fundamentales entre 1879 y 1883, que se pueden considerar, como el Programa de Erlangen de Klein, como una especie de «línea divisoria» en el hacer matemático.

Por otro lado, es contexto en el cual va a surgir la creación cantoriana de los distintos tipos de infinito. En 1874 Cantor publica la demostración de la numerabilidad de los números racionales y de los algebraicos y la no numerabilidad del continuo. Se da paso, así, al término «potencia» de agregados y, con él, a los diversos grados de lo infinitamente grande, con sus números ordinales y cardinales transfinitos correspondientes. El infinito actual no sólo hace acto de presencia de manera explícita, sino que se estratifica, incluso, en diversos tipos, con sus cardinales correspondientes y, sobre todo, con su forma de razonamiento por inducción transfinita.

La inversión, radical, que hace comenzar el trabajo matemático por el infinito actual para luego acotar y alcanzar el número finito, mero rincón de dicho infinito actual, ha hecho que los métodos demostrativos varíen, apareciendo los métodos globales no constructivos en contraposición a los directos que de manera consciente se mantenían todavía en 1872 con la demostración, por ejemplo, dada por Hermite de la trascendencia de *e*. El agregado y la aplicación entre agregados, que en Cantor se quiere fundamentalmente biyectiva, mientras que en Dedekind inyectiva, van a convertirse, al igual que en el Programa de Erlangen, en los objetos centrales del trabajo matemático.

Manteniendo la dinámica creadora, Cantor no va a limitarse a los agregados lineales de puntos, base del Análisis de variable real, como acabo de indicar, sino que generalizará a agregados de elementos cualesquiera. Y es en 1895 y 1897, cuando formula, de manera sistemática, su teoría intuitiva de conjuntos en dos memorias fundamentales. Obra que inmediatamente concitará la mayor problemática por enfocarse su contenido como base y apoyatura de todo el hacer matemático. Obra que provocará la aparición de antinomias, de problemas que aún hoy permanecen abiertos y que motivaron las duras críticas de Kronecker no sólo contra Cantor sino contra Weiertrass y todos quienes apelaban a los métodos globales no constructivos.

2.2.2.3. *Consecuencias: Nuevas disciplinas*

La ruptura que la inversión conceptual señalada provoca en el hacer matemático es completa. Por un lado, en el terreno ideológico, dado que a partir de la aceptación de un acto libre del matemático se va a llegar a un platonismo extremo, mientras que la teoría de conjuntos va a mostrar fallos en su propia fundamentación que conducirán, a partir de los últimos años del siglo en que la misma cristaliza, a la creación de una nueva materia, lindante con la filosofía, el de Fundamentos del hacer matemático, en el que se adoptan como objetos los cálculos lógicos o formales —como el proposicional y el de predicados con o sin igualdad—, las funciones recursivas, el sistema formal con sus problemáticas de consistencia, completitud, independencia, adecuación..., problemas de predicatividad... Y todo ello acompañado de polémica entre distintas concepciones previas de dicha fundamentación, conjuntista-axiomática y constructivista principalmente. Por otro lado, en el plano estrictamente interno lleva a la creación de un haz de nuevas disciplinas, de las que a continuación voy a dar meramente el nombre, la etiqueta con que se las conoce ya que, todavía hoy, son las que configuran cualquier estudio de las ciencias matemáticas. Por lo pronto, ya he indicado, realmente, dos de ellos: la Teoría de conjuntos y la Teoría de funciones de variable real, que adopta una estructura calificable actualmente de clásica, dado que en la actualidad se tiende a la exposición del Análisis apoyándolo en el Algebra lineal.

Desde 1884-5 Cantor pasa a asociar a cada intervalo acotado una «medida» del mismo o un volumen si se sitúa en $\mathbb{R}^n$. Tras los trabajos de Stolz y Harnack, por una parte, de Peano y Jordan, por otra, corresponde a Borel el mérito de clarificar la idea del término «medida de un conjunto». Consiste en asociar como medida de un intervalo acotado la suma de las longitudes de sus componentes. Para ello debe introducir, en 1898, las clases de conjuntos medibles que posteriormente se calificarán de «borelianos» y que constituyen la estructura denominada de anillo de Boole, en el cual puede definirse una función de conjunto con aditividad finita. Esta introducción constituye un punto clave porque de ella deriva, tras los trabajos de Baire, una clasificación de los conjuntos de puntos de carácter topológico con su enlace al estudio de las funciones continuas; y, por otro lado, permite extender la noción de integral como medida. Este último hecho es el realizado por Lebesgue en su tesis doctoral de 1905 dando paso a lo que se califica de última generalización del concepto de integral y que, naturalmente, es otro concepto distinto al de integral procedente de Cauchy y Riemann, la calificada como integración Lebesgue.

En 1913 Radon da la noción general de medida apoyándose para ello no ya en la integral de Lebesgue, sino en la de función de conjunto completamente aditiva. Se origina así la *teoría de la medida,* una disciplina englobadora de la integración así como de ramas particulares de la misma, del tipo del cálculo de probabilidades, análisis armónico, teoría espectral...

Al establecer como elementos básicos del hacer matemático el conjunto base de elementos cualesquiera y la aplicación u operación, cabe generalizar la construcción cantoriana y tomar como elementos u objetos del conjunto base no ya puntos de un intervalo real, sino funciones de tales puntos. Es en 1884 cuando Ascoli pasa a considerar las ideas cantorianas no ya en conjuntos o agregados lineales de puntos, de magnitudes numéricas, sino agregados cualesquiera en los cuales los objetos o elementos sean «curvas», sean a su vez funciones. Inmediatamente Volterra, 1887, introduce las «funciones lineales» donde el argumento de una función es otra función. El término de Volterra será rebautizado por Hadamard con el nombre de funcionales, mientras que Paul Levy, en 1922, designará este nuevo campo con el nombre de *Análisis funcional.* En él se manejan espacios de funciones o conjuntos de funciones como algo análogo a los conjuntos de puntos. Para ello, en paralelo al estudio de los agregados lineales donde el término geométrico «punto» se utiliza como sinónimo de número real y se hace uso de la imagen geométrica del «continuo» y sus intervalos, en el estudio de los espacios funcionales se introducen términos geométricos representando los objetos de dichos espacios, ahora considerados como n-dimensionales. Tras los trabajos de Hilbert acerca de las ecuaciones integrales y de Fredholm de 1903, que dan paso al denominado «espacio de Hilbert», esta materia cobra rango de teoría independiente, nueva a incorporar a los haceres matemáticos anteriores.

Por otro lado, trabajando simultáneamente en ecuaciones en derivadas parciales y geometría diferencial, Poincaré introduce las formas diferenciales exteriores —lo que también hace, en paralelo, E. Cartan—, con objetivo de crear invariantes integrales, originando así lo que posteriormente se calificaría de *geometría diferencial cualitativa.* En ella se abandona la integración directa de las ecuaciones en forma finita, así como los métodos de aproximación o integración numérica. Como señalaría P. S. Alexandrov, «El objeto básico de esta teoría es, en esencia, la topología del campo de direcciones y el sistema de curvas integrales de la ecuación diferencial dada».

La construcción de Cantor de los números reales, precisada en 1883, como clases de equivalencia en el conjunto de las sucesiones de números racionales, clases dadas por la relación de equivalencia que constituyen las sucesiones regulares o de Cauchy, se muestra como realmente fecunda. Borel obtiene, siguiendo la línea expositiva de Heine de 1872 —y en la cual, además de la construcción de Cantor se da el criterio de continuidad uniforme— la idea del subrecubrimiento finito, con la proposición que hoy lleva el título de teorema de Heine-Borel o de Borel-Lebesgue. Es Fréchet quien, a partir de 1906, extiende estas ideas. La clave, la constitución de un espacio como conjunto de objetos abstractos dotado de una función numérica —la distancia— que satisface ciertos postulados; con lo cual se dota de una cierta estructura a este espacio a la vez que permite hablar en él de la vecindad o proximidad de dos de sus objetos, es decir, a la vez que aparece una topología. Estudiando lo que pueden tener en común los conjuntos o agregados de puntos, los agregados lineales y los conjuntos de funciones, Frechet llega a establecer la existencia de los espacios que calificará de «distanciados» y que desde Hausdorff se conocen con el nombre de *espacios métricos*. A la vez, la construcción de los irracionales de Cantor, con la idea de subrecubrimiento finito, permite caracterizar los espacios compactos siendo tal condición la que sirve como definición de los mismos, mientras que la convergencia de la sucesión de Cauchy de los elementos de un espacio determinado se convierte en el modelo tipo de demostración, en el criterio de completitud de un espacio uniforme. Sin embargo, los espacios métricos o de Frechet mantienen su rango privilegiado y es a partir de los trabajos de Banach y su escuela polaca y de la escuela rusa que pasan a englobarse en los espacios vectoriales topológicos, a partir de 1922, lo que permitirá, entre otros, absorber el Análisis funcional, convirtiéndose en un hacer —bajo este último nombre— que constituye todavía hoy uno de los terrenos más dinámicos del trabajo matemático.

Precisamente las familias de los entornos de un punto —familia de conjuntos que lo tienen como elemento—, independizándose de la noción de distancia, de la métrica —que era como lo había introducido Frechet— permitirá caracterizar los *espacios topológicos* en general. A partir de esta idea Hausdorff, en 1914, dará paso a la Topología conjuntista general, tal como prácticamente se la conoce hoy día.

La Topología combinatoria tiene, por su lado, un origen calificable de anterior, apoyado en la aritmética y en la geometría, siendo Poincaré el creador de la misma con sus memorias iniciadas en 1895. En ellas crea la técnica de los complejos simpliciales aplicable a variedades triangulables, dando la noción del grupo de homotopía, del grupo fundamental, así como la característica de Euler-Poincaré y las nociones de ciclo, cadena, producto de intersección de cadenas...

2.2.3. Los números algebraicos. Algebra; Geometría algebraica

En la misma línea de inversión y ruptura con el hacer aritmético se iban a situar tanto Kronecker como Dedekind al retomar la creación de Kummer de los ideales complejos. En lugar de limitarse a las unidades en ciertos cuerpos de números algebraicos como hizo Kummer —los ciclotómicos en particular— Dedekind pasa a ocuparse de los números algebraicos en general, es decir, de los que son raíces de ecuaciones algebraicas con coeficientes racionales enteros.

Un número algebraico es aquél que satisface una ecuación de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con los a_i números racionales. Si $a_n = 1$ y los a_i son enteros, entonces se dirá a toda raíz de la ecuación anterior, entero algebraico de grado n. Así, $x = 1 + \sqrt{-3}$ es entero algebraico de grado 2, porque satisface la ecuación algebraica —llamada su ecuación de dependencia— $x^2 - 2x + 3$.

No es fácil comprobar que la suma o producto de números algebraicos —o de enteros algebraicos, si se particulariza— sean números algebraicos. Si se consigue demostrar este hecho, entonces se habrá obtenido una extensión del anillo de los enteros o del cuerpo de los racionales, creando un nuevo anillo o cuerpo algebraico de grado n. En otras palabras, si r es un número algebraico de grado n, el conjunto de expresiones obtenidas a partir de r por suma, multiplicación, sustracción y división será un cuerpo numérico algebraico, engendrado por r, y de grado n. En general se indicará por $K[r]$ y, si se parte de un anillo A, por $A[r]$. La construcción de un anillo de este tipo es el gran mérito de Dedekind y se apoya en un proceso de linealización. Así, cabe demostrar que «el anillo $A[r]$ es un A-módulo finito» es proposición equivalente a «existen elementos $a_0, \ldots, a_{n-1}$ de A tales que $r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$», es decir, que r es raíz de un polinomio unitario sobre A. Ello equivale, por otro lado, a señalar que la familia $\{r^i\}_{i \in I}$ es linealmente dependiente.

El gran problema a estudiar estriba en la divisibilidad en el anillo $A[r]$. Para ello Dedekind introduce la noción de *ideal* I, subanillo que satisface la propiedad de que el producto de cualquier elemento del anillo A por un elemento de I pertenece a I. Con lo cual la noción equivalente a la de divisibilidad entre enteros va a centrarse en la de inclusión de ideales. Por ejemplo, en Z sean los ideales generados por 2 y por 4, brevemente, $(2) = \{2,4,6,8,\ldots\}$, $(4) = \{4,8,12,\ldots\}$. En Z se verifica que $2|4$; en los ideales correspondientes, $(4) \subset (2)$. Naturalmente, ello exige dar las definiciones de suma y producto de ideales; supone extender a los ideales las nociones de número primo, número irreducible, etc. Lo cual exige introducir los conceptos de ideal principal o generado por un único elemento —los ideales anteriores, (2) y (4), son principales—, e ideal primo, que es el no divisible por otro. La creación de Dedekind se centra entonces en demostrar que los anillos que hoy llevan su nombre pueden descomponerse de manera única en ideales primos. Y este teorema de factorización única no es, como algún historiador indica, algo que corone la factorización única en Z; exige un enfoque radicalmente distinto —entre otras cuestiones, salirse de Z— y, con él, un hacer matemático diferente al realizado hasta esta inversión que permite construir un nuevo objeto, distinto al estrictamente aritmético.

No entro en detalles sobre la práctica interna creada por Dedekind. Lo que me interesa destacar es el aspecto revolucionario de la misma, la ruptura que esa práctica entraña y que va en paralelo a la provocada en la creación de los irracionales. Por un lado, al demostrar que todo ideal posee una base finita única, Dedekind introduce un tipo de razonamiento fundamental en álgebra y en teoría de homología —la topología combinatoria creada por Poincaré—, razonamiento que no es otro que el de las condiciones de cadena. Y ello porque la finitud y unicidad de la base resultan equivalentes a establecer que dada una sucesión de ideales $\{I_n\}_{n \in I}$ tales que I_{n+1} sea divisor de I_n —división que en ideales es inclusión— esta sucesión acaba tras un número finito de términos. Razonamiento de cadenas ascendente o descendente que luego utilizará Dedekind en obra posterior, para caracterizar, por ejemplo, los números naturales, ya en 1887. Por otro lado, el que Dedekind pase a manejar, en lugar de objetos individuales, clases infinitas de dichos objetos. Es la misma inversión que la realizada en las cortaduras y que pondrá de manifiesto la problemática de los cuantificadores universal y existencial y, principalmente, los problemas de la impredicatividad y de los razonamientos existenciales no constructivos. Aquí, para manejar los ideales se tendrá que admitir la existencia del infinito actual, con todos los problemas que dicha aceptación supone —y que Dedekind intenta superar pretendiendo dar una demostración, naturalmente equivocada, de la existencia de dicho infinito—, y que exige el manejo demostrativo global, aunque Dedekind lo quiera subsanar con los pasos obligados: tomar un representante de cada ideal, operar con él, volver al ideal del cual el elemento obtenido es representante. La condición de uniformidad aparece, de esta forma, como condición obligada a cumplir, así como las condiciones de elección de representante conducirá a pensar en la elección simultánea de infinitos elementos, es decir, al postulado tan discutido a principios de siglo de elección. Finalmente, lo que es destacable es el hecho de que en este hacer Dedekind tenga que introducir, en la década 1870-80, ya de modo radicalmente explícito, las estructuras fundamentales del Algebra que posteriormente se calificará de moderna: ideales, anillos, cuerpos...

Aunque creados con motivo de los números algebraicos racionales —así el ideal aparece realmente como módulo sobre el anillo de los enteros del cuerpo—, tales estructuras pronto podrán generalizarse a cuerpos de elementos cualesquiera. Además, es desde esta creación desde la cual cobra sentido el enlace que puede tener la Teoría de números creada por Gauss con los problemas relativos a las ecuaciones algebraicas. Enlace presentido, reconocido, pero inexplicado e inexplicable desde su hacer, por matemáticos como Gauss, Jacobi, Dirichlet... Explicación sólo posible desde otro marco, el creado por Dedekind y que vendrá dada por Hilbert al señalar que tanto los algebristas como Abel y Galois, como los dedicados a la Teoría de números, lo que hacían era manejar, de modo implícito, la misma estructura subyacente de cuerpo. Y sólo tras el develamiento de esta estructura en el contexto matemático originado en los entornos de 1875, puede realizarse la observación de Hilbert y, con ella, la explicación de los enlaces pero, a la vez, de las limitaciones sentidas por dichos algebristas al no poseer con nitidez dicha estructura. Igualmente permite hallar la razón de la suposición tan aventurada de Euler al intentar resolver la hipótesis de Fermat en el caso de los cubos, dado que el cuerpo que introduce, $Z[\sqrt{-3}]$, no posee divisibilidad con factorización única, por lo que el acierto de Euler cabe asignarlo a una intuición de matemático de raza. También, dar razón de que en los enteros de Gauss la factorización única se mantenga, ya que en $Z[i]$ cada ideal es de generación finita o, lo que es lo mismo, cada cadena ascendente de ideales es estacionaria siendo $Z[i]$ la clausura íntegra de Z en el cuerpo $Q[i]$ de números algebraicos.

Pero este dar razón de unas limitaciones o de un enfoque problemático a partir de una inversión radical del hacer matemático, con cambio de objeto en su práctica, también permite dar razón de otras disciplinas, como en el caso de la Geometría algebraica. Basta observar que una curva algebraica puede definirse como el conjunto de los puntos que anulan un polinomio y entonces estudiar la estructura de la familia de polinomios, que constituye un anillo, permite estudiar geométricamente un haz de curvas que pasan por una dada, haz que, a su vez, constituirá un filtro. En este terreno Dedekind trabaja con Weber a partir de 1880 tomando como base sus previos trabajos sobre teoría de números, pero interpretados, ahora, no en lenguaje algebraico, sino geométrico, creando de esta manera la Geometría algebraica moderna, frente a la geometría algebraica que, con sus orígenes en los entornos de 1827, y a través de la obra de Riemann, se mantenía en el estudio de las transformaciones birracionales, destacando en este hacer los matemáticos italianos.

En el hacer inaugurado por Dedekind destaca, igualmente, otro matemático, Kronecker, discípulo y luego amigo de Kummer. En paralelo y quizá con un proyecto más ambicioso de generalización algebrizadora tanto para la teoría de números como para la propia geometría algebraica, que pretende unitarias, Kronecker introduce en este contexto, y de manera puramente algebraica, las nociones de variedad irreducible y de dimensión de una variedad. Por un camino diferente en apariencia al de las multiplicidades y conjuntos, a partir de 1881, vuelve a plantearse como problema la necesidad de dar definiciones precisas de conceptos que, hasta el momento, se aceptaban acríticamente, apoyados en la intuición geométrica. En este sentido destacará el empleo por parte de Kronecker de un razonamiento creado por Pascal, pero que va a convertirse en campo de polémica entre los lógicos que no lo estiman conclusivo, mientras que algunos matemáticos lo elevan al rango de razonamiento creador puro, precisamente por su matiz de reiteración creadora a partir de un elemento de su sucesor inmediato: el principio de inducción completa, al que también hace referencia Dedekind en 1872 en las palabras que de él he citado anteriormente. Para las curvas planas o superficies en un espacio de tres dimensiones, la descomposición en curvas irreducibles de una curva dada por una ecuación polinómica cualquiera era equivalente al teorema de descomposición de un polinomio en factores irreducibles. Ahora bien, si se pasa a espacios de n dimensiones, la intuición geométrica se vuelve impotente y de aquí una inversión conceptual de Kronecker: Como variedad algebraica adopta la formada por aquellos puntos que anulan una familia de polinomios y tal variedad puede descomponerse en un número de variedades irreducibles de dimensión dada. Y aquí hace intervenir el principio de inducción completa apoyándose en el ideal del anillo engendrado por los polinomios de la familia —en lugar de ideal, que es terminología de Dedekind, mantenida hoy, Kronecker lo denomina *modulsystem*— y logra demostrar que si el ideal es primo la variedad es irreducible —la recíproca no se logra demostrar hasta entrado el siglo XX—. Con ello enlaza la teoría de números en su versión algebraica con la geometría algebraica, y de ahí su gran proyecto unificador, basado igualmente en la ideología previa de los métodos constructivos en la demostración, siempre a partir de los números naturales como origen o fundamento de los restantes campos del hacer matemático. Sin embargo, en este contexto el teorema de la base de Hilbert, demostrado en 1890, de que todo «sistema modular» posee una base con un número finito de elementos se muestra esencial; pero, nuevamente, y desde el enfoque que aquí interesa, la demostración del teorema es global, existencial y no constructiva frente a los deseos de Kronecker.

En este contexto cabe observar que, si bien los trabajos de Dedekind y Kronecker constituyen la fuente más importante de todo el hacer algebraico posterior, así como del geómetra-algebraico, en su momento parece considerárseles quizá excesivamente abstractos, a pesar de su concreción a objetos no cualesquiera sino a elementos como los números algebraicos, curvas en un espacio de tres dimensiones, polinomios en una indeterminada...

A su línea viene a sumarse la obra de Hensel de los números p-ádicos, ya en los finales de siglo, 1897, y que si por un lado constituye una de las últimas grandes creaciones de nuevos números, por otra enlaza con la teoría de funciones modulares —terreno del análisis de variable compleja— con lo cual permite, a pesar de su origen aparentemente distinto, una consolidación de los trabajos de Dedekind y Kronecker en el terreno puramente algebraico. Y ello porque Hensel, en su introducción de los números p-ádicos, desea aplicar a los números algebraicos las técnicas del desarrollo en serie de Laurent que se utilizan en la teoría de las funciones algebraicas sobre las superficies de Riemann. Para lo cual maneja tales desarrollos de manera puramente formal, algebraica, mientras que a partir de 1910, con la introducción de los espacios métricos, puede incluir en los mismos nociones topológicas. Así, Hensel, mediante sus desarrollos formales, crea los cuerpos p-ádicos y, además, introduce en ellos nociones de carácter topológico basadas en las completaciones y valoraciones en los mismos.

La Teoría de números, la Geometría algebraica van a convertirse en haceres marcadamente algebraicos. Y ello hasta el extremo de influir a través de la noción de grupo en los restantes haceres de manera decisiva. El hacer algebraico se convertirá en un trabajo de privilegio máximo en toda la matemática, fundamentalmente tras la obra sistematizadora del álgebra conmutativa llevada a cabo por Steinitz en 1910, y de la escuela alemana posterior ligada a los nombres de Emmy Nother, Artin..., que llegará a la formulación del álgebra ya radicalmente abstracta, no ligada a un campo determinado de clases o elementos, que encontrará su máxima expresión en el tratado, hoy clásico, de van der Waerden de 1930, bajo el lema de «álgebra moderna».

2.2.4. REFLEXIONES

En 1893 Frege debía reconocer, en el primer tomo de *Las leyes fundamentales de la Aritmética* que «de la palabra 'aplicación' puede decirse lo mismo que de la palabra 'conjunto'. Ambas se usan ahora con frecuencia en la matemática». En lugar de dichos términos Frege, partiendo de la idea previa de que la Aritmética no es más que una rama de la Lógica, prefiere utilizar los de «relación» y «concepto». Lo significativo, el reconocimiento de que el hacer matemático surgido de la ruptura de los entornos de 1875 ha cambiado de objeto al trabajador matemático. Objeto que va a ser el conjunto base y la aplicación bien en ese conjunto bien entre ese conjunto y otros; es lo puesto de manifiesto en el Programa de Erlangen por parte de Klein, en la teoría de números algebraicos por parte de Dedekind, en los sistemas o agregados lineales de puntos por parte de Cantor... Independiente a todos ellos, en 1873, Clifford había escrito ya: «La creación de una correspondencia entre dos conjuntos, y la búsqueda de las propiedades que se conservan en el curso de la misma, puede ser considerada como la idea central de las matemáticas modernas: se la encuentra a través de toda la ciencia pura y sus aplicaciones.» Los términos *matemáticas modernas, 1873,* los subrayo.

Como sustrato ideológico de la ruptura puede señalarse la pugna con el empirismo ingenuo y la consiguiente afirmación de ser el matemático el creador de sus propios objetos, que carecen de todo tipo de referencial. Si bien el espacio real, material, puede ser objeto de estudio por parte del científico, el matemático crea sus propias multiplicidades, su espacio objetivo que nada tiene que ver con el espacio de nuestra sensación, percepción y que no puede ser considerado como una «abstracción» del mismo; luego podrá plantear como problema la adecuación o no de esas multiplicidades de dimensión cualquiera con el espacio sensible, pero ello ya no es cuestión del matemático, sino de algún especialista físico o naturalista, eso es cuestión de la teoría científica experimental. El matemático crea su propio mundo objetivo y, con palabras de Cantor, «la esencia de la matemática es la libertad»; pero libertad no del objeto en sí, sino del matemático creador de dicho objeto. He mencionado las palabras de Dedekind en el mismo sentido, a partir del acto más simple, el de contar, que luego Poincaré precisará en el sentido de que se parte de un acto simple, el de la reiteración de una acción desde que la misma es posible, acción que puede ser, por ejemplo, la de reiterar los pasos al andar...

Naturalmente, si el matemático crea su propio objeto sin que éste muestre apoyatura alguna en la «realidad» —y esto en el sentido de que la naturaleza no da todo hecho sino que a partir de la misma hay que crearlo, precisiones una vez más de Poincaré—, sin que tenga que «abstraerse» de la misma, aparecerá un problema inmediato: las condiciones de existencia de ese objeto. Condiciones de existencia que Grasmann señalaría como «concordancia de los procesos mentales entre sí», en afirmación de carácter aparentemente psicologista, mientras que los matemáticos de los entornos de 1875, pretendiendo desterrar tal psicologismo, aceptarán como equivalente a la condición de no ser contradictorios. Así, Cantor; años después, Poincaré y Hilbert. Es claro que, como Dedekind señalaría tras un atisbo de psicología genética, el objeto ha de ser introducido, creado, por la definición del mismo y es esta definición la que no ha de ser contradictoria. Se hace tópico por estos entornos hablar de la creatividad de la definición, pero de unos ciertos tipos de definición: la inductiva o recurrente —como la más auténtica, por ser la propia creadora del número natural, por ser el acto más simple y natural— y la implícita o por postulados, que cobra un papel preponderante. Definiciones que rompen el molde de la definición clásica, la esencial, en beneficio de un formalismo radical.

En este punto conviene precisar. Un matemático orientado hacia la lógica como Frege, atacando la creatividad de las definiciones y, con ello, la ideología que la sustenta de la creación del objeto por parte del matemático, ha difundido una imagen del formalismo como orientado exclusivamente hacia el inscripcionismo. De hecho, la posición formalista, en una de sus versiones extremadas como la sostenida por Thomae o por el primer Hilbert —el de los Fundamentos de 1904—, no se hace cuestión de la naturaleza conceptual de los números, aceptando que los mismos vienen dados por unos signos materiales —bien gráficos, bien sonoros— que pueden percibirse por un acto de captación sensible inmediato y que pueden reiterarse indefinidamente. Identificación empirista de signo y número que, por supuesto, no resiste coherentemente una crítica por su empirismo concretizador, impotente de la generalización de las proposiciones. Sin embargo, el formalismo que se difunde en el hacer matemático, y que sostienen Dedekind, Cantor en sus primeros momentos, Poincaré, Kronecker, Hilbert posteriormente a la crítica del matemático francés..., se apoya en considerar el término «formal» en contraposición al término «real». Lo real es lo abstraído de la realidad objetiva; lo formal es el concepto creado por el matemático a partir de unos datos previos, ciertamente, y que requiere de una apoyatura sígnica para poder comunicarse los matemáticos entre sí y para fijar dicho concepto, así como para poder manejar las demostraciones en su aspecto estrictamente sintáctico.

Desde este aspecto, el formalismo es la ideología consecuente con la libertad creadora del matemático, con la ruptura del hacer matemático en los entornos de 1875. Entre otras cuestiones porque al manejar clases es el matemático quien las crea, dado que las mismas no se encuentran en la naturaleza esperando ser abstraídas y, con ello, separadas de la ganga, de ahí su carácter formal y no real. Posteriormente el matemático creará situaciones reales en las cuales se ejemplifique dicho concepto, concretizará la creación formal en un ejemplo real, en una situación que permita la aclaración, el ejemplo, la explicación del concepto formal creado. Es una inversión respecto a la clásica concepción de partir de lo real para alcanzar lo abstracto, lo formal. Es sólo después de la creación de lo formal como podrá crearse la situación matemática que permita re-alcanzar dicha creación.

Y la creación viene dada por la formulación de las definiciones. Definición que no puede dar la esencia —problema carente de sentido desde esta perspectiva—, sino todo lo más delimitaciones, condiciones o propiedades que satisfagan los elementos de una clase, o bien dar un proceso por el cual se sepa cómo originar los elementos de dicha clase. En ambos casos, la definición ha de dar las condiciones de uso, de manejo, el significado de los objetos que define. La primera es la definición axiomática, también calificada en estos entornos de definición descriptiva; la segunda es la inductiva o recurrente, calificada de constructiva. Si el matemático encuentra alguna interpretación geométrica que ayude a visualizar lo definido, o bien una aplicación en terreno más conocido de lo creado en otro, esta aplicación ayudará a aceptar la «objetividad» del concepto creado. Es lo expresado por Cantor en la construcción de los irracionales que antes mencioné. Pero ello supone utilizar la noción de «modelo» y, a la vez, mantener el estatuto de creación libre.

En el formalismo objetivo así entendido el instrumento de la definición axiomática se muestra esencial. Si bien Gergonne, hacia 1818, es el primero en aceptar de modo explícito la definición calificada de implícita, la misma no es utilizada en los entornos de 1827 como instrumento clave, consecuencia del realismo aceptado por los matemáticos de ese entorno y que se refleja en el intento de comparar las geometrías no-euclídeas y la euclídea con la naturaleza para que ésta decida en la elección de una u otra. Sin embargo, Riemann, al introducir las multiplicidades de dimensión cualquiera, no tiene más remedio que aceptar explícitamente en su Disertación que «las determinaciones esenciales se introducen bajo forma de axiomas» dado que de las primeras ideas fundamentales sólo se dan definiciones nominales. A su vez, von Staudt, al sistematizar en 1847 la geometría «moderna», la proyectiva desde el enfoque sintético, ha de utilizar el método axiomático. Pero es en los entornos de 1875 cuando la definición por postulados cobra su auténtico papel por necesaria y, además, por su carácter formal y no de descripción de la naturaleza como ocurría en la axiomática euclídea. Los elementos de una clase sólo podrán caracterizarse verificando las propiedades de ésta; propiedades que, dadas en forma de postulados, la definen y definen, simultáneamente, a dichos elementos. Así Dedekind, al precisar el concepto de número natural, partirá precisamente del concepto de sistema o conjunto de elementos cualesquiera, de los conjuntos infinitos, del concepto de aplicación y, después, caracterizará la clase o conjunto de los números naturales como la que satisface unas propiedades determinadas de entre todas las clases inductivas, propiedades que se reducen a cuatro, además de la condición de inductividad. No parte de los números naturales para llegar a la clase, al conjunto, sino que parte de éste para llegar al número, al objeto. Es la inversión que hace depender lo finito de lo infinito, dado que éste es el dato previo. Peano sólo tendrá que aceptar las propiedades de Dedekind como postulados para caracterizar la clase de los naturales por los axiomas que hoy llevan el nombre del matemático italiano.

Junto a la necesidad de las propiedades caracterizadoras o postulados de una clase surge la de caracterizar la noción de aplicación entre clases y sus diferentes tipos, haciéndose problema la noción de «función». En este sentido ya Klein en 1871 definía la medida proyectiva como transformación u operación que satisfacía las condiciones de aditividad e invariancia en un desplazamiento. Kronecker y Weiertrass introducen la noción de determinante como forma multilineal alternada de una n-tupla de vectores en un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo base a través de una definición axiomática, descriptiva. De modo análogo las estructuras base del álgebra, como el grupo, anillo, cuerpo, ideal..., van a ser definidas de la manera usual actualmente, es decir, como conjuntos base de elementos numéricos en los que se define una o dos aplicaciones internas, operaciones que satisfacen determinadas leyes formales, axiomas que precisamente definen dichas operaciones.

Del tratamiento formal de las definiciones axiomáticas como creadoras del objeto —clases, aplicaciones, operaciones— se va a pasar a la caracterización de toda una rama, de una disciplina completa, al estilo euclídeo. Así, en 1879, Frege utiliza el procedimiento axiomático para el Cálculo proposicional; en 1882 Pasch para la geometría moderna, para la proyectiva; la Aritmética del número natural es axiomatizada por Peano; los reales por Hilbert... Es la obra de Dedekind, de Hilbert en los terrenos del álgebra continuada por Steinitz y que culminará en la obra de van der Waerden ya mencionada. En este contexto la labor de Peano cabe considerarla como fundamental, no sólo por su definición de los naturales apoyada en la obra de Dedekind, o en el hecho de que en 1888 diera la definición axiomática de los espacios vectoriales de dimensión cualquiera sobre $\mathbb{R}$ y con ella la de aplicación lineal, sino por su influjo respecto a la importancia de la definición y el tratamiento axiomático como instrumento esencial del trabajo matemático, con las consiguientes precisiones aportadas por los matemáticos italianos de su escuela y las discusiones con matemáticos como Poincaré.

La inflexión axiomatizadora de los entornos de 1920

Papel que retomará Hilbert principalmente a partir de 1920 —sin olvidar el influjo que ejerciera su obra clave, *Fundamentos de Geometría*, de 1899 y su papel orientador en la primera axiomatización de la teoría de conjuntos hecha por Zermelo en 1908— convirtiéndose en el portavoz del formalismo axiomático no sólo en el hacer interno de la matemática, sino como instrumento esencial para cualquier otra disciplina que quiera convertirse en científica. Entornos de 1920 en los cuales la corriente axiomatizadora, que permite sistematizar lo ya creado, cobra el papel característico de necesidad y, con ello, pasa a integrarse, junto a la terminología conjuntista, en los componentes esenciales de todo matemático. De creación metodológica revolucionaria en los entornos de 1875, con discusiones y polémicas en los primeros años del siglo XX, principalmente a causa de la crisis en los fundamentos del hacer matemático con sus intentos superadores constructivo e intuicionista, logicista o platónico, conjuntista axiomatizador, todos ellos surgidos en 1908, el método axiomático pasa a convertirse en un elemento más, indiscutido, de ese hacer. De conocimiento teórico pasa a convertirse en práctica ideológica, en práctica admitida ya sin ulterior crítica, convertidos algunos de los temas de la polémica en problemática interna matemática. Así, el problema de consistencia —clave para una ideología formalista, frente a la posición realista— se hace tema y objeto de trabajo matemático en la escuela hilbertiana, mientras que otros pasan de ser problemas críticos a instrumentos como el de independencia de los postulados que obliga, junto al problema anterior, a precisar la noción de modelo matemático. Consecuencia inmediata, provoca la aparición de los criterios semánticos de verdad, elaborados fundamentalmente por Tarski en los contextos internos de la semántica frente a los contextos sintácticos puramente formales, y que deben tenerse presentes en el plano ideológico del hacer libre matemático frente al realismo ingenuo de adecuación a la realidad de la que los conceptos se han abstraído.

Naturalmente, la inflexión axiomatizadora preconizada por Hilbert y adoptada por todos los matemáticos de los entornos de 1920 no arrasa los problemas, sino que hace surgir otros. El paso a lo formal supone, ciertamente, una ruptura epistemológica frente a la intuición pero, junto a este hecho ya señalado, se produce un intento calificable de absolutista. Es decir, al eliminar cualquier génesis intuitiva, los conceptos que han de manejarse han de ser definidos de modo riguroso, formal, y ello por delimitación dada por cada uno de los postulados, por el sistema completo que los caracterizan. El concepto así introducido va a querer tener una validez objetivable para siempre. Es lo que se pretende para términos como «conjunto», «numerable», «continuo»... Sin embargo, en el interior de los sistemas formales van a surgir antinomias, de las que cabe señalar la de Löwenheim-Skolem. Con ellas se consigue demostrar que un sistema de postulados como el de Peano presenta interpretaciones no canónicas junto a la canónica —los naturales— para los cuales se pretendieron fabricar con radical unicidad. El sistema no es categórico. De aquí que los términos vayan a tener un estatuto de relatividad, dependiendo del sistema formal en el cual se definan. Es claro que, para algunos, ello se vea como un pseudoproblema, afirmando que fuera del sistema formal no pueden plantearse con rigor los problemas, y de ahí surjan cuestiones como la de la imposibilidad de delimitar con nitidez, con pretensión de absolutismo, los términos que intervienen en el trabajo matemático. Planteamiento sólo interior, sólo desde la interioridad del sistema formal pueden responderse coherentemente a las cuestiones. Pero, claramente, esto supone también una toma de postura ideológica respecto al hacer matemático, dado que el propio sistema formal es un producto, un objeto del trabajo matemático. Y a esta construcción es a la que, a pesar de posibles críticas como la esbozada ahora, se dedican los matemáticos, los ya formados en los haceres y disciplinas surgidos en la ruptura de 1875.

De esta forma, es en los entornos de 1920 cuando aparecerán las axiomatizaciones de la Topología conjuntista por Hausdorff y después por Kolmogorov; este último dará la axiomática apropiada para el Cálculo de probabilidades; en el terreno topológico sólo la definición axiomática permitirá caracterizar la multitud de espacios que ha ido creando el matemático, desde los espacios compactos —Alexandrov y Urysohn—, los métricos —Fréchet—, los completos, los uniformes de A. Weil ya en 1937; Banach sistematizará los espacios que hoy llevan su nombre en 1920...

Lo que me interesa destacar es que, a pesar del formalismo extendido como sustrato ideológico de todo el hacer matemático originado en la ruptura de 1875, en el relativismo de los conceptos que se crean dependientes del sistema formal en el que se trabaja, el matemático cree dotar de un contenido al objeto que maneja. De esta manera, y aunque anteponga el rigor demostrativo —Dedekind comenzaría su ensayo *Was sind und was sollen die Zahlen?* de 1887 con las palabras: «En ciencia nada capaz de demostración debe ser aceptado sin demostración», palabras retomadas por Frege casi literalmente en 1893—, la demostración no se lleva a efecto en su totalidad, sólo se da en esquema. Ni siquiera las demostraciones más completas lo son en el sentido fuerte del término, en el sentido verdaderamente lógico, axiomático formal. Pero ello tiene una causa, la aceptación de un contenido, de una objetividad o concreción en el objeto creado por el matemático. Aunque se manejen clases, las mismas son de determinado tipo de objetos; o agregados lineales de puntos —es decir, de números reales—, o de números algebraicos, o de transformaciones lineales entre espacios vectoriales, o transformaciones cuadráticas en los cuerpos real o complejos... Sólo Cantor pasará a manejar los conjuntos o agregados cualesquiera, de objetos radicalmente indeterminados, caracterizada la clase o conjunto por una o una serie de propiedades que la definen y, en paralelo, Frege lo hará con los términos de concepto y relación, siendo el conjunto la extensión del concepto. Naturalmente las paradojas surgirán en ambos aspectos —quizá con prioridad temporal en el ensayo anterior de Dedekind o con la paradoja de Cantor o la de Burali-Forti, prioridad temporal en el hacer interno matemático—, pero las polémicas se orientarán hacia los terrenos de la lógica y de los fundamentos mientras que en el interior de la práctica teórica matemática tales paradojas no son tenidas en cuenta, a pesar de que debían afectarla profundamente, como el caso que Zermelo señala de verificarse la impredicatividad en el terreno del Análisis de variable real pero con la «consecuencia» de que, como éste se admite, cabe admitir la impredicatividad en el total del hacer matemático; a lo que un Poincaré respondería vivamente con la afirmación de que dicha consecuencia no es correcta, sino falaz al tener, realmente, en este caso, un problema y, como tal problema la misión del matemático es resolverlo, suprimiendo esos círculos viciosos y no sólo de la teoría general de conjuntos, sino del interior del análisis de variable real.

Sin embargo, se maneja, por ejemplo, la impredicatividad en el Análisis de variable real sabiendo que se comete círculo vicioso desde el plano lógico, pero teniendo la secreta convicción de que la objetividad de tales números hace inocua al mismo; mientras se critica abiertamente los grados del infinito de Cantor, se manejan dichos grados aunque limitándose a lo numerable y lo continuo... En otras palabras, parece tenerse la convicción de que la impredicatividad en la teoría de conjuntos o en la lógica puede ser muy grave; la misma, en la teoría de funciones de variable real, no muestra dicha gravedad.

En su práctica ordinaria el matemático cree trabajar con objetos que, aun creados por él mismo mediante sus instrumentos formal axiomático y recurrente, presentan una objetividad, una cuasi-realidad platónica que los hace inmunes a cualquier tipo de problemática respecto a su tipo de existencia. Es la afirmación que Poincaré hace en 1906 frente a Russell cuando señala que el hacer matemático seguirá su marcha con independencia de las crisis que se originan en sus entornos, afirmación que Russell no comprenderá, por no ser matemático puro. Incomprensión en la que influye, además, la posición de Frege de querer reducir todo objeto creado —él indicaría, descubierto— por el matemático a sólo los dos elementos centrales de concepto y relación, frente a la convicción de los matemáticos de que ese intento es fallido porque la lógica, con sus preceptos y codificaciones, es un hacer posterior al matemático, al menos, dado que ha de actuar sobre el objeto creado en este hacer y éste es un trabajo libre del hombre. Ello entraña la creencia en la concreción objetiva de los objetos manejados y de las propias estructuras que de modo implícito se encuentran subyacentes en las definiciones, en las creaciones aportadas. Y es en este punto en el que veo una de las limitaciones de los haceres surgidos en estos entornos: su concreción a campos, a haceres particulares, reiterando el mismo tema y el mismo trabajo, en cada uno de los mismos. Concreción sólo superada a partir de la preponderancia del método axiomático en la inflexión axiomatizadora y sistematizadora de los entornos de 1920, con su independencia de un formalismo sintáctico puro.

2.3. ENTORNOS DE 1939

En páginas anteriores se ha deslizado el término «estructura» en más de una ocasión. Sin embargo, no es término que corresponda al marco originado en los entornos de 1875. Es lo mismo que ocurre con Abel, con Galois, respecto al término «cuerpo» en el estudio que realizan de las raíces de las ecuaciones algebraicas, término sólo acuñado con pleno sentido por Dedekind desde otro marco, desde el que permite hablar del conjunto de dichas raíces como actualmente dadas y del mantenimiento de las leyes formales de la suma, multiplicación, sustracción y división si estas operaciones se efectúan con las mismas. De modo análogo, todavía Hilbert, en la primera edición de sus *Fundamentos de geometría*, en 1899, se niega a utilizar el término conjunto no considerando el plano, por ejemplo, como un conjunto de puntos, e incluso, dada su orientación axiomatizadora formal, no lleva a sus últimas consecuencias la noción de grupo como estructuradora de las distintas geometrías, lo que sí hace tras las críticas de Poincaré, entre otros, más formalista en este terreno que el mismo Hilbert. Sólo desde otro marco, creado tras la ruptura provocada en el trabajo matemático en los entornos de 1939, cobra sentido el manejo del término «estructura» y, desde ese marco, puede atribuirse al campo de raíces manejado por Abel, por Galois, el hecho de satisfacer la estructura de cuerpo. Marco surgido en los entornos de 1939, en el que de momento se encuentra inmerso el trabajador matemático y que, por ello mismo, hace difícil las precisiones y delimitaciones, faltos de la suficiente perspectiva, del necesario cambio de contexto que permita «ver» las notas más caracterizadoras y, a la vez, las limitaciones del hacer actual, abocado para algunos a un tiempo ya muerto, requiriendo la aparición pronta de nueva ruptura.

Creo haber insistido, junto al manejo de este término improcedente para el marco del cual se hablaba, en el hecho de que la terminología conjuntista acaba difundiéndose en el trabajo matemático como auténtico vocabulario base junto al manejo de una serie de métodos de razonamientos propios —entre los que cabe destacar la inducción transfinita, el razonamiento por elección o principios maximales—, con procesos demostrativos globales y no constructivos, de carácter marcadamente existencial. Naturalmente, esta teoría de conjuntos posee un carácter de conocimiento práctico, es decir, de herramienta o útil para los demás haceres, para los restantes trabajos del matemático. Es lo que cabe calificar de Teoría *intuitiva* de conjuntos. Junto a ella se instala la Teoría de conjuntos como un hacer propio, estrictamente teórico, cuyo objeto es el conjunto y clase manejados axiomáticamente, formalmente, único procedimiento de dicho manejo por otro lado. Como tal hacer teórico o disciplina claramente delimitada se ha venido y se viene trabajando en ella. Sin embargo, es distinción que conviene resaltar porque no siempre se tienen presente los dos grados de conocimiento que cabe ligar a los términos «teoría de conjuntos», el práctico y el teórico. Conocimiento práctico que, más bien, es vocabulario base, elemento más de la práctica ideológica que entorna al matemático y a su trabajo a partir de la ruptura cantoriana, una de las efectuadas en los entornos de 1875. Distinción entre ambos conocimientos que clarifica lo dicho en cuanto a la distinción del peligro que puede tener una antinomia en el hacer teórico matemático como el Análisis de variable real y en el hacer teórico de la Teoría de conjuntos.

Ligado al conocimiento práctico conjuntista se tiene el tratamiento axiomático. Indiscutido, igualmente, en cuanto a instrumento en el interior de cada disciplina y que condiciona el matiz creador, constructivo, de cada una de ellas al ser la base de la «creación» de los objetos que se van a manejar. Como en el caso anterior, sólo desde un enfoque formalista puramente sintáctico cabe considerar el método axiomático como problema en sí, con sus cuestiones centradas en la independencia, completitud, consistencia, decidibilidad del sistema, que conducen a temas como la caracterización de un sistema formal o al método de modelos, por ejemplo, así como a la relatividad de los conceptos que pretenden delimitar.

Aplicando ambos instrumentos, ambos conocimientos prácticos, unidos, a los distintos haceres surgidos en los entornos de 1875, así como a los coexistentes con ellos y procedentes de rupturas anteriores, cabe observar que los mismos condicionan en gran medida el trabajo en el interior de cada disciplina, de cada conocimiento teórico particular. Condicionante, por otro lado, al que viene a sumarse la ideología propia de dichos instrumentos, así como del marco creado por la ruptura: el formalismo y la aritmetización, con claro deseo de evitar la intuición sensible, la geométrica, no admitida ya sino como mero auxiliar, no en cuanto a representación fiel de realidad alguna. Resultado de tales condicionantes se muestra la preponderancia que van a cobrar dos grandes líneas, con el sustrato axiomático común: la topológica y la algebraica. Esta última, por supuesto, rompiendo con el viejo molde de centrarse en la resolución de ecuaciones algebraicas. A estas dos grandes líneas dedicarán su esfuerzo la mayoría de los matemáticos de los primeros años de este siglo. Trabajo que, aparentemente y ya en el primer tercio, parecía conducir a un cierto agotamiento en ambos terrenos. Agotamiento por dispersión, precisamente, por lo que al final de lo expuesto respecto a los entornos de 1875 he tratado de expresar: ambas líneas se aplicaban a cada disciplina en particular, aisladamente, obteniendo ciertamente muchos resultados nuevos, y ello por la concreción que las mismas hacían creer al matemático que trabajaba en las mismas, especialistas en una parcela, sin ver el enlace que pudieran presentar los distintos trabajos entre sí. Agotamiento que expresaría Hermann Weyl en 1931, al dar un panorama del hacer matemático coetáneo —resaltando ambas líneas de trabajo, topológica, algebraica, además— en paralelo a lo expresado por Lagrange en los finales del marco matemático en que trabajó. Afirmación de matemático creador que parece mostrarse como auténtico indicio de la inmediata existencia de una ruptura, al presentir el agotamiento, la limitación del trabajo en el marco en que el mismo actúa, por falta de nuevas ideas, originales. Hermann Weyl afirmaba: «Antes de generalizar, formalizar o axiomatizar, es necesario disponer de la sustancia matemática para ello. Pienso que esta sustancia matemática en cuya formalización nos hemos ocupado en los últimos decenios, está próxima a agotarse. Por esto me imagino que la matemática volverá a ser cosa difícil para las nuevas generaciones.»

Sensación de agotamiento que, en el hacer matemático al menos, va a suponer, ligada, la sensación de una ruptura revolucionaria con la creación consiguiente de nuevos haceres. La ruptura presentida en los términos de Weyl va a centrarse, como en las anteriores, en la creación por parte del matemático de un nuevo objeto. Frente al objeto individual objetivado de los entornos de 1827, frente al conjunto, sus elementos y la aplicación de los entornos de 1875, los matemáticos en los entornos de 1939 crean como objeto del hacer matemático la estructura. Portavoz de estos matemáticos, tanto por su obra ejemplificadora del nuevo hacer con el estilo expresivo que le es propio como por la radical nitidez con que expresa la creación del nuevo objeto y la desaparición del antiguo y con ello la creación de otra matemática, Nicolás Bourbaki. Manifiesto, el ensayo «La arquitectura de las matemáticas», publicado en el colectivo de Le Lionnais aparecido en 1948, aunque programado para 1939 y retrasado por el comienzo de la segunda guerra mundial. En dicho manifiesto Nicolás Bourbaki señalará la ideología que condiciona el nuevo marco y el objeto del trabajo matemático a partir de la ruptura iniciada en estos entornos.

Como punto de partida, Nicolás Bourbaki observa los objetos creados hasta el momento en el hacer matemático existente. Observación que va a permitirle la fabricación del nuevo objeto, del hecho científico propio de la ruptura que inicia. Y así señala que, bajo la aparente diversidad de lenguajes, de ramas aisladas entre sí, todas las disciplinas poseen —o cabe hacer que posean— un sustrato metodológico común, sustrato que es el método axiomático. Este no es un mero formalismo inscripcionista, sintáctico puro al que quepa achacar mecanicismo alguno. El matemático ha de expresarse deductiva, formalmente. Pero la expresión lingüística, con su forma deductiva, no es más que la expresión, importante sin duda, pero no fundamental. Naturalmente, no es fundamental para el trabajador matemático, sí para el trabajador lógico para quien el objeto es, precisamente, tal encadenamiento deductivo por los problemas que entrañe. Lo fundamental para el trabajador matemático es la intuición creadora, de la cual dependerá el progreso del conocimiento teórico matemático. Intuición que no es la sensible vulgar y que se ejercita —y puede llegar a equivocarse— no sobre el vacío, sino sobre lo realizado, sobre el objeto creado por los matemáticos anteriores, base de creación o «descubrimiento», siempre que el mismo sea transformado, convertido de ideología en hecho sobre el cual trabajar. Intuición que, a la vez, impide el mecanicismo ciego de cualquier interpretación mecanicista del formalismo, pero también impide el realismo platónico dado que es sobre los objetos ya creados por el matemático sobre el cual otros matemáticos recrean y rehacen, transformando dichos objetos, sin admitir la eternidad de elemento o forma ideal alguno, sin admitir la independencia respecto al creador de los mismos.

Es lo que expone explícitamente Bourbaki, remitiendo a un ensayo de Dieudonné de 1939 en la *Revue Scientifique*, al indicar cómo los matemáticos pretendieron adoptar como objeto único y básico el número natural y posteriormente lo reemplazaron por el de conjunto. La noción de conjunto, «largamente considerada como 'primitiva' e 'indefinible', ha sido objeto de polémica sin fin, debido a su carácter de extrema generalidad y a la naturaleza muy vaga de las representaciones que evoca; las dificultades no se han desvanecido más que cuando se ha desvanecido la propia noción de conjunto (y con ella, todos los pseudoproblemas metafísicos sobre los 'seres' matemáticos), a la luz de las recientes búsquedas sobre el formalismo lógico; en esta nueva concepción, las estructuras matemáticas, hablando con propiedad, se convierten en *los únicos 'objetos'* de la matemática».

En esta *nueva concepción,* la estructura se define como un par, conjunto base de «elementos cuya naturaleza *no está especificada»* y una o varias relaciones en que intervienen esos elementos; «se postula que la o las relaciones dadas satisfacen ciertas condiciones (que se enumeran) y que son los *axiomas* de la estructura considerada». Naturalmente, en lugar de establecer relaciones únicamente entre los elementos, puede también establecerse entre las partes del conjunto base, entre los elementos del conjunto potencia del mismo. Serán los axiomas los que definan los distintos tipos de relaciones y, con ellos, los distintos tipos de estructuras. Tipos que Bourbaki estudia y clasifica, aun reconociendo que podrán crearse otras estructuras en el futuro, ya que el objeto no se encuentra dado de una vez para siempre.

Los tres grandes tipos o estructuras-madre, los más simples y cuya combinación va a dar lugar a las restantes, son las algebraicas, topológicas y de ordenación. Expresarían las ideas de ley de composición u operación, proximidad y continuidad, estar entre, respectivamente. Combinadas orgánicamente permiten crear otras estructuras, como las correspondientes al Algebra topológica —«estudio de estructuras donde figuran a la vez una o varias leyes de composición y una topología, ligadas por la condición de que las operaciones algebraicas sean funciones continuas (por la topología considerada) de los elementos sobre los cuales actúan»—, o a la Topología algebraica —«donde ciertos conjuntos de puntos del espacio, definidos por propiedades topológicas (símplex, ciclos, etc.) son tomados en sí mismos como elementos sobre los cuales va a operar las leyes de composición».

De esta forma el método axiomático y la noción de estructura permitirán «distinguir conceptos que hasta entonces habían estado indisolublemente unidos, formular con precisión lo que era vago o inconsciente, y demostrar con la generalidad que les corresponde teoremas que solamente eran conocidos en casos particulares», insistirá Bourbaki en las notas históricas que acompañan a cada uno de los fascículos de su monumental *Elementos de matemática,* título de clara resonancia euclídea para indicar analogías y resaltar diferencias, y que comienzan su publicación en 1939.

Si la metodología de base es la axiomática y el objeto la estructura, el trabajo matemático va a cobrar nuevas dimensiones, va a convertirse en otro hacer, diferente al surgido en los entornos de 1875, por constitución de un nuevo marco, de una nueva concepción. Se refleja, claramente, en que los elementos que intervienen en cada conjunto son de naturaleza radicalmente indeterminada, pero sobre todo, que es a partir de las estructuras madre, de las estructuras generales de las que van a surgir las demás, al particularizase, al dotar a esos elementos de una individualización más caracterizadora. En otras palabras, la ruptura vuelve a reproducir el mismo fenómeno de inversión de las rupturas anteriores, y en lugar de pasar de cada disciplina concreta, por analogía, a otra que las englobe, ahora se va a partir de la estructura más general para alcanzar cada estructura particular, para llegar a cada una de esas disciplinas particulares; inversión que crea un nuevo objeto y que permite, desde esta creación, dar razón de las limitaciones del objeto antiguo.

Constituye, esta inversión, una nueva confirmación de que sólo el concepto general permite la práctica teórica matemática, en general la práctica teórica científica. Concepto general que compone la base, el principio para la constitución de dicha práctica teórica, mediante cuya transformación se logrará como resultado la «concreción» de un conocimiento.

Inversión bourbakista que conlleva, por otro lado, una serie de nuevas técnicas en el manejo del nuevo objeto, técnicas comparables a las de aproximación en el Análisis, ahora convertido en clásico, o a la inducción en la aritmética, o a los procesos maximales o de cadena en el Algebra. Puede esquematizarse la nueva técnica indicando que, tras la noción de estructura como objeto cabe destacar en ella las partes y elementos notables —por ejemplo, si estable, si permitida—, relaciones notables —con el problema de compatibilidad—, aplicaciones notables así como los sub-objetos, objetos-cociente, objetos-producto y los mecanismos de paso al cociente por una sub-estructura...

De entre todos ellos el más importante, quizá, se centre en el manejo de los morfismos entre objetos, entre estructuras. Morfismos que, claramente, han de ser aplicaciones entre los conjuntos base pero siempre que satisfagan una condición esencial: mantener las estructuras entre las que se establece la aplicación. Morfismos que permiten la construcción de otros mediante su composición y, con ello, permiten la fabricación de nuevas estructuras del tipo general tanto por considerarlos como elementos de otro objeto —la estructura de los morfismos, como en el caso de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, que constituyen a su vez un espacio vectorial— como por reflejar en un conjunto amorfo la estructura que constituya el objeto inicial del morfismo dotando a ese conjunto amorfo de esta misma estructura.

Constituyen estos elementos nuevas técnicas en el trabajo matemático, técnicas que se incorporan, como auténticas novedades, a las de los haceres anteriores y que, de hecho, perdido su carácter innovador, pueden considerarse actualmente como elementos pertenecientes también al vocabulario base, como elementos del conociminto práctico de todo aquél que se inicie en el trabajo matemático.

Es desde esta perspectiva desde la cual cobra sentido hablar de ruptura en el trabajo matemático en los entornos de 1939. Año en el que se publica, como he indicado, el primero de los fascículos de Nicolás Bourbaki, el que sistematiza la *Topología general* en una forma que hoy puede considerarse, ya, como paradigmática. Naturalmente, la obra de Bourbaki no es única; es portavoz, quizá el más influyente, de la «matemática moderna» inaugurada en estos entornos. El más influyente, porque a través de la axiomática y del objeto estructura pretende unificar todo el trabajo matemático en disciplina única y no como hasta el momento en disciplinas desgajadas, aparentemente independientes entre sí. Además, la influencia de Bourbaki en el estilo expresivo va a ser decisiva. Y, sin embargo, cabe consignar que tanto ese método como el objeto se tomarán como base en muy distintos haceres, aunque en unos la ruptura cristalice antes que en otros.

Ahora bien, a pesar de que Bourbaki sea el matemático portavoz, autor del manifiesto y modelo a seguir en la línea expresiva, su obra no es una obra de creación de contenidos originales, de práctica teórica interna. Realmente su obra —y de ahí su posible influencia— es de carácter de exposición sistematizadora de la nueva ideología y del trabajo que la misma condiciona, por lo que se encuentra más ligada al plano de la práctica externa, ideológica, del trabajo matemático. La obra de creación, de temas originales, continúa siendo una obra, un trabajo individual, sigue siendo creación de Léray, de Chevalley, Dieudonné, Cartan, Weil, Eilenberg, Grothendieck..., y no del grupo que las asume y sistematiza en una obra unificadora, global, aunque la existencia de tal grupo, de Nicolás Bourbaki y su Universidad de Nancago —*Nan*cy-Chi*cago*—, se conviertan en modelo de trabajo, igualmente, pero ya en un plano de práctica sociológica diferente, al que volveré posteriormente.

Independientemente de la unificación querida por Bourbaki, la nueva matemática se refleja en la creación de otra serie de disciplinas; creación que, por supuesto y en algún caso, sólo es posible desde la recreación, la transformación del objeto de un hacer previo. Muy esquemáticamente, aun más, si cabe, que en los entornos anteriores, trataré de dar alguno de los rasgos más característicos de las nuevas disciplinas, aunque deba indicar que precisamente por el deseo unificador —ideología subyacente— las interrelaciones entre las mismas son tan absolutas que es difícil la nítida separación, el precisar los límites entre alguna de ellas. Sin embargo, puede admitirse que el álgebra ha sido el primero en cristalizar y de ahí se haya convertido en modelo de los restantes haceres.

2.3.1. ALGEBRA «MODERNA»

Todavía en el primer tercio del siglo el objetivo del algebrista parecía quedar confinado al estudio de la resolución de ecuaciones algebraicas. Así, un matemático como Hasse mantenía, en 1927, que el álgebra «Es conjunto de métodos formales que permiten resolver ecuaciones formadas por las cuatro operaciones elementales con elementos conocidos y desconocidos.» Su zona de trabajo fundamental se centraba en el Análisis numérico, tanto en el cuerpo real como en el complejo, con sus técnicas de interpolación, extrapolación, eliminación..., culminando en la teoría de las funciones racionales y, fundamentalmente, en la teoría de invariantes. Por supuesto, se trabajaba también con las estructuras fundamentales, así la de grupo, espacio vectorial, pero ello de una manera calificable de implícita desde la actual perspectiva.

Sin embargo, he señalado cómo tras la ruptura de 1827 el estudio de aquellos sistemas que satisfacían unas leyes formales determinadas cobró radical importancia. En esta línea se habían creado objetos como las matrices, números hipercomplejos, imaginarios de Galois... Los mismos constituían sistemas algebraicos en el sentido de que satisfacían, las operaciones definidas entre ellos, ciertas propiedades, aunque no fueran las de los números racionales en su totalidad. Simultáneamente, la teoría de números algebraicos creada por Dedekind y Kronecker, el estudio de los cuerpos ciclotómicos desde Gauss, el estudio de las formas cuadráticas y las transformaciones lineales ligadas principalmente a la geometría analítica, provocaron una proliferación y dispersión de temas todos ellos considerados bajo el mismo nombre de algebraicos.

Y es en 1930-31 cuando van der Waerden publica *Algebra moderna*. La obra lleva como sustrato ideológico el creado por la escuela axiomática formalista alemana, centrada en la gran figura de Hilbert y en las no menos importantes de Noether, Artin... Precisamente el método axiomático, dirá van der Waerden, ha «creado un gran número de conceptos nuevos, revelado interrelaciones antes desconocidas y obtenido resultados muy potentes, especialmente en las teorías de *cuerpos* e *ideales, de grupos* y *números hipercomplejos*», en términos que muy semejantes serán retomados por Bourbaki y que ya he citado de este autor. Desde este plano ideológico, el objetivo de la obra se centra en sistematizar y exponer tales nuevos conceptos que componen, auténticamente, una nueva disciplina, un álgebra «moderna». En ella se intentarán situar los resultados clásicos en su lugar correspondiente, lugar que es ya el de la mera ejemplificación, el caso particular en el que se concretiza la nueva teoría, mucho más general y abstracta. Aunque sin emplear el término estructura, van der Waerden ha realizado la misma inversión que después proclamará Bourbaki como característica del nuevo hacer, aunque se limite a sólo uno de los campos, el algebraico, con las leyes de composición como operaciones centrales.

Es claro que esa inversión lo que implica es un cambio de objeto en el hacer algebraico. Cambio para ser el estudio de todo sistema de objetos ligados por las leyes de composición, por operaciones. Se ha convertido el álgebra en otra disciplina bautizada con el calificativo de «moderna», pero que tiene como objeto «el estudio de las estructuras algebraicas, por sí mismas», como señalaría Bourbaki en el fascículo dedicado a esta disciplina en sus *Elementos*. Cambio de objeto, cambio de disciplina reseñado con nitidez por un matemático como Rey Pastor, por ejemplo, en sus *Lecciones de álgebra*. En ellas, y todavía en la edición de 1957, mantiene el enfoque anterior a la ruptura de los entornos de 1939, y ello en defensa de un nombre, por «no desvirtuar la verdad histórica» respecto al significado auténtico del término «álgebra». Pero es el nuevo sentido el que, como no podía ser de otra manera, se mantiene en el marco actual. Incluso pasando alguno de sus elementos básicos a convertirse, como antes lo hiciera la terminología conjuntista, en conocimiento práctico, en un elemento más de la ideología que caracteriza la matemática actual. De esta manera, todo aquél que se dedique no ya a la matemática, sino a cualquier otro trabajo intelectual científico, ha de poseer un conocimiento de las estructuras básicas de un modo bastante profundo, aunque ello no implique que sea algebrista o ni siquiera matemático.

2.3.2. Geometría-Topología diferencial

En el hacer de la Geometría diferencial cabe consignar que la creada por Monge y Gauss, proseguida por Riemann, pasó a calificarse de «clásica» ya en los finales del siglo pasado. Y ello en función de que en su objeto se consideraban, por un lado, curvas y superficies suficientemente regulares, mientras que por otro prestaba atención preferente a las propiedades locales en perjuicio de las globales, de las propiedades sobre toda la superficie cerrada considerada. Limitación consecuente con el tipo de función admitido en el marco del hacer matemático que le era propio. La aceptación de las curvas teratológicas en los entornos de 1875, llevó a la aceptación de curvas y superficies no regulares o que pueden extenderse, prolongarse analíticamente adquiriendo en esta extensión singularidades. Además, la introducción de las nociones topológicas en las ecuaciones diferenciales por parte, entre otros, de Poincaré, inauguraría un nuevo hacer calificable de cualitativo. Y, como ya he indicado, en él las soluciones de una ecuación diferencial se tomaban en todo el dominio de definición, con lo cual se hacía problema la aparición de los puntos singulares de la ecuación. Este enfoque había conducido a Poincaré y a Elie Cartan a la creación de las formas diferenciales exteriores, instrumento que se hará esencial en el nuevo hacer de la geometría diferencial cualitativa, surgida en los entornos de 1875.

Por otro lado, el Programa de Erlangen y el influjo de la Geometría proyectiva, enfocada ya como la caracterizada por un determinado grupo, hizo que el estudio de la Geometría diferencial cambiara también de objeto en los entornos de 1875, y aunque pareciera que se continuaba ocupando de curvas y superficies, de hecho su objeto se centró en el estudio de las propiedades invariantes bajo transformaciones proyectivas y, con ello, de las propiedades invariantes respecto a transformaciones subordinadas a dichas transformaciones proyectivas, como podían ser la afín y la euclídea.

Sin embargo, las limitaciones ya señaladas al Programa de Erlangen respecto a las geometrías infinitesimales sólo pudieron superarse mediante la creación de un nuevo objeto en la línea concebida por Elie Cartan. En el Programa de Erlangen, Klein había señalado la posibilidad de aplicar el grupo de isometrías al espacio riemanniano. Ahora bien, la única isometría sobre este espacio es la transformación identidad; de aquí la limitación de la vía propugnada por Klein. Pero si se reemplaza el grupo por otro objeto más complejo entonces cabe la posibilidad de que la acción del grupo sobre dicho nuevo objeto sea factible. Es la idea reconocida, no conocida, por Cartan a partir de sus estudios sobre el referente móvil en los espacios riemannianos en los que, para seguir a Dieudonné, «se ha podido inaugurar una era nueva en el estudio (local y global) de los espacios riemannianos y de sus generalizaciones» *(Prefacio al Programa de Erlangen,* 1974, Gauthier-Villars). El nuevo objeto es lo que se conoce con el nombre de «espacio fibrado principal».

De una manera intuitiva este nuevo objeto, el espacio fibrado principal, puede ser interpretado como una familia de grupos isomorfos entre sí, familia que posee como conjunto de índices el de los puntos de la variedad diferencial que se considere; la acción de cada uno de los grupos se hace sobre objetos como los vectores tangentes, los tensores, las formas diferenciales..., ligadas al mismo punto y que son de naturaleza claramente «infinitesimal» en el entorno del punto de la variedad que se considere.

Naturalmente, el manejo del nuevo objeto, el espacio fibrado, exige el empleo de las nociones topológicas. Utilización de las mismas como campo propio o natural —como lo es para el Análisis de variable real— sólo reconocido plenamente en los entornos de 1939, permitiendo analizar las relaciones entre las propiedades locales y las globales.

Hay que observar que si Cartan inaugura una era nueva en el estudio de los espacios riemannianos, a partir de su generalización del referente móvil, no hace más que preparar la vía a esa renovación en el total de la disciplina; más aún, a la revolución consiguiente cuando se introduce de modo explícito la nueva estructura, el espacio fibrado —término que no es de Cartan—. Y, con él, el espacio fibrado vectorial que viene a corresponder a la idea intuitiva de espacio vectorial asociado a cada punto de la variedad diferencial, y que varía con el punto de un modo «diferencial».

De manera algo más rigurosa, un espacio fibrado vectorial sobre una variedad diferencial X, es una variedad diferencial V con una aplicación suprayectiva p de clase $C^k(k>1)$, $p:V\to X$, tal que para toda x, $x\in V$, $p^{-}(x)$ sea un espacio vectorial de dimensión fija —precisamente el rango de V—, existiendo para cada punto x de X un abierto U para el cual hay un diffeomorfismo g que transforma $p^{-}(U)$ en $U\times E$ de tal manera que g transforma linealmente cada $p^{-}(x)$ en $\{x\}\times E$. Al espacio E se le denomina espacio director, mientras que a $p^{-}(x)$ se le denomina fibra.

Con el espacio fibrado, nuevo objeto que puede tener unas resonancias más o menos intuitivas, se puede romper ya con la noción clásica de «figura geométrica». Y ello porque desde ahora puede considerarse el estudio de las transformaciones entre los puntos de un conjunto como dadas con independencia del conjunto de dichos puntos. Con palabras de Vidal Abascal, «es ahora cuando parece terminada la era euclídea» al considerar estructuras muy arbitrarias como objeto del hacer geométrico. Naturalmente, en esta creación han influido dos tipos de haceres: tanto el aspecto diferencial como el topológico. Y ello de forma tal que, en lugar de mantener el término geometría diferencial cabe admitir incluso un cambio de nombre, el de *Topología diferencial,* para remarcar el influjo de la herramienta topológica.

Por otro lado, como la variedad diferencial X considerada puede ser variedad holomorfa, pueden definirse los fibrados vectoriales holomorfos. La condición a imponer es que las fibras han de ser espacios vectoriales complejos mientras que los diffeomorfismos g también han de ser holomorfos. Si indico este hecho, esta ampliación particularísima, es debido a que los resultados fundamentales de las variedades holomorfas pueden expresarse en términos de la noción de *haz* creada en 1945 por Léray —uno de los miembros fundadores de Bourbaki—. Concepto de haz —*faisceaux*— que se ha convertido en central en gran parte del hacer matemático inaugurado en la ruptura de 1939. En el terreno en que nos encontramos, la idea intuitiva de haz parecería corresponder, más aún que la de fibrado, a la idea de la variación continua de los grupos o familias de conjunto de índices los puntos de la variedad holomorfa, que constituye una propiedad local; por su parte, la sección de un haz expresará la existencia de elementos definidos globalmente en la variedad considerada.

2.3.3. Geometría algebraica «abstracta»

Aquí interviene un punto. La técnica de haces ha invadido, desde su creación, muy diversas ramas del hacer matemático. Principalmente, en los campos de la topología. Pero ello supone un previo conocimiento de las estructuras y técnicas de otro hacer ya mencionado, el de la Topología algebraica, básicamente el *álgebra homológica,* donde se manejan las sucesiones exactas, los complejos y, entre ellos, los complejos simpliciales o complejos de cadenas y cocadenas que absorben el hacer clásico de la topología combinatoria creada por Poincaré. Es un hacer en el que intervienen otras dos nociones también creadas por Léray hacia la misma fecha: la de sucesión espectral, que permite el estudio de la estructura homológica de un espacio fibrado en función tanto del espacio base como de la fibra; la de cohomología de coeficientes en un haz. Instrumentos que van a ser, igualmente, fundamentales para un nuevo hacer, el de la Geometría algebraica «abstracta».

Siguiendo la vía iniciada por la Topología diferencial, A. Weil —miembro fundador de Bourbaki— «traducirá» el concepto de espacio fibrado a la teoría de variedades algebraicas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. El enlace con la geometría algebraica es radical, principalmente a partir de 1958 en que se reemplaza el fibrado por su imagen recíproca y se reemplaza la «topología de Zariski» por la «topología escalonada» aplicando las nociones de haces y cohomología de haces. Lo cual implica el previo esclarecimiento del término «variedad algebraica». En este sentido cabe observar que, en realidad, la geometría algebraica clásica se apoyaba, en última instancia, en elementos de naturaleza esencialmente topológica al utilizar como instrumentos los procedentes del análisis en cuanto el espacio fuera de dimensión mayor que 1 para tratar con elementos como los de variación continua, punto múltiple de una curva, número de intersección de ciclos... Es a partir de los entornos de 1939 cuando surgen los útiles puramente algebraicos que reemplacen las técnicas anteriores. Y, para ello, ha de romperse con la concepción clásica de variedad.

Una variedad algebraica se consideraba como una parte de un espacio afín, cuyos elementos venían dados por las coordenadas que anulaban un sistema de ecuaciones polinómicas, o de un espacio proyectivo en cuyo caso las coordenadas debían ser homogéneas y las ecuaciones polinómicas igualmente homogéneas. Desde el punto de vista algebraico ello implicaba asociar a las variedades algebraicas objetos algebraicos como los ideales del anillo de polinomios que constituían el sistema. Así, toda variedad está definida sobre un cuerpo determinado, previamente dado y que era, básicamente, el cuerpo de los reales o, más general, el cuerpo complejo, que es el campo de definición de la variedad ya que los coeficientes del sistema de ecuaciones pertenecen a ese cuerpo. El papel del cuerpo de los complejos y de la geometría proyectiva es, así, absolutamente predominante. Y, desde este enfoque, como señala Dieudonné, todavía en 1937 la variedad algebraica no se considera como un conjunto de puntos sino que se habla del punto de la variedad sobre el cuerpo. El mismo van der Waerden, para definir una variedad algebraica, comienza desde un cuerpo conmutativo K —en el que una sucesión de los elementos de una extensión algebraica de K se denomina un punto— y el dominio de n indeterminadas sobre K, dominio D; un punto p se dice cero del polinomio $f(x)$ si $f(p)=0$, y entonces «los ceros comunes de un número arbitrario de polinomios $f_1, \ldots, f_r$, es decir, las soluciones de un sistema de ecuaciones $f_1(p)=0, \ldots, f_r(p)=0$, se dice que forman una *variedad algebraica* M, cuando este conjunto no es vacío», y más adelante, teniendo presente el teorema de la base de Hilbert, se obtiene que una variedad algebraica consiste en aquellos puntos que son ceros de un ideal de D.

Invirtiendo esta noción, A. Weil parte de la variedad algebraica como tal conjunto de puntos, con lo que se permite liberar de la geometría proyectiva considerando variedades de ideales como módulos. Y es siguiendo esta línea como Zariski se liga a la creación de alguna de las nociones fundamentales de la geometría algebraica «abstracta», entre ellas la de la «topología» que hoy lleva su nombre, a base de definir un «abierto» como aquella variedad tal que su complementario en el espacio considerado sea un subconjunto algebraico de dicho espacio.

La influencia del método algebraico, con su algebrización formal consiguiente, provoca una inversión en el hacer de la geometría algebraica. Inversión cristalizada y criticada duramente por considerar que se ha eliminado uno de los dos términos, precisamente el de geometría. Y ello cabe considerarlo como cierto, pero no criticable, porque de lo que se trata es de un hacer nuevo, radicalmente diferente al clásico, al que hasta los entornos de 1939 se consideraba como propio de la geometría algebraica, apoyado en la proyectiva y, con ésta, en la última intuición geométrica representada por el método sintético. Cambio de objeto que ha llevado a un intento de unificación con Grothendieck —miembro del grupo bourbakista durante una temporada— bajo la teoría de haces y esquemas. Teoría esta última que comprende como prerrequisitos el dominio del álgebra conmutativa por un lado, de la topología algebraica —en su versión de homología o álgebra homológica—, por otro. Con su rasgo a destacar, como característico también del nuevo mecanismo pragmático: más que trabajar sobre las propiedades intrínsecas de los esquemas, se trabaja sobre las propiedades de los morfismos entre dichos esquemas.

2.3.4. Teoría de categorías

En los párrafos anteriores no se ha definido, a pesar de la importancia atribuida al mismo, el concepto de haz. Se debe a que interviene, aquí, otra gran creación, de 1945, referente al vocabulario base en el cual cabe expresar el nuevo hacer matemático surgido en los entornos de 1939. Puede verse en el concepto de haz. Este puede definirse como un prehaz que satisface unas ciertas condiciones o axiomas, en general, de regularidad. Y un prehaz sobre un espacio topológico X —o con base X— puede definirse en los términos siguientes:

Un prehaz $\mathfrak{F}$ consiste en asociar un objeto $\mathfrak{F}(U)$ a cada abierto U, $U \subset X$, y dar un homomorfismo $h_{UV}: \mathfrak{F}(V) \to \mathfrak{F}(U)$, si $U \subset V$, tal que se satisfacen los axiomas: h_{UU} es la identidad para cualquier U; si $U \subset V \subset W$, entonces $h_{UW} = h_{UV} h_{VW}$. El homomorfismo h_{UV} es la restricción de $\mathfrak{F}(V)$ en $\mathfrak{F}(U)$.

La definición anterior cabe resumirla y abreviarla en términos no tan clásicos. Para ello, dado un espacio topológico X se considera la familia de sus partes abiertas, que constituye una categoría siempre que se admita que para dos abiertos U y V de la familia, entonces Hom (U, V) es unitario si $U \subset V$ y vacío en caso contrario. Con lo cual,

Dada una categoría cualquiera C, se llama *prehaz* de base X con valores en C a todo funtor contravariante definido sobre la categoría de abiertos de X con valores en C.

Definidos los prehaces de base un mismo espacio topológico X y valores en la misma categoría pueden compararse entre sí mediante la composición de los funtores correspondientes, que dan paso a un homomorfismo entre los prehaces; homomorfismo que es la colección de homomorfismos entre los objetos $\mathfrak{F}'(U)$ y $\mathfrak{F}''(U)$. Tales homomorfismos constituyen una clase y esto permite afirmar que los prehaces de base un espacio topológico dado, con valores en una categoría dada, constituyen a su vez una nueva categoría, abeliana además, por lo que en ella se puede realizar la construcción de sucesiones exactas de prehaces...

Lo que interesa destacar es el hecho de haber utilizado términos procedentes de un nuevo vocabulario, el categórico. Es en 1945 cuando Mac Lane y Eilenberg publican un ensayo, fundamental: «General theory of Natural equivalences» (*American Society Transactions*, 56, pp. 221-294). En él se expone una nueva teoría, totalmente integrada en la ideología de la ruptura provocada en los entornos de 1939. En la página 236 afirman: «En un sentido metamatemático, nuestra teoría proporciona los conceptos generales aplicables a todas las ramas de las matemáticas abstractas, y contribuye así a la tendencia actual hacia un tratamiento uniforme de disciplinas matemáticas diferentes. En particular, suministra ocasiones de comparar las construcciones e isomorfismos que intervienen en las distintas ramas de las matemáticas; de esta forma puede sugerir eventualmente nuevos resultados por analogía.»

Deseo de unificación, como en Bourbaki, a partir tanto del método —uniformidad en el tratamiento que, por supuesto, es el axiomático— como del objeto —la estructura subyacente a cada una de las disciplinas de las matemáticas—. Si en cada disciplina se manejan estructuras y morfismos entre estructuras, cabe considerar que dichas estructuras y morfismos constituyen, a su vez, objetos de trabajo, pero tomados como una colección, como una clase. Es decir, el objeto de trabajo puede tomarse ahora la clase de determinadas estructuras con sus morfismos; clase y no conjunto en el sentido de una práctica teórica formal de conjuntos porque cada elemento de la clase es, a su vez, una estructura, es decir, un par constituido por un conjunto y sus leyes de composición o relación, y la antinomia cantoriana impediría el manejo de proposiciones como «el conjunto de todos los conjuntos». Con algo más de rigor, cabe definir el concepto de categoría en la forma siguiente —empleando notación izquierda-derecha—:

Una *categoría* C es una clase de objetos dividida, a su vez, en dos clases: una de objetos $X,Y,Z,\ldots$ y otra de morfismos entre dichos objetos. Se han de verificar las condiciones siguientes:

1. A todo par ordenado de objetos (X,Y) se le asocia un conjunto Hom (X,Y) de los morfismos de X en Y.
2. Si $(X,Y)\neq(U,V)$, entonces $\text{Hom}\,(X,Y)\cap\text{Hom}\,(U,V)=\varnothing$.
3. Para toda terna ordenada (X,Y,Z) de objetos y todo par de morfismos $f\in\text{Hom}\,(X,Y)$, $g\in\text{Hom}\,(Y,Z)$, existe un morfismo $h=fg\in\text{Hom}\,(X,Z)$, propiedad que se denomina «composición de morfismos».
4. La composición de morfismos es asociativa.
5. Existe el morfismo identidad o unidad para cada objeto, es decir, para cualquier X existe $u_X\in\text{Hom}\,(X,X)$ tal que se satisface $fu_Y=f=u_Xf$ para todo morfismo $f\in\text{Hom}\,(X,Y)$.

De esta manera se han creado, por ejemplo, la categoría de conjuntos —en la cual los objetos son los conjuntos y los morfismos las aplicaciones entre los conjuntos, y aquí se observa la necesidad de hablar de la clase de objetos y no del conjunto de objetos para no incurrir en la antinomia citada del conjunto de todos los conjuntos—, la de prehaces y morfismos entre prehaces, la de grupos y homomorfismos entre grupos, de grupos abelianos y homomorfismos, de espacios topológicos y aplicaciones continuas, de complejos simpliciales y aplicaciones simpliciales, de espacios medibles y aplicaciones medibles, de ordenaciones...

Las técnicas que he mencionado como originadas en la ruptura que se está considerando pueden aplicarse, a su vez, a las categorías, lo que permite hablar de subcategorías, categorías cociente, categorías producto, etc. Además, dadas dos categorías, puede establecerse entre ellas una relación, la cual da paso al concepto de funtor.

Un *funtor covariante* F entre dos categorías C_1 y C_2 equivale a dar, para todo objeto X de C_1 un objeto $F(X)$ de C_2, y para todo morfismo f

entre dos objetos de C_1, $f \in \mathrm{Hom}\,(X,Y)$, un morfismo $F(f)$ entre los objetos correspondientes de C_2, $F(f) \in \mathrm{Hom}\,(F(X),F(Y))$, de tal manera que se verifiquen las condiciones:

1. Si f es la identidad también lo es $F(f)$, es decir, $F(u_X) = u_{F(X)}$.
2. $F(fg) = F(f)F(g)$, siempre que esta relación tenga sentido.

En diagramas de flechas, instrumento que permite, además de una visualización concretizadora fundamental, el que en lugar de «morfismo» se utilice el término «flecha» para evitar las reminiscencias posibles con la teoría intuitiva de conjuntos, se tendría

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "fg"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(fg)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\ & F(Z) \end{tikzcd}$$

Si el funtor invierte el sentido de las flechas, de los morfismos, es decir, si $F(f) \in \mathrm{Hom}\,(F(Y),F(X))$, entonces en lugar de funtor covariante se habla de *funtor contravariante.* El diagrama correspondiente sería

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ F(X) & F(Y) \arrow[l, "F(f)"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(fg)"'] & Y \arrow[d, "F(g)"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) & F(Y) \arrow[l, "F(f)"'] \\ & F(Z) \arrow[u, "F(g)"'] \arrow[ul, "F(fg)"] \end{tikzcd}$$

Ejemplo de funtor, elemental, es el dado por el de conjunto de las partes de un conjunto dado. Es decir, en la categoría de conjuntos el funtor tiene como objeto el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de las partes de X y por morfismos las aplicaciones f, $f:A \to B$, tal que a cada $A \in \mathcal{P}(X)$ le asocia su imagen $f(A)$ en B. Si f es la identidad, entonces $u(A)=A$.

Cabe observar que el funtor actúa no sólo entre estructuras sino que puede adoptar como origen y final de la flecha otras categorías. Con ello, se entra en la problemática de la categoría de todas las categorías, en paralelo al problema del conjunto de todos los conjuntos.

Otro concepto esencial, y que daba título al ensayo creador de Mac Lane y Eilenberg es el de *transformación natural* o *morfismo de funtor*. Dados dos funtores, $F:C_1 \to C_2$ y $G:C_1 \to C_2$, una transformación natural equivale a dar, para cada X, $X \in C_1$, un morfismo $T(X)$, $T(X):F(X) \to G(X)$, tal que para cualesquiera X, Y de C_1 y f de $Hom(X,Y)$, el diagrama siguiente sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "T(X)"'] & F(Y) \arrow[d, "T(Y)"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

La teoría de categorías, surgida en 1945, ha supuesto la aparición de un lenguaje unificador para todo el hacer matemático creado a partir de 1939. En este aspecto de conocimiento práctico —junto al cual existe un conocimiento teórico de esta disciplina, como tal Teoría de categorías, y la diferencia en los dos niveles corre en paralelo a la existente en los dos conocimientos de la teoría de conjuntos o en cualquier otro hacer matemático—, el lenguaje categórico puede equipararse al que tuvo la teoría de conjuntos en el hacer matemático surgido en los entornos de 1875. Y, manteniendo el paralelismo, se ha suscitado polémica en torno a la teoría de categorías como un bagaje inútil, aunque alguno de los que la han criticado vivamente, calificándola, con Mac Lane, de «abstract non sense», la utilicen ampliamente en cuanto deben trabajar en terrenos como el geométrico-algebraico. Naturalmente, no es lenguaje apropiado, en principio, más que para este nuevo hacer, básicamente para el álgebra calificada de «moderna», álgebra homológica, geometría algebraica, topología diferencial..., y si invade otros terrenos, otros haceres coexistentes con ellos, otros haceres procedentes de la ruptura de 1875, es porque los mismos se han transformado básicamente, rompiendo con el marco —y, por tanto, con el objeto— que les era propio. Es claro que el vocabulario de categorías es esencial para un hacer cuyo objeto es la estructura y no el elemento individualizado o el conjunto amorfo.

Además, es sólo desde este enfoque desde el cual pueden plantearse los llamados «problemas universales», así como conseguir la caracterización de las propiedades auténticamente intrínsecas de los objetos que se manejan; objetos que, por supuesto, van a estar centrados más en las transformaciones, en los morfismos, que en los elementos individualizados. Así, por ejemplo, la caracterización de las aplicaciones inyectiva y suprayectiva en la teoría de conjuntos se centrará en la posibilidad de simplificación a la izquierda y derecha, respectivamente, en la composición de aplicaciones, más que en la caracterización clásica conjuntista del número de elementos del imagen de un original dado. Caracterización intrínseca que permite, en lenguaje no categórico, realizar el estudio de lo que ha venido en calificarse de *álgebras universales,* donde se manejan homomorfismos, subestructuras, estructuras libres, producto directo...

Fundamentos del hacer matemático

Consecuencia de la imperiosa necesidad del lenguaje categórico para el hacer surgido en los entornos de 1939 —necesidad sentida, básicamente, a partir de 1950—, se tiene el inmediato intento de fundamentación lógica de «todo» el hacer en este lenguaje. Es proceso paralelo al surgido en 1875 cuando se pretendió, ya hacia 1908, fundamentar «toda» la matemática entonces existente en la teoría de conjuntos, axiomatizada por Zermelo, frente a los intentos de fundamentación estrictamente lógico del logicismo y constructivo de los intuicionistas. Si, como indicara Bourbaki, el nuevo hacer de la ruptura de 1939 tiene sentido sólo desde la propia desaparición del ente «conjunto», en beneficio de la estructura, es consecuente la actual búsqueda de una fundamentación que tenga en cuenta la inversión producida en el hacer interno matemático. Lo cual indica, por otro lado, que la pretensión absolutista de unos fundamentos, aquí y ahora, pero sub species aeternitatis, es utópica. En cada marco se tendrá que buscar la fundamentación que le sea propia al mismo, y siempre con limitaciones, entre otras porque esa búsqueda se hará con los instrumentos de lo que se quiere fundamentar.

Corresponde a F. William Lawvere el intento de lograr dicha fundamentación, ya en la década de 1960. En 1964 da, entre otros, el axioma del infinito y que hoy lleva el nombre de «axioma de Peano-Lawvere», con el cual, junto a los axiomas de la teoría de categorías de conjuntos, permite caracterizar la aritmética de los números naturales. Posteriormente, el enlace de la teoría de categorías con la de topos, prehaces y geometría algebraica se está mostrando esencial para los intentos de Lawvere y de quienes trabajan en la misma dirección, de lograr una fundamentación, que él califica de «dialéctica», del trabajo matemático, aun reconociendo que la misma no puede tener otra característica que la meramente descriptiva, logrando así, por ejemplo, una revisión de la lógica intuicionista de Heyting como la más adaptada a la teoría de topos.

El punto de partida de Lawvere es considerar como un hecho el que las propiedades relevantes de los objetos matemáticos son las que pueden establecerse en términos de su estructura abstracta y no en términos de los elementos en que los objetos pueden pensarse descompuestos. Con lo cual el problema se centra en dar unos fundamentos que expresen esta convicción y donde, en particular, no intervengan para nada las clases y la pertenencia a la clase; precisamente los términos centrales de los intentos de fundamentación conjuntista. Lawvere mantiene, sin embargo, que «por 'fundamento' significamos un sistema singular de axiomas de primer orden en el cual todos los objetos usuales de la matemática pueden ser definidos y todas sus propiedades usuales demostradas». Un fundamento del tipo propuesto se ve, en principio, más natural que el clásico para el desarrollo del análisis funcional, topología algebraica, teoría de modelos de sistemas algebraicos generales, etc. Lawvere afirma: «Así creemos haber demostrado parcialmente que aún en fundamentos, no la Sustancia, sino la Forma invariante es el vehículo de la información matemática relevante», y ello por el hecho de que la teoría reposa, esencialmente, sobre los morfismos entre los objetos, entre las estructuras y no sobre objeto individual alguno que tuviera que caracterizarse por su esencia.

En el terreno de fundamentos, y simultáneamente a los intentos de Lawvere, y ligando las álgebras universales con la lógica de predicados de primer orden con igualdad, según las líneas de la lógica matemática de los entornos de 1939, se crea lo que en términos de Tarski —ya de 1954— se ha denominado «teoría de modelos», que constituye una de las ramas más activas actualmente de la lógica matemática. En ella se manejan las relaciones entre «lenguajes», entre los cálculos lógicos tomados como un todo, como una estructura formal. Y aunque se reconociera, desde la nueva perspectiva, que un resultado como el teorema de Löwenheim-Skolem para la teoría de conjuntos es realmente un teorema propio de esta teoría, así como los de completitud de Gödel o la definición semántica de verdad de Tarski, uno de los logros más interesantes en este nuevo hacer es la creación, por parte de A. Robinson, del Análisis no canónico, con el manejo de los infinitésimos —rechazados por matemáticos como Cantor, Poincaré, Du Bois Reymond... y de los que según Fraenkel había que aguardar la aparición de un nuevo Cantor para la definitiva clarificación del infinitamente pequeño—, pero ya sin las polémicas que suscitara su empleo en la creación del análisis clásico.

2.3.5. Otros haceres

Junto a las disciplinas apuntadas en los párrafos anteriores como originadas en estos entornos y cuyas delimitaciones son difíciles por sus interrelaciones, motivadas por el objetivo unificador del nuevo tipo de hacer matemático, cabe consignar la creación de otras nociones e instrumentos, ligados aparentemente a un hacer anterior al de la ruptura de 1939; aparentemente, dado que se utilizan instrumentos propios de esta ruptura y se maneje la estructura como objeto último. Como no pretendo, aquí, ser exhaustivo, ni siquiera mínimamente completo respecto a todo el haz de tales nuevas nociones, me limito a reseñar dos de tales nociones ya que, al menos, debe ser mencionada la creación, por parte de Laurent Schwartz, de la *teoría de distribuciones* en 1945, así como la aparición de las computadoras por las mismas fechas.

He señalado que, en los entornos de 1875, se admite que las funciones continuas no son necesariamente diferenciables, lo cual daba paso a las funciones «teratológicas». El análisis «clásico» acepta este hecho y lo estudia con los nuevos instrumentos proporcionados por la teoría de conjuntos y las nociones topológicas ligadas a la misma. Schwartz se plantea como problema esta aceptación, fundamentalmente desde el lenguaje utilizado por los físicos en el manejo de sus funciones: «Decir que la función de Heaviside, que es igual a 0 para $x<0$ y a 1 para $x>0$, tiene por derivada la función de Dirac $\sigma(x)$, la definición es matemáticamente contradictoria (así como tomar la derivada de esta pretendida función), es pasar los límites que nos están permitidos.» Contradicción que, desde el terreno del trabajo matemático no constituye sino un estímulo, porque es un problema a resolver. Y el problema lo resuelve Schwartz creando la teoría de distribuciones en la cual una distribución hace el papel de función continua de tal manera que su derivada sea siempre una distribución. Con lo cual generaliza la noción de función, dado que toda distribución es diferenciable. Naturalmente, la generalización existe por cambio de objeto, no por abstracción en sí.

De una manera intuitiva, puede indicarse lo siguiente para dar una idea del término «distribución»: Se supone dado un espacio vectorial X de las funciones de valores complejos en $\mathbb{R}^n$, indefinidamente diferenciables, de soporte compacto; una sucesión de elementos de X converge a 0 en X si los soportes de las funciones de la sucesión están contenidos en el mismo compacto y todas las derivadas parciales sucesivas convergen uniformemente a 0 en $\mathbb{R}^n$. Se denomina *distribución* en $\mathbb{R}^n$ a toda forma lineal D en X tal que para toda sucesión de elementos de X que converge en 0 en el espacio X, la imagen por D tienda a 0.

Con palabras de Schwartz, «las distribuciones son un poco para las funciones lo que los números complejos para los números reales: toda ecuación algebraica con coeficientes reales o complejos tiene raíces complejas; toda función localmente o toda distribución tiene derivadas sucesivas de todos los órdenes que son distribuciones».

Si el primer método de introducción de las distribuciones se realizó de una manera funcional, lo que exige de modo natural el previo conocimiento del Análisis funcional, posteriormente puede considerarse que se ha simplificado al poder realizar dicha introducción mediante las aproximaciones secuenciales, es decir, una distribución puede considerarse como el límite de una sucesión de funciones; construcción en paralelo al de las clases de equivalencia de Cantor, más intuitivo para el matemático «clásico» por el manejo constante que realiza de dicho método. En cualquier caso, la creación de Schwartz permite el entronque, nuevamente, con el lenguaje del físico, dando razón del uso que éstos hacían de funciones como la de Dirac que ni podía calificarse de función desde el punto de vista del matemático. Igualmente ha mostrado su fecundidad no sólo en el Análisis funcional, sino en la teoría de las funciones o transformaciones de Fourier y Laplace, o en las ecuaciones en derivadas parciales. Y también en un terreno aparentemente alejado, como el de la Topología algebraica, y ello por la creación por parte de De Rham de la noción de *corriente*, «generalización» de la forma diferencial sobre una variedad y de la noción de cadena; la distribución puede utilizarse como una operación derivación que es el borde para la cadena y la diferencial exterior para una forma. Aquí cabría mencionar la afirmación de De Rham de no haber hecho otra cosa que «traducir» a términos de corriente las proposiciones de Poincaré respecto a las formas diferenciales. Recuerda la afirmación de poder «traducir» a términos de cálculo integral de Cauchy todas las proposiciones de los tratados de la ruleta de Pascal. Traducción de hecho factible, incluso con el propio proceso de paso al límite reconocido aunque no conocido por Pascal, pero que no indica la incorporación de «todo» el hacer pascaliano en el hacer de Cauchy, como ya he insistido; traducción sólo factible desde la creación de un nuevo marco y, en él, de un nuevo concepto: el de integral definida, el de corriente.

Hacia 1931, Gödel, Herbrand, Tarski, consiguen demostrar uno de los teoremas más significativos en el terreno del formalismo, la imposibilidad de demostrar la consistencia de un sistema formal lo suficientemente potente para contener toda la aritmética. Inmediatamente, en 1937, Turing da la noción de sistema formal en toda su generalidad. Antes, Church, en 1936, da la solución negativa del problema de decisión para el cálculo de predicados de primer orden. Pero, lo más significativo en este orden de ideas es el empleo de la recursividad como instrumento base. Entre 1936 y 1944-7 es la herramienta que permite la creación de la teoría de funciones recursivas o calculables de Kleene, Turing, Church, que reciben nuevo impulso con los algoritmos de Post y Markov, con sus repercusiones no sólo en el interior de los cálculos lógicos, sino también algebraicos y lingüísticos y, fundamentalmente, con el paso a los problemas de algoritmos y computación.

Problemas a los que se liga otro hecho de importancia central: Shannon establece un enlace entre las álgebras de Boole, las estructuras reticulares y los circuitos de conmutación con interruptores hacia 1939. La posibilidad de creación de las máquinas lógicas, tan querida de Pascal y Leibniz, queda abierta. La lógica proposicional va a jugar su papel en el diseño de computadores mientras que los teoremas de limitación de Gödel, aparte de sus implicaciones ideológicas, al utilizar la recursividad y con ella el método de aritmetización, permiten convertir cualquier problema lógico, o que pueda expresarse en un cálculo lógico, en problema aritmético.

De hecho, a partir de los entornos de 1939 surgen las máquinas electrónicas de cálculo que pueden suponer para el trabajo matemático una verdadera revolución y no sólo por la función de cálculo de las mismas, sino por la posibilidad de la experimentación. Por otro lado, metodológicamente, las consecuencias de la introducción de las computadoras en la propia enseñanza aún no se han extraído con la radicalidad necesaria, dado que, si bien de momento no parecen tener repercusiones sobre el hacer surgido en los entornos de 1939, sí cabe consignar que esas repercusiones existen sobre los haceres de los entornos anteriores, más abocados a los métodos de aproximación y cálculo que al trabajo «abstracto». Y ello porque, en principio, parecerían aplicarse estas técnicas de computación a los números individuales; así, se crearon técnicas para el cálculo y descubrimiento de números primos muy elevados, para el desarrollo de números trascendentes... Sin embargo, parece que lo interesante no es ligarse a estos problemas concretos, sino más bien al trabajo y manejo de las propiedades generales de dichos números, que es lo que auténticamente parece presentar interés. En este orden de cosas, podrían tener sentido los intentos, a lo Hao Wang, de tratar las deducciones formales mediante computadoras. Al menos, hay un problema en este contexto.

2.3.6. Reflexiones

Quisiera destacar, junto a los dos planos del marco surgido en los entornos de 1939, ideológico e interno, que he procurado esquematizar en las líneas anteriores, la aparición de un hecho realmente significativo. De manera tradicional el matemático ha sido un trabajador individual, aislado. Aunque en comunicación con los demás, la misma era a un nivel de resultados previamente obtenidos o de resolución de problemas en competencia. En este contexto, los matemáticos franceses han solido ser modelos de individualismo. Puede citarse incluso el ejemplo de Lebesgue negándose a la orientación, a la creación de discípulos, mediante la dirección de las tesis doctorales: si es un matemático, ya encontrará problemas que resolver y tratará de aproximarse a su solución; si no lo es, no vale la pena dedicarle atención alguna. Frente a esta especial idiosincrasia, los matemáticos alemanes, por el contrario, han procurado la creación de escuelas, de discípulos, como lo muestra el caso de Hilbert. Escuelas, discípulos, pero siempre con una cabeza directora, indiscutida. Sin embargo, la ruptura de 1939 va a producir también un cambio en este modo de trabajar del matemático. El caso del matemático más influyente en esta ruptura, Nicolás Bourbaki, es el auténtico modelo. Seudónimo de un equipo, siempre variable, de matemáticos de auténtica genialidad creadora —he ido mencionando creaciones de Léray, de Weil, a Henri Cartan, a Dieudonné, pero también al polaco Eilenberg, al alemán-francés Grothendieck...—, Nicolás Bourbaki es «el matemático» por excelencia surgido en estos entornos. Trabajo en equipo con desaparición, incluso, del nombre de quienes forman dicho equipo, incluidos bajo una rúbrica como los obreros de una fábrica de la que se conoce el nombre pero no el de los trabajadores que en ella trabajan y producen.

El influjo de esta manera de trabajar se ha dejado sentir también en la forma de dar a publicidad el trabajo. Como los equipos que van creando realizan un trabajo de superespecialización, lo interesante es la comunicación por multicopista entre diversos equipos. Multicopista más rápida que la comunicación en revistas y no se diga que en libros. Estos quedan para divulgación o sistematización posterior a la creación, realmente. Método que provoca un desfase entre los distintos centros de trabajo más notable que en épocas anteriores. Si no se pertenece a uno de los «equipos» de vanguardia puede estimarse que el producto que se fabrique va a aparecer, cuando se publique, anticuado, desfasado.

Simultáneamente se ha dado paso a una nueva forma de trabajo en relación de la matemática con otras disciplinas: el equipo de especialistas en diversas ramas —biología, lingüística, ciencias sociales, cibernética...— con el consiguiente cambio de enfoque tanto en el hacer propio matemático como en el del significado y referencial del objeto al cual modela. En este tipo de trabajo en equipo inciden, igualmente, los cambios sociales producidos a partir de la segunda guerra mundial y que permiten que, en el momento presente, la mayoría de los trabajos de investigación de matemática «pura», abstracta, estén subvencionados por departamentos militares.

Lo más significativo, simultáneamente, es que todos estos rasgos indican la existencia, actual, de un nuevo momento de inflexión, de ruptura en el contexto matemático. Existencia aún más notable si se observa un intento de vuelta a las génesis, a las motivaciones no formales de cada idea, de cada teoría, de cada exposición, por considerar que el hacer actual se encuentra, al menos el surgido en los entornos de 1939, falto de verdaderas ideas innovadoras, habiéndose llegado ya a sus posibles limitaciones por excesiva carga de «abstracción». Habiéndose producido, incluso, el abandono del trabajo matemático creador —no del expositivo o del profesoral, por ser éstos medios de vida— por parte de matemáticos como Grothendieck, Chevalley, Pierre Samuel..., todos ellos, por cierto, miembros de Bourbaki.

CONSECUENCIAS & REPERCUSIONES

Dos, entre otras, son las tesis que se han admitido y que han permitido esquematizar alguna de las rupturas epistemológicas centrales, convertidas en hechos teóricos, conceptuales por el marco previo que conforman. Por un lado, la existencia de esas rupturas en el trabajo matemático, con la consecuencia de que, en el mismo, aparecen otros haceres distintos de los hasta entonces existentes; consecuencia inmediata en el hecho de implicar la coexistencia de haceres y la aparición de tiempos distintos para cada uno de ellos. Por otro lado, la manifestación en todos los marcos de dos planos: uno de práctica interna, otro de práctica externa; o también, de trabajo intrínseco matemático y de un contexto ideológico que posibilita ese trabajo, lo condiciona, aunque también sea condicionado por el mismo.

Ambas tesis hacen surgir un haz de consecuencias de muy distinto tipo, afectando no sólo al trabajo matemático, sino a contextos como los sociológicos, didácticos, psicológicos en que el mismo queda enmarcado. Una vez más, el conocimiento teórico muestra su faceta de condicionador de cualquier planteamiento pragmático, de regulador de cualquier praxis que es resultado de la práctica teórica previa.

Muy brevemente alguna de las cuestiones que se plantean con la admisión de estas tesis, ya mencionadas en algunos casos de modo explícito, en otros implícito, y cuyo tratamiento completo queda fuera de lugar de este trabajo, abocado principalmente a poner de manifiesto la coherencia de las mismas, pueden esbozarse en los puntos siguientes.

3.1. COEXISTENCIA DE LOS HACERES MATEMATICOS

He insistido en que admitir que el hacer matemático no es un hacer único a lo largo de historia evolutiva alguna, sino que es un trabajo a base de saltos y rupturas epistemológicas, en las cuales se crean nuevas disciplinas o ramas por creación de nuevos objetos y técnicas de trabajo intelectual, entraña la admisión de que, durante algunos momentos, existen varios haceres de muy distinto tipo, cubiertos todos bajo el mismo nombre de «matemática». Haceres —manifestados en disciplinas— que presentan, igualmente, tiempos distintos en el sentido de que algunos se encuentran abocados al cierre por haber alcanzado sus límites de ideas originales, mientras que otros muestran un tiempo futuro, el campo de creación propio para un marco determinado. La ruptura obliga a los primeros a convertirse en pasado en oposición a una nueva manera de hacer, calificable en todos los casos de «moderna». Pero también en todos los casos hay que observar que toda ruptura se realiza en el interior de un contexto determinado y en relación con las limitaciones que en esos contextos presenta la matemática convertida en clásica, mientras que hay otros haceres que se mantienen en cierto modo independientes a dicho marco y a las rupturas internas al mismo. En otras palabras, en el momento de la ruptura no todos los matemáticos admiten las nuevas formas de trabajo que la misma implica.

Provocada la ruptura, originados problemas, terrenos de búsqueda y creación, señalados los límites del hacer anterior, la disciplina clásica queda como reliquia, aunque no se vea tal condición en los primeros momentos. Se incorpora algo de ella —algunos problemas, las técnicas constructivas—, pero siempre que ese algo sea transformado desde la nueva perspectiva. En general, y además de las técnicas, lo que se incorpora es parte del lenguaje, como sustrato ideológico, no como hacer, y ello por su condición de más común o conocido y por tanto como elemento que facilita la «intuición» del nuevo modo de trabajo, además de constituir el elemento primario sobre el cual realizar la transformación. Es decir, en todo caso, queda como conocimiento práctico, instrumental, y no como conocimiento teórico. Aunque siempre, y como instrumento, alguno de sus elementos y desde la nueva perspectiva, podrá convertirse en problema y, con ello, en conocimiento teórico; pero, hay que insistir, desde el nuevo marco, desde el nuevo hacer.

Si, como ejemplo, en la ruptura de 1875 se crean nuevas disciplinas, alguna de ellas puede estimarse como realmente cerrada. Así, la teoría de funciones de variable real, la topología conjuntista tras su inflexión axiomatizadora de los entornos de 1920, la geometría diferencial cualitativa, el cálculo de predicados de primer orden... Son disciplinas ya cerradas, clausuradas, aunque por supuesto presenten problemas particulares o incluso posibilidades de una exposición de enfoque particular, mínimamente original. Las grandes ideas, sin embargo, en esos haceres, se encuentran dadas ya y sólo una inversión de sus marcos podrá originar, desde otro distinto, algo verdaderamente original. Como en la geometría euclídea o en la geometría analítica, aunque puedan en un momento determinado encontrarse algunas nociones originales, alguna nueva propiedad del triángulo, pongo por caso. Ahora bien, todas ellas se han convertido en conocimientos prácticos, en base para poder desarrollar otras teorías, otros conocimientos. Como conocimientos ya logrados, permiten la fabricación de otros al servir como mínimo de lenguaje, de vocabulario imprescindible para los mismos; así, la topología conjuntista se hace herramienta imprescindible para el Análisis funcional, el Algebra homológica, la Topología algebraica, la Geometría algebraica...; el Cálculo de predicados de primer orden con igualdad, para la teoría de modelos... Es lo ocurrido en la ruptura de los entornos de 1939, y de ahí la afirmación de que, tras ésta, coexistan disciplinas pertenecientes a marcos distintos, con modos de hacer distintos, pero también con tiempos de creación distintos.

Quiere decir todo esto que, en un momento de ruptura, la misma provoca disciplinas, temas, vocabulario que se ven como innovaciones para después pasar a conocimiento práctico, a ideología. Es lo ocurrido en teoría de conjuntos, que ha pasado de disciplina revolucionaria a vocabulario base del hacer matemático; de vocabulario matemático, a vocabulario infantil. Naturalmente, en cada una de las transformaciones se deforma la teoría original, se transfigura. En el último estadio mencionado, más que una teoría de conjuntos lo que se tiene es teoría de lazos, aros y curvas de colores —cuantos más, mejor— contorneando peras, manzanas, cuadrados o triángulos rojos...; lo que se tiene es teoría de gomas de colores. En otras palabras, se toma el vocabulario conjuntista para deformarlo, en los más de los casos. Por lo que se puede afirmar que pasa a convertirse en elemento no matemático, como no lo es —desde mi punto de vista— el sistema métrico decimal, los sistemas de numeración, los algoritmos de sumar o las tablas de multiplicación, las tablas trigonométricas y la resolución de problemas sobre triángulos, el mismo Cálculo como técnica de derivación e integración formal...

Sin llegar a estos excesos, lo que sí quiero indicar es que una ruptura convierte el hacer anterior en algo pasado, aunque el mismo pueda mantenerse durante algún tiempo sin percibirse su cierre y pueda recibir de él, y aportarle, influencias. Interrelaciones mutuas, siempre, como meros auxiliares. Si se recurre a la Geometría, se hace ésta una práctica teórica, una herramienta para el algebrista que encuentra el lenguaje geométrico más cómodo —con sus restos de ideologías de realismo sensitivo, ingenuo, que le permite «creer» en una mayor objetividad del sistema formal que maneja, para lo cual hará llamada a la intuición concreta de la figura frente a la abstracción del sistema formal en el que auténticamente trabaja—, aunque no los métodos propios o característicos del hacer geométrico.

Naturalmente, la ruptura no elimina el hacer convertido en pasado. Incluso éste puede mantenerse en igualdad de condiciones, como disciplina aparentemente más importante que el nuevo hacer, por bastante tiempo, aunque su tiempo lo sea de supervivencia. De ahí la posibilidad señalada de la interrelación. Lo que indico es que, a pesar de esta apariencia, el hacer clásico no podrá dar, ya, nuevas ideas. Es un hacer que va a debatirse en las limitaciones que el nuevo modo de trabajo pone de manifiesto quedando convertido, en el fondo y como mucho, en mera disciplina académica.

Aun a costa de pecar de insistencia, desearía hacer ver los puntos anteriores —también señalados en el punto 2.3.1.— en el terreno geométrico, por el influjo que tuvo en España, y por ser uno de los modelos más claros de la coexistencia y de la aparente importancia de una disciplina que había perdido su marco de validez tras la ruptura de los entornos de 1875.

En dichos entornos la ruptura cantoriana surge en el contexto del Análisis y de la teoría formal de números; la axiomática y formalista, de la teoría de números, principalmente. Junto a ellas, con sus enfoques metodológicos propios, se mantiene otro hacer, el geométrico, a pesar de la crítica interna provocada por el Programa de Erlangen. Hacer abocado a la desaparición, ciertamente, hasta el punto de no mencionarse con el relieve correspondiente en las historias actuales de la matemática, a pesar de que su predominio fuera, al menos aparentemente, radical. Desaparición tras su absorción bien en mero sistema formal axiomático, bien en hacer algebraico —consecuencia o particularización del álgebra lineal—, bien en álgebra —geometría algebraica—. Pero era un hacer renacido tras los trabajos de Carnot, de Monge, que condujeron a una «edad de oro» de la geometría a lo largo del siglo XIX. Edad de oro representada, básicamente, por la geometría proyectiva sintética, sistematizada magistralmente por Staudt, y por la geometría calificada de algebraica.

Siguiendo ambas líneas, como ya he indicado, figuras en Italia como Cremona, en España como Torroja, trabajan en Geometría proyectiva ligándola con los trabajos sobre las series lineales, con idea central en la geometría birracional, al observar que los invariantes birracionales son invariantes proyectivos. De esta forma puede estudiarse, por ejemplo, el género de una curva teniendo en cuenta las singularidades de la misma, mediante transformaciones —en este caso cuadráticas—. Así, se da paso a un hacer mixto, calificado de «geometría algebraica», en el cual las escuelas italianas en sus dos grandes generaciones —Cremona, Segre, Bertini..., Castelnuovo, Enriques, Severi...— y la española —Torroja, Rey Pastor— trabajan intensamente. Es un hacer algebraico-geométrico que se mantiene en algún país como campo de investigación y enseñanza hasta bien entrado el siglo XX, pasados los años cincuenta. Así, las lecciones de geometría de Bertini, publicadas como libro al final de su vida en Pisa, en 1927, con el enfoque expositivo de «método mixto, ya sintético, ya analítico», en palabras del mismo Bertini, son traducidas al castellano en 1951 «respondiendo a necesidades sentidas por nosotros en nuestra docencia universitaria», según expresa el traductor Germán Ancochea, catedrático de la Universidad de Madrid. Y ello a pesar de que el hacer contenido en estas lecciones es, realmente, un hacer muerto, un hacer de tiempo ya pasado, a partir de la creación de Kronecker y Dedekind, y más aún tras la nueva ruptura de los entornos de 1939, con la creación de la «geometría algebraica abstracta», verdadero terreno de creación en aquellos y en los actuales momentos.

Creo que por su significación pueden reiterarse las palabras de Rey Pastor, creador de un ambiente renovador en la matemática española en el primer tercio de este siglo, señalando la falta de visión de quien intenta acceder a un trabajo y entra a ejercerlo en una fábrica en quiebra, en lugar de hacerlo en una en expansión: «A fines del siglo XIX damos un salto de gigante con la introducción de Staudt, más estudiado aquí que en Alemania; pero la Geometría se enderezó por el rumbo analítico, y tanto Cremona como Torroja y quienes lo seguíamos, quedamos una vez más fuera del cauce.» Son palabras de cierre de toda una vida dedicada al hacer matemático, pronunciadas en 1956 en contestación al discurso de ingreso en la Academia de Ciencias de su discípulo Ricardo San Juan. Fuera de cauce porque, como señala Bourbaki en sus *Elementos de Historia,* siguiendo la metáfora minera de Lagrange, «para el matemático profesional la mina (geométrica) está agotada, puesto que ya no hay problemas de estructura susceptibles de tener repercusiones sobre otras ramas de las matemáticas, y este capítulo de la teoría de los grupos y de los invariantes puede considerarse cerrado hasta nueva orden»; aunque también reconozca que esta decadencia inevitable de la geometría «pasó desapercibida durante mucho tiempo a los contemporáneos, y hasta 1900 esta disciplina siguió siendo, en apariencia, una rama importante de las matemáticas, como testimonia por ejemplo el lugar que ocupa en la Encyklopädie; y hasta estos últimos años ocupaba todavía este lugar en la enseñanza universitaria».

Incluso un matemático como Santaló, quizá uno de los mejores matemáticos españoles, creador en geometría diferencial y más aún en la geometría integral de óvalos, al publicar en 1966 una excelente introducción de *Geometría proyectiva,* enfocada en el marco propio, con total «modernidad», incluye un capítulo de geometría sintética en el que estudia el plano proyectivo real. Y ello con el previo reconocimiento de su caducidad, aunque también con el intento de dar explicación de la génesis, de las motivaciones de la «nueva» geometría. En sus palabras: «El progreso de la matemática, como de toda ciencia, es siempre a costa de la desaparición de capítulos caducos, sin perspectiva, para dar paso a otros nuevos, llenos de vida. La geometría proyectiva clásica, con toda su belleza, ha dado ya todo lo que podía dar de sí. (...) Mucho más importante que complicados teoremas sobre cónicas o intrincadas construcciones gráficas referentes a proyectividades entre formas de primera o segunda especie, por ejemplo, es acostumbrarse al lenguaje de la geometría de *n* dimensiones...» Lenguaje que, por supuesto, procede de una combinación del álgebra lineal con los términos geométricos que aportan, con el vocabulario, la intuición geométrica espacial por modo exclusivo. Lenguaje puramente algebraico y con métodos algebraicos y no ya mixtos al estilo de los geómetras algebraicos de las escuelas italianas y española.

Junto al hecho de disciplina cerrada, de tiempo pasado, aunque parezca un tiempo permanente, las palabras de Santaló se dirigen a otro punto y, más que sus palabras, su propia obra. Cabe consignar que la metodología de los matemáticos geómetra-algebraicos de método mixto era, por tal mezcla, ambigua. Y ello en razón de que al mezclar la intuición sensible geométrica con los razonamientos algebraicos —para precisar, «clásicos»— se provocaban fallas en el razonar lógico formal profundas. Y más que fallas, la ausencia de un carácter unitario interno, a la vez que una ausencia de unificación respecto a los restantes haceres, a pesar de que en esta disciplina parecería buscarse, propiciarse, tal unión. Crítica ésta que, por supuesto, sólo es factible desde otro marco, el originado en la ruptura de los entornos de 1939. Intento de rigor preconizado desde otro contexto, el que tiene por guía el método axiomático, con su ideología subyacente de formalismo suprimidor de cualquier tipo de intuición sensible; intento unificador, globalizador, desde el hacer puramente algebraico —siguiendo las precisiones, «moderno»— indicado tras el Programa de Erlangen de Klein al considerar que cada geometría no es más que el estudio de un determinado grupo de transformaciones, y rematado por matemáticos como Poincaré al estimar que el hacer geométrico estriba exclusivamente en el estudio algebraico-analítico que nada tiene que ver con la imagen sensible o con la geometría física, terrenos ambos más propios del físico o, en todo caso, del psicólogo genético; indicado con mayor radicalidad tras la ruptura de 1939.

Ya he indicado, ausencia de rigor desde el actual enfoque, no desde el interior de ese hacer, que precisamente por la mezcla entre intuición y álgebra, entre intuición y cálculo, lo hacía especialmente atractivo para muchos matemáticos. Es contraposición desde dos marcos ideológicos diferentes, que se manifiesta, por ejemplo, entre dos expresiones como la de Picard y la de Bourbaki. El primero, creador de un método de aproximaciones que hoy lleva su nombre para los teoremas de existencia en los terrenos del Análisis, así como de estudios de la teoría de superficies algebraicas situadas en el espacio proyectivo complejo y sin más singularidades que las ordinarias inaugurando además el método de recurrencia sobre la dimensión, llegaría a considerar que el rigor formal oscurece y seca los problemas que toca, apuntando que si Newton y Leibniz se hubieran detenido en el hecho riguroso de las funciones continuas sin derivada, por ejemplo, jamás hubieran creado el cálculo diferencial que posteriormente posibilitaría la creación de tales funciones o curvas. Por su lado, Bourbaki, desde otro marco, observando el hacer geométrico-algebraico en el que trabajó Picard, el hacer que coexistía con los surgidos en las rupturas cantoniana y axiomática, escribiría: «Es sabido que, a pesar de los esfuerzos de Dedekind, Weber y Kronecker, la relajación en la concepción de en qué consistía realmente una demostración correcta, ya apreciable en la escuela alemana de Geometría en los años 1870-1880, no haría otra cosa que agravarse cada vez más con los trabajos de los geómetras franceses, y sobre todo italianos, de las dos generaciones siguientes que, siguiendo la línea de los geómetras alemanes, y desarrollando sus métodos, abordan la teoría de las superficies algebraicas: 'escándalo' muchas veces denunciado (sobre todo a partir de 1920) por los algebristas, pero que no dejaban de justificar en cierta medida los brillantes éxitos obtenidos con estos métodos 'no rigurosos', en contraste con el hecho de que los sucesores ortodoxos de Dedekind no fueran capaces, hasta 1940, más o menos, de formular nociones algebraicas suficientemente flexibles y potentes para poder dar demostraciones de estos resultados.»

Naturalmente, y en todos los casos de ruptura y coexistencia, hay problemas que permanecen y se mantienen a través de los distintos haceres. Problemas clásicos ligados, básicamente, a dos terrenos: los aritméticos y el manejo de lo discreto, los geométricos y el manejo tanto del continuo como de la proximidad, la deformación, el dentro y fuera... El intento de resolverlos con unas u otras técnicas hará variar el objeto que representan dichos problemas. Intento de resolución que, en general, provocará la aparición de nuevos objetos y técnicas para abordarlos. Es lo que he pretendido poner de manifiesto en cada una de las rupturas que en las páginas anteriores he ido esquematizando.

3.2. QUE MATEMATICA DEBE EXPLICARSE

Si en cada ruptura se provocan distintos haceres, manifestados en distintas disciplinas, con tiempos unos de futuro y otros de pasado, coexistentes hasta que estos últimos se convierten en definitiva reliquia o en mero componente del plano ideológico, cabe la pregunta en torno a qué tipo de matemática deberá ser explicado. Interrogante con dos vertientes, además. Una se orientaría hacia el conocimiento teórico matemático; otra, hacia el conocimiento práctico, hacia el enfoque del trabajo matemático como herramienta para otras disciplinas científicas, para la física, ciencias sociales, biología... En un plano interrogador, claramente, perteneciente al didáctico, pero fundamental por lo que he indicado de quedarse fuera de cauce en el trabajo matemático según el tipo de respuestas dadas.

En este punto, y para no dejarlo como mero interrogante, creo que el ejemplo aducido del hacer geométrico en el punto anterior es claro. En algunos medios y países su práctica se mantenía como materia obligada de enseñanza, de investigación muchos años después de que su tiempo hubiera quedado abocado al pasado. Se enseñaba, se obligaba a realizar una práctica cerrada. Y he citado las palabras de Rey Pastor quien, siguiendo a Torroja, se lanza por la vía de la geometría proyectiva para terminar reconociendo que quedaba fuera de cauce. Pocos años después de sus declaraciones, en 1961, otro matemático español, Vidal Abascal, en *La nueva matemática,* reconocería el mismo hecho retomando la expresión «En España no hubo nunca matemática moderna.» En cada ocasión, académicamente, se ha tomado por un hacer futuro el que se encontraba abocado al pasado, faltos de la suficiente perspectiva para reconocer los distintos haceres matemáticos, obligados por la inercia académico-administrativa a mantener unos cuadros de enseñanza e investigación sin la necesaria flexibilidad para el trabajo «moderno», actual en cada ruptura. Y aunque en ocasiones se produzcan aparentes renovaciones en dichos cuadros, las mismas continúan con el suficiente retraso para no dar, en cada momento, el hacer que en el mismo sea el actual; o bien realizando una mezcla, un pretendido sincretismo explosivo y desconcertante en el que se interfieren todos los distintos haceres, sin las precisas delimitaciones, apoyadas en última instancia en unos planos ideológicos que se desconocen o se desprecian. Así, en el ambiente citado, cobra auge últimamente la calificada de «lógica matemática», aunque ni siquiera en los medios matemáticos, en los cuales dicho hacer continúa inexistente y, en los medios lógicos, tal lógica se limita al cálculo de predicados de primer orden, que constituye un hacer clausurado desde su propio origen. Por el contrario, materias surgidas en los entornos de 1939 como el lenguaje de categorías, álgebra homológica, geometría algebraica, teoría algebraica de números, topología diferencial, teoría de modelos..., aún siguen sin ser explicadas en muchas de las Universidades, fuera de cauce para la investigación, para el trabajo auténticamente matemático, aunque no para dar títulos de «profesionalidad» de matemático.

Aquí interviene otro punto. Si en cada marco se interpenetran los planos de práctica interna y de práctica externa o ideológica, la interrogante antes planteada podría reformularse en la conveniencia o no de exponer ambos planos. Hasta ahora, parecería claro, al matemático sólo le interesa la práctica interna; la ideológica, la externa, es cuestión del filósofo. Con palabras de algún pequeño matemático, «lo que interesa es topólogos, algebristas... y no filósofos; no se puede empezar la casa por el tejado». Pero esta ideología —pues no es otra cosa, y de las más acríticas— constituye uno de los errores en el que incurren los matemáticos mediocres, los que contribuyen únicamente a dar los mencionados títulos de «profesionalidad» y prebendas académicas. Creo que lo he puesto de relieve en cada una de las rupturas señaladas, en cada uno de los matemáticos que ha intervenido en esa ruptura, intervención tras la previa toma de conciencia de su propia ideología, de lo que debe entender él por matemática. Sólo desde la toma de conciencia de la práctica ideológica se hace una u otra matemática y se aprecia la modernidad o no de la misma. Desde el formalismo creativo y no descriptivo del matemático hasta el formalismo axiomatizador, desde el constructivismo recurrente hasta el realismo platónico, se han provocado unas u otras rupturas, se han creado unos u otros haceres en las mismas, se han desarrollado unas u otras disciplinas. Ideologías sustentadas por los matemáticos creadores, por supuesto. Y tales ideologías condicionan el objeto que en ellas se crean. Condicionante que implicaría no mezclar unas con otras disciplinas, unos con otros métodos, así como apreciar, para cada una, su posible estatuto y, con él, el conveniente manejo y dominio de las técnicas con las que trabajar en cada disciplina.

Es condicionante calificable de interno, sobre el cual actúa otro de una manera que cabe considerar definitiva: el contexto socioeconómico en el que vive y trabaja el matemático. Así, cabría mencionar las tres grandes escuelas que en el momento actual repercuten en el trabajo matemático. Por un lado, el ambiente positivista pragmático norteamericano, con su insistencia en que el hacer matemático es una herramienta para la tecnología y las ciencias, con obligadas llamadas a las ejemplificaciones científicas a las que servir; por otro, el empirismo «ingenuo» de la escuela rusa que pretende que el objeto matemático surge como proceso abstractivo de objetos materiales, reales, y no como transformación de objetos conceptuales, y de aquí su estatuto antiplatónico y la posibilidad de ser herramienta, por no constituir más que una forma de captar esa realidad material a la que servir; finalmente, la escuela francesa, ligada al formalismo constructivo, en la cual el matemático trabaja su propio objeto, despreocupado, en principio, de las conexiones con la tecnología, exigiendo una libertad en su modo de transformación de la naturaleza, cada vez más utópica de obtener.

A pesar de esta repercusión, condicionante externo del trabajador matemático y que rompe su libertad trabajadora al quedar obligado a realizar un trabajo «al servicio de» unos fines que le son ajenos, debo indicar que el condicionante interno, el plano ideológico sólo podría ser canalizado, englobado en el auténtico trabajo matemático mediante una historia desarrollada según el esquema aquí esbozado, que permitiera la exposición de los haceres convertidos en clásicos junto a sus motivaciones y, por supuesto, sus limitaciones que conducen a la provocación de nuevas rupturas con sus problemas y planteamientos «modernos», dando simultáneamente, y en cada ocasión, las líneas de lo que puede estimarse matemática moderna.

Interrogante, la de este punto, que permite situar, entre otras repercusiones, y con suficiente claridad, el lugar y papel que tiene una historia del trabajo matemático.

3.3. DE CONOCIMIENTO A IDEOLOGIA

Según el punto anterior, es claro que el hacer, el trabajo que habría que enseñar, con su objeto y métodos propios, es el surgido de cada ruptura con tiempo futuro. Ahora bien, la cuestión no es, evidentemente, tan simple; ha llevado al error a matemáticos como Rey Pastor, por ejemplo. Lo es cuando ha pasado algún tiempo desde los momentos de ruptura. Así, es claro que desde 1884 la teoría de conjuntos, aun no estando sistematizada en tratado o texto escolar, se mostraba como un hacer imprescindible no ya como conocimiento teórico, sino como herramienta o conocimiento práctico para los demás haceres, como la teoría de funciones de variable real, el análisis funcional, la teoría de la medida, la topología..., que precisamente cobraban nacimiento gracias a esa herramienta; o que el tratamiento axiomático era el instrumento imprescindible a partir de la inflexión de 1920 para cualquier hacer matemático. Igualmente es claro que ese vocabulario hoy día es algo imprescindible, unido al de la topología conjuntista, lenguaje categórico, estructuras algebraicas... Todos ellos no ya como haceres autónomos, sino como vocabulario que condiciona, por supuesto, el hacer matemático investigador posterior; vocabulario perteneciente al plano externo, ideológico, en que podrá desenvolverse el plano interno, el trabajo matemático.

La dificultad surge en aquellos momentos en que se provoca una ruptura, por la limitación a la que alcanzan las disciplinas surgidas en la anterior, limitaciones que, sin embargo, sólo aparecen como tales desde el hacer creado en dicha ruptura. A pesar de ello, también en esos momentos debe tenerse presente que la ruptura se provoca precisamente en aquellos haceres que se habían convertido en «modernos», por lo que sólo el que está inmerso en ellos podrá alcanzarlas; además, nunca faltarán matemáticos que las denuncien, que indiquen el agotamiento de las minas, de los filones en los que se trabaja. He mencionado los casos de Lagrange, Cantor, Weyl y, actualmente, los propios bourbakistas, como Grothendieck...

Sin embargo, debo insistir en el hecho de que ninguna ruptura suprime de modo radical el pasado, los haceres de los marcos previos y diferentes en que la misma se efectúa. Es una de las cuestiones que las tesis aquí admitidas plantean con mayor nitidez. En algún caso hace que el trabajo válido en otro marco quede fuera de cauce —para seguir con la imagen de Rey Pastor, aunque la misma parezca indicar un continuismo evolutivo contrario al aquí sostenido—, así con cualquier disciplina geométrica en el marco actual. Pero ello no significa que un posible matemático no tenga que conocerla. Conocimiento que hará, posiblemente, que dicho matemático se mantenga en contexto marginado al de investigación actual. El problema es el de si el conocimiento y las técnicas del nuevo modo de trabajo hacen que el conocimiento de ese hacer clásico le sea imprescindible. No es tan simple como en el caso de la alquimia respecto a la química, por ejemplo. Sin mayor profundización cabría responder que dicho conocimiento, en algún caso, debe ser obtenido, pero ya a nivel elemental, de iniciación, al igual que en la enseñanza primaria se enseña a leer, escribir y hacer cuentas, sin que por ello tal conocimiento se considere integrado en la retórica, la lingüística, la matemática... Un posible cuadro de haceres matemáticos, esquemático, indicaría que, en cada ruptura, alguno de los conocimientos que convierte en clásicos, deben incorporarse a una enseñanza elemental, no ya a la propia del matemático profesional. Así, el álgebra como resolución de ecuaciones y estudio de invariantes, el cálculo como formalización de límites y las técnicas formales de derivación e integración, el estudio sintético de algunas propiedades geométricas como las de cónicas..., todos ellos haceres surgidos tras la ruptura de 1827; igualmente, el vocabulario conjuntista, nociones topológicas para un tratamiento elemental de la teoría de funciones de variable real, nociones del vocabulario categórico para la exposición y dominio de algunas proposiciones universales y algebraicas, nociones de álgebra lineal, pueden estimarse como conocimiento de liceo. Y, fundamentalmente, la incorporación de alguna de las técnicas de trabajo matemático auténtico: método de aproximaciones, inducción completa, subestructuras, estructura cociente, morfismos entre estructuras, diferencia entre razonamientos constructivo y existencial o global... Temas y técnicas innovadoras en el momento de su creación, convertidos en conocimiento de base, en elementos del contexto ideológico en el que ha de moverse quien pretenda dedicarse al trabajo matemático.

Pudiera plantearse la objeción de que parece tenerse en cuenta, únicamente, el hacer intrínseco matemático futuro y no el hecho de que, en cada contexto, dicho hacer es herramienta para otros haceres. No hay nada de ello. Precisamente porque en cada contexto el hacer matemático sirve como herramienta hay que explicar el hacer de la última ruptura por ser el abocado al futuro y, como tal, el que servirá auténticamente para el último hacer originado en dichas disciplinas. No entro en detalles de las interrelaciones matemática-ciencias, pero basta observar que sólo el hacer de los entornos de 1939, hacer de estructuras, es el que ha podido utilizarse en materias como la lingüística, la antropología..., y no digamos en física o en las técnicas de informática.

Nueva incidencia en el plano socio-didáctico, las consideraciones de matematización de lo real, tan en boga en ciertos medios, pretendiendo partir de la situación concreta para alcanzar el planteamiento abstracto matemático, cuando es el proceso inverso, precisamente, el que tiene lugar de modo auténtico. Es evidente que esa «situación concreta» sólo es «concreta» desde el propio conocimiento de lo «abstracto» o, de lo contrario, se confunde con el verdadero estatuto del conocimiento matemático —y de cualquier otra disciplina científica—. Situación concreta que, de hecho, nada tiene que ver con el trabajo matemático salvo convertir a éste, según he dicho antes, en un hacer de gomas de colores.

3.4. EL TERMINO «MATEMATICA»

La admisión de las tesis de esta obra, de las repercusiones que las mismas entrañan, plantea igualmente una cuestión, no ciertamente fundamental. Cada trabajo, cada hacer, aunque posea un objeto propio y unas técnicas de manejo particulares, distintas en cada marco, quedan englobadas bajo un mismo término: matemática. Y un trabajador cuyo objeto es la estructura abstracta no parece tener nada en común con quien trabaja en geometría proyectiva sintética o quien realiza cálculos de diferenciación e integración al estilo euleriano. Son disciplinas radicalmente distintas. Y, sin embargo, continúan bajo el mismo rótulo.

En cada marco, en cada contexto, el significado del término «matemática» ha ido variando, como ha variado un término paralelo, el de «física». Así, mera ejemplificación, aunque tal variación no la hayan visto quienes hablan en torno a la matemática, puede citarse a Galileo, quien enfocaba como disciplinas matemáticas no sólo la geometría al estilo euclídeo, sino la música y otras materias hoy radicalmente desgajadas del contenido del término. Matemática venía a ser todo lo regulable por el número y la figura, creaciones del hombre; y a imitación de tales creaciones del matemático, con validez eterna, el artista y el «científico» han de crear su propio objeto de trabajo, aunque ya la validez de los mismos pierda la objetividad propia del objeto matemático. No varía, en el fondo, este sentido en pensadores como Kant, para quien la matemática se resuelve en geometría y en aritmética elemental, siendo esta última la que posibilita el juicio sintético a priori, por el enfoque constructivo de las operaciones aritméticas. Parece claro que el cálculo diferencial e integral, auténticas disciplinas «modernas» en la época, le pasaron desapercibidas en toda la amplitud de los términos, aunque se deba reconocer su acierto de que la geometría euclídea podía estimarse como un hacer cerrado. Desfase que puede observarse en Wittgenstein, por ejemplo, que se autolimita a la aritmética como toda matemática, pareciendo ignorar que, de hecho, el objeto con el cual trabajaba el matemático se centraba en el sistema formal. Posible explicación de su desconcierto respecto a las cuestiones de consistencia y completitud. Y si puede indicarse que su objetivo se centraba en dar un fundamento al hacer matemático, entonces hay que indicar, simultáneamente, que fundamentar un hacer exige el previo conocimiento del objeto de dicho trabajo; de lo contrario, se fundamenta como mucho algo ya pasado y que, por ser pasado, no requiere precisamente de fundamento alguno.

En este sentido cabría preguntar por la existencia de algún rasgo común a las distintas disciplinas que se han ido creando y que, en cada ruptura, y para diferenciar las surgidas en la misma de las anteriores, se suelen calificar de «modernas». Ciertamente no puede admitirse que el rasgo común sea el de constituir haceres deductivos o hipotético-deductivos. Creo que, de modo implícito pero suficientemente claro, he venido indicando que el matemático no trabaja, en general, de modo deductivo ni que las disciplinas surjan de esta manera unas de otras y que precisamente por confundir la exposición, la forma que adopta el objeto, el producto del trabajo con el trabajo mismo, se produce esta confusión. Aunque la misma indique, por otro lado, que ese rasgo o rasgos comunes, si existen, van a pertenecer no al plano interno matemático —en el cual tanto el objeto como el método varían en cada hacer— sino al ideológico que lo posibilita.

Por supuesto, y en todos los casos, el hacer matemático constituye una forma de trabajo en la que se produce un objeto conceptual, un conocimiento. Pero no un mero conocimiento descriptivo de la naturaleza o de un pretendido mundo eidético. Como tal trabajo se crea en él un objeto conceptual, plasmado en una forma lingüística a partir de otro elemento conceptual previamente dado. Dicho objeto se convierte, de elemento teórico innovador, en conocimiento común, incorporado a un cuadro ideológico posterior. Cuadro que, a su vez, es la base para elaboraciones ulteriores de otros objetos conceptuales, del nuevo objeto originado o creado en la ruptura contra el cuadro anterior, y en la cual se transforma tal objeto. La inversión de Abel, Galois, Peacock, Cauchy..., no es meramente asunto del interior de la práctica teórica matemática o de descripción de fenómeno «natural» alguno. Es una reacción elevada contra una ideología o cuadro de representaciones no criticadas en las cuales estaba inmerso el hacer contra el que se produce la revolución. Jacobi protestará afirmando el privilegio de la razón matemática al igual que los demás buscarán el hallar la razón. Con lo cual provocan tanto una reacción interna —cambio de objeto del hacer matemático y, consiguientemente, cambio de método para manejarlo— como una reacción externa, la independencia respecto a las ciencias de la naturaleza. Ahora bien, el nuevo objeto y las técnicas que lo entornan pasan a admitirse como elementos naturales del trabajo matemático. Y sólo su manejo, el hábito al mismo llega, en momento ulterior, a su propia crítica. Así el concepto de límite acabará mostrando sus defectos respecto a los irracionales, pero ya desde otro marco, posibilitado por haberse convertido en cuadro de representación no criticada. Se pretendía, por ejemplo, en dicho concepto, suprimir las llamadas a cualquier tipo de representación sensible. Pero precisamente dicha representación era consustancial con el método de límites primitivo. Las demostraciones se apoyaban en la figura geométrica de tal manera que, sin la misma, pocas «demostraciones» lo serían y ello a pesar de los esfuerzos indicados de Abel, de Cauchy, de quienes habían provocado la ruptura, en nombre de «hallar la razón» y del rigor demostrativo. Admitir, entonces, un formalismo creador del matemático suponía pertenecer a un cuadro ideológico distinto en el cual dicha representación desapareciera. Y ello obligaba a crear y manejar nuevos objetos que, en principio, permitieran tal desaparición. Es el conjunto o clase o agregado de infinitos elementos dados en acto, con las nociones topológicas correspondientes las que van a permitirla. En uno como en otro caso, el rasgo común podría encontrarse, en los distintos haceres, en constituir formas de trabajo que, lo intento destacar, exige el dato previo conceptual-ideológico sobre el cual trabajar; dato previo para su transformación en otro marco conceptual-ideológico igualmente.

Desde este plano de ser un oficio en el que se crea, en cada hacer, un conocimiento objetivo que se transformará en cuadro ideológico que, a su vez, implicará la creación de nuevo conocimiento por transformación del objeto, debe destacarse un rasgo que no ha sido suficientemente estudiado —salvo en el formalismo inscripcionista— y es el de la dependencia de cualquiera de estos tipos de conocimiento objetivo respecto a un objeto concreto, material: la marca o signo gráfico, y la manipulación de la misma con deseo de trascenderla, con una finalidad de convertir esa manipulación en algo objetivable de valor universal, independizada como manipulación de la marca que la posibilita. Trascendencia, igualmente, respecto a cualquier referencial aparente con el cual se dota a las marcas en cada hacer, en cada marco de validez del mismo. Y ello porque las conexiones que se pretenden de valor universal, las que hacen del manipular matemático algo necesario, un conocimiento objetivo independizado aparentemente como producto conceptual de aquél que lo ha creado, incluso planteando problemas en sí por la objetividad de la que goza, sólo puede existir en lo particular y lo concreto. Hecho que se pone de manifiesto en el tipo clásico de demostración, la euclídea, en que la proposición universal ha de especificarse en una particular con su concreción intuitiva material —la marca, la figura— o en la demostración «moderna» con la elección del elemento cualquiera al manejar clases, con el selector hilbertiano; que se pone de manifiesto en la ineludible necesidad de la figura, del diagrama, en cualquier razonar matemático, incluso en los diagramas en flecha del vocabulario categórico como imprescindible apoyatura del trabajo y del conocimiento conceptual.

Ahora bien, por el deseo de trascender, de objetivar su marca material, concreta, el signo parece tener ligado, consustancial, una denotación que le es ajena en el auténtico hacer matemático, o al menos en la práctica interna del mismo. En ella, el signo carece de significante y de significado como referencial. Aunque este hecho sólo aparezca claro tras las rupturas epistemológicas de los entornos de 1875, principalmente la axiomática. Así, el signo, la marca, parece mostrarse con denotación, con referencial en el hacer griego, pero, en nuestra perspectiva actual, sólo aparente. El número-guijarro o cálculo, el número-figura geométrica, implican una dualidad de signo-reminiscencia de la Idea. Quedarse en la mera manipulación del signo-guijarro, del signo-figura en el plano geométrico indica que quien se queda no es geómetra, no es matemático, sino mero logístico, mero calculador, agrimensor, militar. Y, sin embargo, para alcanzar la propia Idea hay que manipular, hay que transformar las figuras —ese círculo que se traza y borra según la Carta VII de Platón— para alcanzar el mundo eidético al cual reflejan y que, desde Galileo, en lugar de utilizar el término «reflejar», se admitirá el empleo de «crear». Inflexión profunda del hacer matemático renacentista que indica claramente que tal referencial con el que se dota a los signos con los cuales se manipula va a depender del plano ideológico, del contexto en el cual se realiza dicha manipulación. Es proceso semejante al hacer hindú, donde se manipula no sólo con el guijarro, sino con el signo escrito, con la «variable», a la vez que la figura vale por todo un razonamiento completo; basta la figura, con todas las líneas auxiliares ya trazadas y un ¡Mira!, por todo un proceso demostrativo *more geometrico*. Se podría continuar...

En todo caso, lo que siempre aparece es ese signo como variable, pero material, como sustrato que permite la elaboración de las creaciones posteriores dotadoras de referencial o contenido como contrapuesta a la forma hueca, como si ésta y aquélla pudieran existir en sí y no dependieran del propio razonar formal, de la creación de dicha marca que los hace posibles. Y es sobre sus figuraciones, materiales, con su manipulación, sobre las que se descubren analogías, relaciones, posibles generalizaciones y, por supuesto, interpretaciones de carácter semántico. Interpretaciones no sólo para haceres distintos al matemático —ejemplificadas en el cálculo matricial para la mecánica cuántica—, sino en las distintas disciplinas de este hacer. Así, el íntimo enlace que unos problemas aritméticos —el cálculo de los números que satisfacen una ecuación como $x^n = y^n + z^n$— puede presentar con la geometría elemental —con $n = 2$, aparecen los que satisfacen una de las relaciones fundamentales del triángulo rectángulo—, con la teoría de funciones elípticas —que suponen el manejo de las funciones de variable compleja y cuya generalización en funciones modulares va a hacer uso de la geometría hiperbólica— y, de aquí, con la geometría algebraica clásica, a la vez que con el álgebra «moderna» al ser la base de la creación de los ideales...

Sin embargo, y precisamente por el deseo de trascendencia, de objetividad para el producto obtenido, el contexto matemático parece mostrarse como uno de los más adecuados para una ideología de enfoque cuasi platónico, con dos fases: Utilizar las figuras como marcas en el interior de un sistema axiomático, que es quien regula su uso, quien indica lo que hay que manipular en las transformaciones sígnicas; en fase posterior, se pretende dotar de referencial a esas marcas y convertir las transformaciones en deducciones lingüísticas. Aceptación cuasiplatónica que, en principio, se ha efectuado en dos formas:

1. Aceptar la existencia de unas Formas puras de tal manera que cada término matemático denote una Forma. Es aceptar el mito de la caverna platónico con su isomorfismo proyectivo y la teoría de modelos, en este caso un universo eidético que se interpreta, a partir de las aplicaciones homeomorfas, en otros sistemas «reales», únicos captables por el entendimiento humano y tales que, por otro lado, la aplicación homeomorfa deforma el universo original dando una representación suya empobrecida.
2. Aceptar que el término matemático «es», a la vez, vehículo cognoscitivo en el sentido de que, por ejemplo, una representación gráfica como la curva del movimiento de un proyectil no es la imagen de ese movimiento sino su denotación pura. Con ello, la matemática permite una aprehensión de la realidad abstracta, pero exacta, de ahí su capacidad instrumentalizadora a la vez que cognoscitiva. De ahí la idea de que la naturaleza deba estar escrita en lenguaje matemático, que es el único que auténticamente permite captarla y, correspondientemente, transformarla. El término matemático se enfoca, así, no como manipulación de marcas sin referencial que pueda ser dotada de varios referenciales para cada interpretación que pueda hacerse, sino que es ella misma la propia referencia.

Para un matemático «puro», el primer enfoque es el más aproximado a su hacer propio, siempre que se rechace la existencia de ese mundo eidético como independiente y al cual tenga que acceder por vías no muy conocidas; es decir, siempre que se admita que es el matemático quien crea mundos conceptuales, en creación inacabada, permanentemente renovada y renovable por modificación del objeto y, con ello, del conocimiento objetivo que permitirá una posterior transformación del mismo y de las condiciones de su trabajo.

El segundo enfoque se considera propio de la «matemática aplicada», de las ciencias de la naturaleza. Pero cabe observar que, realmente, es el que ha predominado en la superficie de varios haceres matemáticos. Por un lado, en el marco griego, supeditado a la Forma pura como hacer matemático, a la agrimensura o al comercio como hacer calculatorio o logístico; por otro, desde la «ciencia nueva» hasta bien entrado el siglo XIX, en algunos haceres como el cálculo que constituía la propia y auténtica descripción de la naturaleza. Sólo desde la distinción de los dos planos, el del hacer manipulador sígnico no fáctico o manipulación formal sin referencial como propio del hacer matemático y el del cognoscitivo científico como ajeno al mismo se logra zanjar, de modo calificable de nítido, este enfoque. Es claro que esta distinción supone la previa aceptación de la ideología que he venido calificando de formalista como opuesta a la que admite el conocimiento como abstracción directa de una realidad, como opuesta a un empirismo sensualista ingenuo. Desde ella cabe observar que el hacer geométrico, en cada una de las rupturas, venía interpretándose desde el segundo enfoque antes indicado, por modo exclusivo, pero que tal interpretación no era consustancial a dicho hacer. En el fondo, no era esa interpretación más que una creencia acrítica de quienes trabajaban en un oficio determinado y mucho más de quienes no trabajando en ese oficio especulaban acerca del mismo, con lo que se llegaba a consideraciones erróneas acerca de la «esencia» del trabajo matemático, como en Hegel, despreciando al matematismo en su versión de conocimiento empírico, inferior al saber conceptuante dialéctico, que es el «verdaderamente científico».

En las creencias que arropaban los enfoques mencionados se hacía un uso distinto, o al menos se decía que se hacía tal uso, aunque en el momento del trabajo verdaderamente matemático lo que básicamente imperara fuera la manipulación sígnica material y no los referenciales con que se cubrían dichas marcas. En este sentido podría llegar a admitirse que el hacer matemático auténtico ha sufrido variaciones relativas, constituyendo la manipulación material el sustrato fundamental en el cual y con el cual se han ido realizando las diversas rupturas, creando las diversas disciplinas de la matemática.

En cualquier caso, es sólo desde este punto de vista manipulador desde el cual podría encontrarse una unidad en los distintos haceres que cubre el término «matemática», unidad que desaparece si se atiende a las distintas formas cognoscitivas —bien de las esencias, bien de la naturaleza— con que se ha recubierto a lo largo de la historia temporal dicho hacer manipulador y que meramente reflejan que el objeto de cada hacer es variable, así como los métodos que permiten su uso.

Hacer manipulador objetivado en un lenguaje y que, por esta objetivación, puede convertirse en herramienta cognoscitiva a través de una nueva forma interpretativa: el modelo matemático. Modelo euclídeo el geométrico de un espacio físico homogéneo; modelo calculístico el Cálculo, de ese mismo espacio, pero para entornos de un fenómeno determinado; modelo estructural para la comprehensión conceptual y, con ello, práctica de espacios como el económico, el biológico, el lingüístico, el político, antropológico... Término de «modelo» que exigiría, por supuesto, muy amplias precisiones —fuera de lugar aquí—, dado que, con el de «estructura», cubre campos semánticos que pueden estar, incluso, en conflicto entre sí.

APENDICE

LA RUPTURA CANTORIANA

1. EL HECHO

En carta de 29 de noviembre de 1873 Jorge Cantor plantea a Dedekind una cuestión teórica aparentemente secundaria:

> Permitid que os someta una cuestión que tiene para mí un cierto interés teórico, pero a la cual no puedo responder...
>
> Tomemos el conjunto *(Inbegriff)* de todos los individuos enteros positivos n, y lo representamos por (n); después consideremos el conjunto de todas las magnitudes numéricas reales positivas x, y lo representamos por (x); la cuestión es simplemente saber si (n) puede ser puesto en correspondencia con (x) de tal manera que a cada individuo de uno de los conjuntos corresponda un individuo y uno solo del otro. A primera vista, se dice que ello no es posible, porque (n) está compuesto de partes discretas mientras que (x) forma un continuo; pero esta objeción es nada, y por mucho que me inclino a pensar que no hay correspondencia unívoca entre (x) y (n), no puedo, sin embargo, encontrar la razón, y es lo que me preocupa —quizá sea muy simple.
>
> ¿No se estaría también tentado en concluir de entrada que (n) no puede ser puesto en correspondencia unívoca con el conjunto $\left(\frac{p}{q}\right)$ de todos los números racionales $\frac{p}{q}$? y, sin embargo, no es difícil demostrar que (n) puede ser puesto en correspondencia unívoca no sólo con este conjunto, sino con el más general $(a_{n_1, n_2, \ldots, n_k})$, siendo $n_1, n_2 \ldots, n_k$ los índices enteros positivos ilimitados en número cualquiera k.

La cuestión teórica a la que Cantor no sabe responder encierra un cúmulo de innovaciones. Dedekind no las verá de momento —quizá tampoco el mismo Cantor— y responderá con un «no merece la pena que se consagre mucho esfuerzo a ella». Las interrogantes planteadas son, fundamentalmente, dos: *a*) Demostrar que los racionales y todos aquellos conjuntos que pueden ordenarse en la forma indicada por Cantor pueden ponerse en correspondencia biyectiva con los naturales; *b*) Demostrar, afirmativa o negativamente, que es posible una biyección entre los irracionales y los naturales.

A la cuestión *a*) Dedekind responde ampliamente. Más allá, incluso, que Cantor, da la demostración de la biyección del conjunto de los números algebraicos con el conjunto de los naturales. Es demostración y ampliación del terreno de los que Dedekind apuntará en su diario, «este teorema y su demostración han sido reproducidos casi literalmente, comprendido el empleo del término técnico 'altura', en el artículo de Cantor aparecido en el *Journal de Crelle,* tomo 77 (1874), pero con una diferencia, mantenida a pesar de mi consejo, únicamente el conjunto de todos los números algebraicos *reales* se toma en consideración».

Es a la cuestión *b*) —cuestión clave y motor de la *a*)— a la que, según Dedekind, y Cantor parece aceptar a regañadientes en carta de 2 de diciembre, no merece dedicar gran esfuerzo. Para justificar su interés, y tras la demostración recibida de Dedekind respecto a los números algebraicos, Cantor señala que si la respuesta fuera negativa, se dispondría de una nueva demostración del teorema de Liouville que afirmaba la existencia de números trascendentes y a la cual Hermite (1872) acababa de dar la respuesta afirmativa demostrando que *e* era un número trascendente.

El día 7 de diciembre, y llevado por ese interés teórico sin consecuencias prácticas de sólo «encontrar la razón» —al estilo de Abel y de todos los matemáticos que intervinieron en la inversión y ruptura de 1827—, Cantor da la primera demostración de la no numerabilidad del continuo; el 9 envía una simplificación de esa demostración. El 25 de diciembre informa a Dedekind que ha comunicado a Weiertrass, su maestro de Berlín, los resultados obtenidos y que, bajo su incitación, prepara un ensayo para cuya redacción «vuestras notas y vuestro modo de expresión me han sido, como veréis, muy útiles». Es el artículo al que hace referencia la nota citada del diario de Dedekind.

Se observa que Cantor, de la manera más normal, hace uso del conjunto de los naturales, del conjunto de los racionales, del conjunto de los irracionales. Conjunto como totalidad de objetos que satisfacen una propiedad, ya que *Inbegriff,* derivado de *Begriff* o concepto, indica que lo que se está considerando es un agregado o sistema de objetos que caen bajo un concepto. En el manejo de conjuntos como totalidades dadas de una vez para siempre, la intuición no es guía segura: lo discreto y lo continuo no parecen biyectivos, pero tampoco los racionales con los naturales, que constituyen una de sus partes. Aquí es donde Cantor va más allá de lo querido por Proclo, por Galileo, por Leibniz... Todos ellos observaron la posibilidad de coordinar los naturales con una parte suya o con una serie de racionales. Pero de este reconocimiento no pasaron al auténtico conocimiento, dejando a un lado lo reconocido. Reconocimiento que Cantor, sin más, admite con la mayor naturalidad —al igual que su corresponsal Dedekind— como punto conceptual de partida. Hipótesis que conlleva el manejo de «objetos» calificables como no-intuitivos, de propiedades que chocarán al «sentido común» generalmente admitido.

Hipótesis del infinito actual que Cantor ni siquiera discute, clave de la ruptura en el hacer matemático cantoriano. Admisión de la que van a derivar, meras consecuencias, resultados innovadores. Así, la existencia de, al menos, dos infinitos distintos, todavía no bautizados en este período: numerable y continuo. Así, el método de demostración existencial no constructivo, por vía indirecta, como la existencia de los números trascendentes, sin dar ni poder dar uno solo de tales números, frente a la demostración directa, constructiva, realizada por Hermite.

En la dinámica de todo proceso creador, el paso conceptual siguiente se centrará en generalizar los hechos anteriores: pasar a considerar conjuntos, agregados y multiplicidades cuyos individuos no tengan por qué ser magnitudes numéricas o geométricas por modo exclusivo; utilizar métodos globales mediante el instrumento de la «aplicación», único que permitirá relacionar y comparar entre sí los distintos agregados. Pero ello, y de modo permanente, ligado a los objetos y problemas de los cuales se ocupaba el hacer matemático coetáneo: Cantor continúa trabajando con los términos e ideas de su entorno, en lucha con los mismos, pero ligado a ellos, fundamentalmente en el terreno del Análisis.

Así, en nueva carta a Dedekind, 29 de junio de 1877, reconoce: «Lo que os he comunicado muy recientemente es para mí tan inesperado, tan nuevo, que no podré alcanzar, por decirlo así, una relativa tranquilidad de espíritu hasta que no haya recibido, muy querido amigo, vuestro juicio sobre su exactitud. En tanto no lo hayáis aprobado, no puedo más que decir: *Je le vois, mais je ne le crois pas.*» En concreto, Cantor hace referencia a su teorema —cuya negativa había intentado demostrar, sin éxito, desde 1874— en el que establece una correspondencia entre una multiplicidad continua de n dimensiones y el continuo lineal, en otros términos, entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$. Correspondencia biyectiva, aunque no continua, como precisará Dedekind, y en cuya demostración en el plano —de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$— hará uso de la imagen geométrica, imagen en la cual «ve» lo que no cree.

Esto último es punto a destacar. Cantor maneja las multiplicidades apoyándose en la imagen sensible —como al utilizar de modo implícito la buena ordenación y el axioma de elección—, lo cual le conduce, ciertamente, a la creación, pero, al mismo tiempo, encuentra una contrapartida, la ausencia de rigor formal. Ausencia de rigor mitigada por Dedekind —según todas las versiones—, quien, con mente más algebraica, frena, matiza, aconseja, incluso da las demostraciones precisas que Cantor aceptará y que, en muchos casos, han quedado como modelos del mismo Cantor. Así, cuando éste, en pleno entusiasmo creador, tras el último teorema mencionado, y después de una serie de referencias al pensamiento matemático, filosófico, teológico, concluye su carta de 25 de junio de 1877 con: «*Por tanto, me parece* que todas las deducciones filosóficas o matemáticas que utilizan esta hipótesis errónea son inadmisibles», Dedekind ha de puntualizar, indicando que dicha hipótesis no es casualmente errónea, sino que, por el contrario, constituye uno de los invariantes esenciales de la multiplicidad de dimensión n, siempre que la correspondencia sea continua. Suprimida la condición de continuidad, el teorema de Cantor es válido, pero Dedekind indica e insiste que lo es para un cierto tipo de aplicación, no para toda biyección. Ruega que Cantor matice sus expresiones, sus ataques a los «matemáticos de Berlín», antes de la publicación.

Igualmente, con fecha 19 de enero de 1879, Dedekind aconsejará: «Para una publicación, consideraría deseable que sean definidos con exactitud los nombres o expresiones técnicos de la teoría de multiplicidades [a este propósito, daría decidida preferencia al término «dominio» *(Gebiet)*, igualmente empleado por Riemann, como más corto que el desagradable de «multiplicidad» *(Mannigfaltigkeit)]*; sería muy meritorio desarrollar *ab ovo* toda esta «teoría de dominios», sin hacer llamada a la intuición geométrica, y entonces sería necesario definir de forma nítida y precisa, por ejemplo, el concepto de línea que une de modo continuo el punto a al punto b en el interior del dominio G.» Consejo de sistematización, de elaboración de un nuevo campo del hacer matemático —limitado en la carta, aparentemente, a los terrenos de lo que cabría calificar de «topología conjuntista»— pero que lleva implícito un nuevo campo, la «teoría de dominios» o «teoría de multiplicidades» —con problemas como los de la dimensión de una multiplicidad— a partir de definiciones que impidan las equivocidades y las polémicas a las cuales Cantor se veía arrastrado, fundamentalmente con Kronecker. Cantor seguirá el consejo de sistematización para el primer aspecto en sus cinco memorias publicadas entre 1879 y 1884, *Sobre los agregados lineales de infinitos puntos* —aunque mantiene la representación gráfica—, y posteriormente, y ya para el aspecto totalmente general de los agregados, en sus memorias fundamentales de 1895 y 1897, que constituyen el primer tratado sistemático, la primera Iniciación a la Teoría intuitiva de conjuntos.

No voy a seguir aquí la evolución de la obra cantoriana, con su drama o tragedia personal incorporada, indisolublemente además. Deseo destacar, por modo exclusivo, el hecho de una ruptura teórica con un hacer matemático hasta entonces existente. Ruptura mediante una cuestión que aparentemente «carece de importancia» y no merece la pena excesivo esfuerzo y dedicación. Ruptura que cabe esbozar señalando los puntos de trascendencia epistemológica que pueden ser tomados en primer plano. Esquematizados, son:

1. Admitir la existencia de multiplicidades y agregados, sistemas, dominios o conjuntos como totalidades con infinitos elementos no ya en posibilidad, sino en acto. Conjuntos caracterizados mediante un concepto o propiedad y que pueden, a su vez, ser considerados como nuevos objetos para comparación y operaciones.
2. Admitir la posibilidad de razonamientos globales sobre tales multitiplicidades, razonamientos no constructivos sino existenciales. Instrumento central, la aplicación biyectiva, condicionada por la admisión de la totalidad y que condiciona, a su vez, las interpretaciones que puedan obtenerse en este nuevo hacer globalizador.

Ambos puntos conllevan la clave de la ruptura epistemológica porque permiten realizar la abstracción total en cuanto a la «naturaleza» de los objetos que el matemático maneja, obligados por modo exclusivo a cumplir la propiedad caracterizadora del agregado o conjunto del cual sean miembros. Realizar preguntas acerca de qué sea el número o la magnitud, en búsqueda de respuestas esenciales o, simplemente descriptivas, va a carecer de sentido a menos que se remita quien conteste a un mundo de esencias conceptuales como única posibilidad de mantenerse en el plano sustancializador de quien interroga. Creencia que sostendrá Cantor a partir de 1883, con la tremenda inconsistencia de no poder, a pesar de esta búsqueda de firmeza en las Formas platónicas, caracterizar de modo unívoco y preciso, sin dar paso a contradicciones, lo que sea un conjunto o una multiplicidad, a pesar de su intento superador de clasificar los agregados en consistentes e inconsistentes —conjuntos y clases—. Caracterización ni siquiera descriptiva, no ya de respuesta esencial. Así, en carta a Lasswitz de 1884, establecerá la definición de uno de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos: «Entiendo por *potencia* o número cardinal de un conjunto *M* el concepto universal o genérico que se obtiene haciendo abstracción para el conjunto tanto de la constitución de sus elementos como de todas las relaciones que esos elementos poseen entre sí o con otras cosas, en particular del orden que exista entre ellas, y no considero más que lo que es común a todos los conjuntos *equivalentes* a *M*». Caracterización por un lado de matiz psicologista, por otro mezclada con la construcción matemática del conjunto cociente originado mediante la relación de equivalencia que exige la previa existencia del «conjunto de todos los conjuntos», noción antinómica por excelencia.

Junto a este salto se encuentra, igualmente, la definitiva ruptura con la ciencia natural y con las tendencias empiristas que todavía algunos matemáticos sostenían. Las totalidades de infinitos elementos actualmente dados no son si niquiera imaginables para el hombre, cuanto menos para considerar que el hacer matemático, en su variada problemática, tenga por origen la experiencia inmediata y sus conceptos sean meras «abstracciones» de la misma; aunque ello no equivalga a que en ese razonar el matemático no haga uso de imágenes, de figuras concretas y signos materiales.

2. LAS DEMOSTRACIONES

Si he señalado dos puntos como elementos clave de la ruptura cantoriana, la importancia básica de dicha ruptura se va a centrar en la *creencia* que esta unión posibilita. Como síntesis de ambos aspectos «conjunto-aplicación», el modelo demostrativo sufre un cambio: se convierte en existencial, no constructivo. Método que provocará, simultáneamente, un cambio en el uso, en el significado, de los operadores universal y existencial. Cambio que obligará a una precisión de matices, a un estudio especial de dichos operadores y de su contraposición, a partir de la ruptura, con el uso habitual matemático, uso de especificación o particularización. Por estas consecuencias parece conveniente esbozar las líneas de alguna de las demostraciones cantorianas y su contraposición a las clásicas, en mero esbozo, sin los detalles técnicos que harían rigurosa la exposición de dichas demostraciones.

En 1874 la contraposición de dos demostraciones llama la atención, aunque ambas quedan ligadas a un tema localizado, dado por el objeto concreto al que se remiten.

1. En primer lugar aparece la demostración de que los números algebraicos son numerables, dada por Dedekind y aceptada por Cantor. Es clásica: Se asigna a cada ecuación su altura h, que es natural. A cada altura sólo se le puede asociar un número finito de ecuaciones algebraicas y, por consiguiente, un número finito de números algebraicos $f(h)$. En particular, $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, ... Si $h=1$, entonces se clasifican los números algebraicos correspondientes de 1 a n_1; a continuación, los correspondientes a $f(2)$, que ocuparán los lugares de n_1+1 a n_2; *y así sucesivamente.* De esta forma, a cada número algebraico se le asocia un número natural y sólo uno. Como la aplicación obtenida es biyectiva, el conjunto de los naturales y el de los números algebraicos poseen la misma potencia, son numerables.

La demostración esbozada procede por iteración y el así sucesivamente indica no sólo tal iteración sino la posibilidad inductiva con su formalización mediante la inducción completa.

2. Junto a la anterior, la demostración cantoriana de que los reales no pueden ponerse en correspondencia biyectiva con los naturales hace uso de dos propiedades admitidas implícitamente. Por un lado, de un principio puesto de relieve por Heine siguiendo la construcción de los irracionales de Cantor, en 1872, el de compacticidad. Compacticidad apoyada en el método de encajamiento de intervalos, por el cual al considerar únicamente los extremos superior e inferior, se obtienen dos sucesiones convergentes que caracterizan a un elemento del sistema, del intervalo. Es decir, ha de existir un elemento común a la sucesión de todos los intervalos I —el punto límite común de los extremos si la sucesión de intervalos I tiende a cero—. Es uno de los postulados caracterizadores del concepto de continuidad, hoy calificado de «principio de Cantor», equivalente al principio de continuidad de Cauchy por el cual toda sucesión fundamental es convergente. Por otro lado, Cantor hace uso de la densidad de los reales, es decir, de que entre dos reales hay, siempre, otro. Apoyándose en esta última basta elegir, dada una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ de números reales, un intervalo I tal que sus extremos sean exteriores a I y coincidan con dos de los elementos de la sucesión. Combinando estas dos propiedades se obtiene la demostración de modo inmediato, ya que la sucesión de intervalos encajados caracteriza a un elemento real que no puede estar comprendido en dicha sucesión dado que son intervalos abiertos. Lo interesante es hacer constar que:

a) Cantor utiliza ambas propiedades de modo implícito, sin discusión previa.

b) Es demostración ligada, estrechamente, a las consideraciones topológicas del conjunto de los números reales, propiedades topológicas de un espacio que, a partir de estos trabajos, se irán intentando establecer.

c) Exige el dato previo del continuo y, tras él, suponer la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, es decir, suponer una biyección entre los naturales y los reales del intervalo [0,1] para luego encontrar un punto no numerado en [0,1], por lo cual la aplicación no puede ser biyectiva. Demostración, por consiguiente, indirecta frente al carácter más constructivo de la anterior.

Arrastrado por el éxito de esta demostración de que los reales no constituyen un conjunto numerable y sí el de los algebraicos, Cantor llega a la conclusión de Liouville de que existe el conjunto de los números trascendentes, como conjunto complementario de los algebraicos en $\mathbb{R}$, aunque no pueda mostrar ni uno sólo de esos números. (Quizá la diferencia entre ambos métodos pueda verse con más claridad en el ejemplo: un número natural puede definirse en un número finito de palabras; como este número de número de palabras es numerable resulta que al ser el conjunto de los números reales no numerable, han de existir infinitos números reales que jamás podrán ser nombrados, a pesar de lo cual podemos manejarlos y hablar de ellos en cuanto componentes de $\mathbb{R}$. Para algún matemático como Poincaré tal tipo de «existencia» es rechazable, dado que el matemático, como cualquier otro hombre, únicamente maneja objetos que pueden definirse «en número finito de palabras», o de lo contrario nada maneja.)

He indicado ya que la dinámica de la demostración lograda, que ha permitido *hallar la razón* por la cual N no es biyectivo con $\mathbb{R}$, conduce al planteamiento de nuevas cuestiones. Entre ellas, la de si el plano tiene o no la potencia del continuo, en otras palabras, si una superficie puede ponerse en correspondencia biyectiva con una curva, en términos de la carta de Cantor a Dedekind de 5 de enero de 1874. Cuestión que, ciertamente, parece atentar al sentido común, a la hipótesis admitida de poseer, el plano, más puntos que una de sus líneas. Cantor, de entrada, parece seguir ese sentido común, la creencia extendida y admitida por todos, buscando una demostración rigurosa, no la evidencia empírica, gráfica, de la no coordinabilidad de superficie y curva. Dada la naturaleza de la cuestión planteada —demostrar lo que se muestra evidente— encontrará más dificultades de las esperadas. Ante los sucesivos fracasos para lograr la demostración, Cantor aplicará el método clave de las distintas rupturas: invertir el problema aceptando la creencia opuesta, la de ser coordinables. Al fin, 1877, logra precisamente la demostración de esta hipótesis contraria, aunque todavía la mezcle con las cuestiones de continuidad que la hacían más difícil. Lo que Cantor demuestra es la biyección entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$, empleando la gráfica. La demostración que ha permanecido como clásica, en el caso particular entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$, viene precisada, nuevamente, por Dedekind en la carta de 27 de junio ya citada en la que pide a Cantor moderación:

3. Para establecer una aplicación f entre el par (x,y) y el punto z, basta manejar las expresiones decimales de las componentes del par, $x=0{,}x_1x_2\ldots$, $y=0{,}y_1y_2\ldots$, de forma que se pueda construir la expresión $z=0{,}x_1y_1x_2y_2\ldots$ y recíprocamente.

Naturalmente, la biyección f establecida no es continua, como pretendiera demostrar inútilmente Cantor, pero hace que —con algún detalle técnico para evitar dobles imágenes— la potencia del plano sea la misma que la de una línea. La demostración se mantiene en nivel localizador, aunque en ella se produzca el esbozo de otra demostración de la no-numerabilidad del continuo, especialmente clara —desde nuestra perspectiva actual— en la carta mencionada de Dedekind, al precisar los detalles técnicos de la correspondencia f.

Es a partir de 1890 cuando Cantor pasa a las demostraciones de auténtico carácter globalizador, tras un abandono del concreto punto de partida, el Análisis, para concentrarse en un nuevo terreno de trabajo matemático, el conjuntista. Es la consecuencia de su nuevo cambio mental, producido en 1882, tras su encuentro personal con Dedekind en septiembre, y que le lleva a una especie de mesianismo profético en el hacer matemático en el que él se ve como el nuevo narrador de lo que el Dios matemático ha construido, de un mundo de ordinales y cardinales cuya visión le ha sido revelada. La memoria escrita en octubre de ese año reconoce que sin la extensión de la noción de número (a los transfinitos) «me sería imposible hacer el más pequeño avance en la teoría de conjuntos» y, más adelante, «sin esos conceptos (números ordinal y cardinal) no se va lejos —tengo la convicción— en la teoría de conjuntos; y lo mismo ocurre, parece, en dominios que dependen de la teoría de conjuntos o tienen con ella el contacto más íntimo como, por ejemplo, la teoría moderna de las funciones, por una parte, la lógica y la teoría del conocimiento por otra». Pero ello supone un cambio en el hacer matemático considerado clásico, como he indicado ya respecto al problema de la existencia. Y Cantor tiene la total certeza de que esa ruptura se produce en su trabajo. «No disimulo en modo alguno que con esta empresa yo me pongo en una oposición cierta con puntos de vista extendidos sobre el infinito matemático y con opiniones frecuentemente difundidas sobre la esencia de la magnitud numérica.»

De las demostraciones globales de esta segunda etapa, destaca el empleo del método de la diagonal, método al que Cantor unirá su nombre, así como el hecho más llamativo de apoyarse en la antinomia para obtener conclusiones.

En una segunda demostración de la no-numerabilidad del continuo, Cantor se independiza de las cuestiones técnicas del tipo mencionado en la de 1874. Como proceso diagonal, esta demostración culmina en la reducción al absurdo aplicado a conjuntos de infinitos elementos, actualmente dados.

4. Hipótesis que se admiten: *a*) Suponer que los reales entre 0 y 1 son coordinables con N; *b*) Suponer dado el total de los reales entre 0 y 1; además, se utiliza el resultado de Otto Stolz, de 1886, por el cual todo irracional puede ser representado de modo único como un desarrollo decimal no periódico, propiedad que sirve para caracterizarlos (y que, aunque entrevista y admitida tácitamente por Cantor, no había sido demostrada). Salvo detalles técnicos —como la supresión de la cifra 9 de las infinitas cifras decimales de cada número real, y el artificio de evitar que los racionales presenten dos posibles desarrollos, o terminen tras un número finito

de cifras decimales— admitir la hipótesis *a*) implica que los reales entre 0 y 1 pueden ser ordenados en una serie del tipo

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ a_2 &= 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ a_3 &= 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Y dada esta serie que, por *b*), contiene el total de los reales, puede construirse un número tal como $b=0{,}b_1b_2b_3\ldots$ a partir de los a_i estableciendo

$$b_i = \begin{cases} 9 \text{ si } a_{ii}=1 \\ 1 \text{ si } a_{ii}\neq 1 \end{cases}$$

El número *b* así obtenido es diferente a todos los a_i y, sin embargo, por la construcción realizada, es un número real supernumerario, comprendido entre 0 y 1. Luego la hipótesis *b*) falla por existir este número. De aquí que la conclusión de Cantor sea afirmar que la hipótesis *a*) es falsa y, por consiguiente, que el continuo tiene una potencia superior a lo numerable.

5. Caso particular, se muestra que el conjunto de las funciones de una variable real posee una potencia superior al conjunto de variación de su argumento; es decir, posee una potencia superior al continuo. Aunque Cantor, en 1890-91, parte de que este conjunto de variación de los argumentos es el de los naturales —con lo cual el conjunto de funciones que toman dos valores sobre este conjunto va a ser el de los números reales—, el argumento es totalmente general. Basta suponer —negación de la tesis— que cada función se coordina con el conjunto de sus argumentos y, entonces, se puede construir una nueva función por la propiedad de tener, para cada argumento, un valor diferente del que toma la función coordinada en ese argumento. El método demostrativo es análogo al establecido en la no-numerabilidad anterior y permite generalizar las potencias, ya que dado cualquier conjunto puede obtenerse siempre otro de potencia mayor, a partir de las funciones que tengan su dominio en dicho conjunto.

Precisamente esta demostración es la que aparece esbozada en la carta de Dedekind a que he hecho referencia reiterada de 27 de junio de 1877. En ella Dedekind indica cómo al excluir el caso de una fracción finita mediante el convenio de reemplazar las cifras 0 por 9 —así, 0,3 se sustituirá por 0,299...— se observa que la función *z* construida a partir de $x=0{,}x_1x_2\ldots$ y de $y=0{,}y_1y_2\ldots$ en la forma $z=0{,}x_1y_1x_2y_2\ldots$ está bien caracterizada, pero también «hay infinidad de verdaderas fracciones a las cuales *z* no será *nunca* igual». El ejemplo de Dedekind es claro: puede elegirse una función *z* de *x* y de *y* de tal manera que tome valores diferentes a las cifras x_i y y_i. Es ejemplo que se presenta como mera objeción a la construcción primitiva cantoriana. Y lo es hasta el extremo de que Cantor abandona momentáneamente su esquema y busca una demostración apoyada en la gráfica para confirmar su creencia, su convicción de que el plano y la recta pueden ponerse en correspondencia biyectiva, abandonando al fin esta última condición de continuidad que le impedía alcanzar su objetivo.

Junto a las demostraciones por el método de la diagonal se tiene una de las versiones del denominado «teorema de Cantor»:

6. El conjunto de las partes de un conjunto dado posee una potencia superior a la de éste, $\overline{\overline{X}}<\overline{\overline{\mathcal{P}(X)}}$, o, en otras palabras, no existe una biyección f entre X y $\mathcal{P}(X)$. La demostración, el mismo esquema de reducción al absurdo: Supongamos que exista la biyección f. Sea m un elemento de X cuya imagen sea el conjunto M. Puede ocurrir que $m\in M$, o bien que $m\notin M$. Sea N el conjunto de *todos* aquellos elementos m de X tales que *todos* los subconjuntos M de X asociados con ellos no los contengan; este conjunto N es un elemento de $\mathcal{P}(X)$ o subconjunto de X, $(N=\{m|m\notin M\}\subset \subset X)$. Por la hipótesis, al ser $N\in\mathcal{P}(X)$, debe existir un p, $p\in X$, tal que $f(p)=N$. Ahora bien, este conlleva antinomia ya que al repetir el razonamiento pueden plantearse dos casos: $p\in N \vee p\notin N$. Si $p\in N$ se obtiene contradicción con la construcción de N, que es tal que $p\notin N$; si $p\notin N$ también hay contradicción ya que, por la construcción, ha de verificarse $p\in N$. Suponer la existencia de una biyección f entre X y su conjunto potencia conduce a una antinomia, luego tal hipótesis debe descartarse y, como consecuencia, se obtiene que las potencias de X y $\mathcal{P}(X)$ son distintas.

3. EL MARCO

Se ha indicado que Cantor es el *creador* de la teoría intuitiva de conjuntos y, por ello, creador de un nuevo tipo de hacer matemático en una de las rupturas epistemológicas del hacer matemático en los entornos de 1875. A la vez, se han indicado alguna de las motivaciones: la central, hallar la razón. Y simultáneamente, cómo para realizar esa ruptura para hallar la razón, Cantor invierte las creencias adoptadas, admitiendo como premisa el infinito actual, demostrando la existencia de varios tipos de infinito, admitiendo como hipótesis a demostrar la proposición contraria a la sostenida por el «sentido común». El carácter revolucionario de este hecho es claramente percibido por Cantor, al igual que la ausencia de un plan preconcebido en su obra, arrastrado por la dinámica del proceso creador, en el cual van surgiendo nuevas cuestiones, nuevos métodos que van obligando, además, a radicalizar la postura creadora y, con ella, la polémica frente a los matemáticos calificados de «tradicionales» desde la perspectiva cantoriana, aunque puedan no serlo desde la ruptura que, igualmente, alguno de ellos provoca. Sólo en los períodos de 1883 y 1895 Cantor se dedica a ordenar, a sistematizar lo ya elaborado.

No voy a discutir, aquí, el papel del individuo Cantor como creador. Este papel le corresponde plenamente. Y ello en el sentido de que al invertir la problemática en la que se sitúa, da cauce conceptual, crea un marco apto para unas ideas previas, reconocidas por quienes trabajan en el mismo hacer y que en este marco cobran su auténtico papel. Ideas no todas difusas, sino expresión de haber llegado a unos límites en el hacer originado en la ruptura de 1827 con «necesidad» de alcanzar un nuevo marco desde el cual dar razón de tales limitaciones presentidas; sentimiento creador de un cierto ambiente que permitirá que la revolución cantoriana alcance su plena validez objetivable, aunque ese mismo ambiente pueda llegar a oponerse al nuevo marco en el cual adopta sentido. En este aspecto parece interesante observar que, realmente, los conceptos que Cantor maneja, sus puntos de partida, sus métodos, incluso la existencia de un objetivo final que Cantor no parece poseer, lo vienen utilizando en paralelo, incluso en momentos anteriores, otros matemáticos, a los que faltó, sin embargo, la realización conceptual sistemática cantoriana. Reconocimiento, que no conocimiento del nuevo objeto y marco. No haré, aquí, más que mencionar alguno de estos elementos.

Así, se encuentra generalizada la aceptación de agregados, sistemas, dominios o conjuntos con infinitos elementos dados en acto. Aceptación a la que, de modo paulatino, se había llegado a partir de lo infinitesimal y de lo numérico. Es del estudio de las singularidades de una función en un punto, del sistema que tales singularidades constituyen, el que conduce, por inversión, al enfoque globalizador, por el cual se llega al abandono momentáneo de ese problema local y se reemplaza por el estudio global de conjunto de dichas particularidades. Que, al establecerse en el conjunto de los números racionales, por un lado, en el de los irracionales por otro, obligan a la definitiva clarificación de la estructura de ambos conjuntos, estructura sólo posible si se admite que ambos, como conjuntos, están previamente dados. Los procesos de construcción de los irracionales exigen, todos, como ya hice notar en 2.2.2.1., que el conjunto de los racionales se encuentre dado en acto, aunque en alguna de ellas se pretenda enmascarar este hecho con un tinte constructivo procedente de la ideología inscripcionista formalista.

He indicado el empleo por parte de Cantor de dos propiedades del conjunto de los reales, del continuo, la compacticidad y la densidad. La primera, con su proceso de reiteración de intercalar intervalos en cantidad numerable, es manejado por Heine en 1872, aunque sólo Borel la adoptará como nota caracterizadora de ciertos espacios, los compactos; mientras que la densidad había sido indicada por Dedekind como condición necesaria, aunque no suficiente, para la constitución de los reales.

El instrumento operativo para Cantor en su primera etapa de creación, ligada estrechamente a las propiedades del continuo, es el concepto de conjunto derivado, que introduce en 1872 como prolongación de la noción de punto límite de un conjunto. Es noción procedente de Weiertrass, con su propiedad —enunciada en lenguaje posterior— de que todo intervalo que contenga al punto límite o de adherencia p de un agregado X debe contener infinitos puntos de X distintos de p. Igualmente procedentes de Cauchy y Du Bois Reymond se indica la existencia de dichos puntos de acumulación para todo agregado acotado con infinitos elementos —teorema de Bolzano-

Weiertrass—. De aquí, la noción de conjunto derivado de un conjunto X como el conjunto de todos los puntos límite de X. Ello obliga a conceptualizar las nociones topológicas de conjunto abierto, cerrado, puntos interiores... y, por supuesto, a la de conjunto perfecto, que es el idéntico a su primer derivado. En 1882 Cantor demuestra —y Bedixon precisa en 1883— que si el derivado X' no es numerable, X se puede descomponer de forma única en un agregado reducible y uno perfecto; reiterando por derivación, puede reducirse todo conjunto cuyo primer derivado no sea numerable a un conjunto perfecto. De aquí que —demostración por intervalos encajados— un conjunto perfecto no puede ser numerable, mientras que todo conjunto cuyo primer derivado es numerable, es reducible, para demostrar lo cual hace intervenir la densidad en sí —todo punto del conjunto denso en sí es punto límite—. Cantor, en 1883, demuestra que todo conjunto perfecto posee la potencia del continuo, demostración que hace uso del conjunto perfecto no denso manejado precisamente por Du Bois Reymond, mediante el método de intervalos encajados, lo cual exige —como en el teorema anterior de Cantor-Bedixon— que los agregados que se manejen pertenezcan a un espacio métrico. Método que, junto a la idea de los puntos límite de orden infinito comunicará personalmente Du Bois Reymond a Cantor —según confesión propia— años antes de 1879.

El método de la diagonal, que Cantor utiliza a partir de 1890 para demostrar que el conjunto de funciones de una variable tiene una potencia superior al conjunto de variación de su argumento, había sido empleado por Du Bois Reymond en 1874, y no de manera puramente pasajera, sino con la consecuencia correspondiente de que el continuo funcional debe tener una potencia mayor que el continuo métrico, es decir, con la admisión de una escala de infinitos. Precisamente Borel se apoyará en este razonamiento de Du Bois Reymond para construir su escala de tipos crecientes, y a esta idea del matemático alemán es a la que Poincaré se referirá en la construcción de sus distintos continuos en 1893, en especial el continuo de tercera especie en el cual el principio de Arquímedes no se verifica y que hoy se encuentra en la base del Análisis no canónico sobre un cuerpo no arquimediano. Pero lo más sorprendente es que con este tipo de construcción —diagonal— Du Bois Reymond se aplique, en 1877, a la construcción de una teoría general de funciones capaz de abarcar —como señalaría Cavaillés en *Philosophie mathématique*— «todo el sistema de los órdenes de crecimiento en un solo continuo de orden nuevo».

En paralelo, Frege elabora y sistematiza su «definición por abstracción», apoyada en la relación de equivalencia y el conjunto cociente que la misma provoca, base de la definición de potencia de Cantor. Y, contra la imagen difundida de aislamiento de Frege, del desconocimiento de su obra, cabe recordar sus polémicas y escritos con Dedekind, Peano, Cantor..., respondiendo a un mismo cuadro con Schröder, Peirce...

Para no alargar con más datos, los anteriores indican la existencia de un ambiente que requería la cristalización en marco conceptual apropiado. Cristalización que es la auténtica obra cantoriana. Y que permiten justificar las palabras de Borel, escritas en 1899, en el artículo «A propos de l'infini nouveau», indicando cómo las aplicaciones de las ideas de Cantor no tardaron en multiplicarse y cómo «las ideas nuevas se han convertido ya, por decirlo de alguna manera, en clásicas, tanto para el público matemático como para el público filosófico». Clasicismo de unas ideas que no recibían una formulación sistemática sino cuatro años antes de que fueran escritas por Borel estas palabras. Y que llevan a Klein a discutir la conveniencia o no de su introducción en la enseñanza media alemana en 1905, diez años después de dicha sistematización.

4. LA IDEOLOGIA

Quizá las palabras anteriores den la impresión de que esas ideas nuevas —y tan pronto clásicas— se impusieron sin esfuerzo. Nada más contrario a la realidad. Supusieron, para quien las logró cristalizar, conceptualizar en sistema coherente frente al mero reconocimiento anterior, un esfuerzo absoluto, agotador, con sus períodos de crisis —con abandono del hacer matemático por el teológico o, incluso, con abandono de todo tipo de hacer por internamiento en manicomio, junto a períodos explosivos de trabajo creador—; supusieron, para los restantes matemáticos, un desafío, un reto por el cual algunos llegaron a aceptar e incorporar esas ideas y métodos en su trabajo de modo inmediato mientras que otros optaron bien por el desconocimiento, bien por la oposición violenta a las nuevas ideas. Alguno de los mencionados anteriormente, como Du Bois Reymond, activo matemático en paralelo, en anticipador de ideas, métodos y objetivos, queda fuera del marco y llega al desconocimiento de lo que su propia obra implica atacando a Cantor. Tras su idea de un continuo abarcador de los diversos órdenes de infinitud, con potencias distintas, Du Bois Reymond, en 1877, da una función «ideal» apoyada en la integral de Fourier que ni es divergente ni convergente —lo cual es una «representación chocante para el sentido común»— y afirmaría la conveniencia de aceptarla ya que «el milagro no es mayor... que admitir nuevos números entre los racionales densos a voluntad». Por el contrario, en 1887 atacaría la demostración cantoriana de una biyección entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ por los mismos motivos por los que cabía aceptar su función ideal: la demostración «parece contraria al sentido común», a lo que añade: «El hecho es que esta es simplemente la conclusión de un tipo de razonamiento que admite la intervención de ficciones idealistas, a las cuales se permite jugar el papel de cantidades genuinas aunque no sean otra cosa que límites de representaciones de cantidades. Aquí reside la paradoja.» Crítica del mismo tipo de la de Kronecker, quien tras la demostración de la trascendencia de π realizada en 1882 por Lindemann —que siguió los pasos de la dada por Hermite para e— aseguraría: «¿Qué vale vuestra bella demostración ya que los números irracionales no existen?»

Crítica basada, claramente, en un punto de partida ontológico, en una ideología y no en el plano interno matemático. Un hacer libre del matemático como trabajador frente a un realismo platónico aceptado por Cantor a partir de 1883. Es esta ontología platónica subyacente a la obra cantoriana la que encontrará la radical desconfianza. Incluso del mismo Borel, quien adopta la terminología y conceptos cantorianos para su trabajo en teoría de funciones, en su creación del análisis funcional. La oposición se centra en el hecho de la «existencia» y la «creación» del objeto matemático. Para Cantor, ésta ha de ser independiente de la «metafísica», de lo objetivo material —dado por los modelos intuitivos geométricos—, pero no de un mundo eidético dado previamente, por lo que el objeto matemático debe abandonar todo formalismo y se debe aceptar como hecho el que la marca posea un referencial objetivo además de poseer un significado; debe existir un en sí de las entidades matemáticas. Existencia aceptada porque sin los conceptos de número ordinal y cardinal nada se puede hacer en la teoría de conjuntos; y ambos conceptos exigen el dato previo del infinito actual, que no puede ser creado por el hombre ni abstraído de lo material.

Extraña paradoja, Cantor había sido atacado previamente por su formalismo, ataque mantenido en las palabras antes citadas de Du Bois Reymond, o en las consideraciones de éste de que la Aritmetización del Análisis separa este hacer de la intuición geométrica y, con ello, del pensamiento físico por lo que se reduce el análisis «a un simple juego de símbolos donde los signos escritos adquieren el significado arbitrario de las piezas en un juego de ajedrez o de cartas», y que seguían la norma de Hankel de 1867: «Todo intento de tratar los números irracionales formalmente, y sin el concepto de magnitud (geométrica), debe conducir a las más penosas y abstrusas artificialidades, que aun si pueden conducirse con rigor total, como se tiene el derecho de esperar, no tienen gran valor científico.» El realismo como apoyatura del fundamento del hacer matemático, realismo basado en la imagen geométrica, se enfrentaba al formalismo del primer Cantor, por el cual se llegaba a admitir en la descripción dada por Heine en 1871 de la construcción cantoriana de los irracionales que los números reales eran meros signos con unas propiedades determinadas por la construcción. Cantor abandona esta posición del manejo sígnico como fundamento para la matemática en beneficio de una posición antropológica —«la esencia de la matemática reside en su libertad»—, lo que horrorizaría a un Hermite, por ejemplo, pero en cambio se ponía en la línea de Dedekind, el mismo Kronecker, Du Bois Reymond... Para ello se basaría en la obra de Kummer de sus números ideales en teoría de números y atacaría a Kirchoff por sostener el enlace de la matemática con la naturaleza, enlace por el cual el hacer matemático degeneraría en mera «descripción» de la naturaleza sin potencia explicativa de la misma. Existir en matemáticas equivale —en el Cantor de los entornos de 1881— a que la noción introducida libremente no sea auto-contradictoria, de forma que la definición que la introduce permita distinguirla de las ya aceptadas a la vez que fija las posibles relaciones con las mismas. Es el enfoque que permite definir los números reales en su versión, publicada en 1883, de ser el conjunto que contiene tanto a los racionales como a los irracionales; estos últimos se caracterizan mediante las sucesiones regulares o de Cauchy con el concepto de completitud, es decir, la formación de sucesiones de números reales no crea la necesidad de nuevos tipos de números que puedan servir como límites de dichas sucesiones, dado que la previa existencia de los reales basta para dar el límite. Creación por la cual Cantor pretende superar el hecho de las construcciones anteriores que enfocaban el número real como límite de una sucesión de racionales, lo que daba lugar a contradicciones lógicas.

Posteriormente Cantor se liga a un platonismo realista como último fundamento para su teoría de conjuntos. Lo cual era coherente con la aceptación del infinito actual y el método diagonal, existencial y no constructivo con el que manejar ese infinito. Es la inflexión ontológica con la revelación divina consiguiente, producida a partir de octubre de 1882 tras su entrevista con Dedekind en Harzburg: «Inmediatamente después de nuestros últimos encuentros en Harzburg y Eisenach, Dios todopoderoso ha querido que yo alcance las luces más extrañas y más inesperadas sobre la teoría de conjuntos y sobre la teoría de números, o más bien, que yo encuentre lo que desde hace años ha fermentado en mí, aquello hacia lo cual he dedicado largas búsquedas» (Carta a Dedekind de 5-11-82). Cristalización que le conduce hacia 1886 a sostener que el infinito potencial es una variable finita, por lo cual necesita tener un determinado dominio de variación, dominio que sólo puede ser un conjunto infinito, pero de infinitud actualmente dada. En otras palabras, el infinito potencial supone el previo dato de un infinito actual. Constituye este enfoque la radical inversión, metodológica, con sus consecuencias para el desarrollo tanto del Análisis como de la Aritmética.

Es la definitiva inversión cantoriana por la cual se ha de partir de la noción de conjunto o agregado como base para construir, para abarcar todo el hacer matemático, como por ejemplo, el número natural, reunido bajo el concepto de potencia. Este emana de un sistema de objetos puesto en sí, disociable en dos aspectos: número cardinal, número ordinal. Disociación que no tiene sentido en el terreno finito —mera parcela o rincón del infinito—, en el cual ambos aspectos vuelven a hacerse uno. La potencia del conjunto es el «concepto general en el cual los elementos como tipos *de unos* están reunidos, en un todo unificado de manera que cada uno de ellos no tiene rango privilegiado», mientras que «el número cardinal es él mismo un conjunto determinado formado por la reunión de simples *unos* que tienen su existencia en nuestro espíritu como imagen intelectual o proyección del conjunto» y el número ordinal «está necesariamente ligado al orden impuesto al conjunto por una regla, por medio de la cual el conjunto se hace bien ordenado». Precisamente esta aceptación de una creencia en un en sí, de raíz ontológica tamizada por un claro psicologismo, será el origen de muchos de los nuevos problemas que se plantearán a propósito de la creación cantoriana y la ruptura que provocaba en el hacer matemático, al chocar contra otras creencias largamente arraigadas.

[Con leves modificaciones, estos cuatro puntos aparecieron en *Revista de Occidente* núm. 147, junio 1975, bajo el título «Teoría de conjuntos: la creación de Cantor».]

5. PROBLEMAS: INTUICION-IMPREDICATIVIDAD

Haz de cuestiones cuya precisión y delimitación se alcanzará sólo tras un largo trabajo y múltiples discusiones. En ellas se muestra como fundamental la nueva consideración de los agregados de objetos cuya naturaleza no importa, pero que constituyen un objeto sobre el cual, con el cual razonar. Se les da entidad a objetos de naturaleza cualquiera abandonando incluso las multiplicidades lineales cuya entidad «concreta» quedaba admitida por todos los matemáticos —salvo quizá Kronecker—. El problema de globalización conlleva, por esa ausencia de precisión objetual última, un modo de razonar de nuevo cuño. Quizá es, como ya he indicado, la clave; y el centro de las discusiones —como el caso de Du Bois Reymond ponía de manifiesto—. Y ello por ser métodos no constructivos sino existenciales, tipo de razonamiento con ficciones idealistas y con recurso permanente al método indirecto de reducción al absurdo. Método indirecto que si puede ser aceptable cuando el agregado es conocido en el sentido de que se conocen o pueden conocer a cada uno de sus elementos, puede no serlo en cuanto dichos elementos, o la totalidad en sí, no queden perfectamente delimitados. Como nuevos problemas surgen, de esta manera, algunos de carácter lógico y epistemológico: validez o no de las reglas lógicas para clases infinitas, validez o no de las definiciones y, si hay validez, de qué tipo han de ser —nominales, reales, implícitas, por postulados—, criterios de adecuación de los objetos a una realidad material, procesos de abstracción y concreción...

Junto a ellos se presentan otras cuestiones aparentemente más ligadas al plano interno que al ideológico del trabajo matemático. De entre ellas me limito a las provocadas por el binomio intuición-rigor lógico.

Al manejar los agregados con infinitos elementos actualmente dados, la intuición, en cualquiera de sus significados, parece haber sido desterrada, de modo radical, en beneficio del rigor lógico y, con él, de la ausencia de contradicción en cualquiera de sus formas. Precisamente el manejo del infinito actual es el argumento clave para rechazar un empirismo ingenuo como fundamento del hacer matemático. Este se mostrará como una libre creación de la mente matemática o como obligada descripción de un mundo eidético-platónico de realidades matemáticas trascendentes. La intuición parece eliminada en beneficio del rigor lógico.

Ahora bien, lo que quiero destacar es que ambos puntos, destierro de la intuición, consecución de rigor, no son más que creencias no logradas en la construcción cantoriana, sino que en ella se reafirman tanto la intuición sensible geométrica, como la introducción de conceptos y métodos demostrativos autocontradictorios.

El origen visual atribuible a la creación cantoriana de los agregados lineales, de las multiplicidades de elementos cualesquiera, viene dado por la consideración de que esos agregados deben estar compuestos de «unos» sin orden ni naturaleza especificada y, básicamente, por la noción de «potencia» convertida en piedra de toque de todo el sistema teórico. Es digno de destacar que el mismo Cantor indique en 1882 que el término «potencia» lo adopta de Steiner, precisamente de la Geometría proyectiva, donde si dos figuras pueden ponerse en correspondencia proyectiva puntual elemento a elemento, ambas figuras poseen la misma potencia (geométrica); basta suprimir la condición de proyectividad puntual para obtener la aplicación biyectiva elemento a elemento y, con ella, la «equivalencia» o «tener la misma potencia», el mismo cardinal los agregados considerados. Intuición o visión geométrica incardinada, enraizada precisamente en aquello que se desea y se cree independiente de toda intuición. No sólo en el origen de la construcción cantoriana; como Zermelo puso de manifiesto, Cantor se representa sus agregados como bien ordenados, en cadena, en cuestiones como las de comparabilidad, que daban paso, obligadamente, a la distinción entre multiplicidades consistentes e inconsistentes. Cadena o, imagen visual, segmento.

Frente a esta intuición se pretenderá alzar el espíritu considerado más algebraico de Dedekind. Pero no podrá eliminarla. Porque Dedekind incurre igualmente en ella. Así, como Poincaré indicara con total claridad, la construcción de los números reales mediante cortaduras es un proceso eminentemente geométrico; y si bien Dedekind recurre a la imagen geométrica como ejemplificación o base intuitiva para apoyatura del posterior razonamiento, lo que Poincaré indica es que la misma supone el continuo geométrico como algo dado, pero dado «visualmente» por su ordenación total previa, y sobre este dato geométrico se van estableciendo los cortes; proceso reiterable por el cual se puede obtener no sólo el punto, sino la línea y la superficie como fronteras de cuerpos. Proceso visual, geométrico, que permite manejar las totalidades con infinitos elementos como segmentos o como totalidades con infinitos puntos según cuál sea el enfoque, la finalidad que en cada momento se persiga. Y es a partir de esta visualización desde la cual puede comenzar a traducirse a signo, a fórmula las proposiciones que la visión origina; intuición por supuesto no simple, ya que se ve lo que, en cada contexto, desea verse.

Destierro de intuición imposible y, sin embargo, se tiene la creencia de que el mismo se ha logrado. Creencia que lleva a admitir —consecuencia no obligada— que la verdad matemática no puede estar fundamentada en la experiencia sino en el poder creador del matemático —mediante la «generación dialéctica de los conceptos», como afirmaría Cantor en su período intermedio—, que permanece libre de toda arbitrariedad y necesidad. Libertad que sólo puede tener una contrapartida: el rigor lógico manifestado en la imposibilidad de que exista contradicción interna. Aunque Cantor agregue como una nota más la utilidad y fecundidad de las nociones introducidas, en el sentido de que, aun no siendo contradictoria, una noción puede no ser fecunda; en ese caso, la misma acabará siendo abandonada. Ahora bien, el rigor lógico se impone como una limitación interna no muy bien clarificada, a falta de una definición precisa de lo que sea el sistema formal. Se muestra, nuevamente, como una condición no rigurosa, no definida; se muestra, realmente, como lo que es: una creencia. Se cree necesario que ninguna contradicción se presente, pero sin precisar lo que sea un concepto autocontradictorio. Va en paralelo a la creencia de que tampoco se presente la intuición, y no se precise lo que deba entenderse por «intuición». A pesar de la falta de tales precisiones, y al igual que la intuición sensible se encuentra incardinada en la obra cantoriana, también se encontrará incardinada en ella la contradicción.

Presencia de contradicción en la construcción cantoriana que puede observarse en los esquemas demostrativos del punto 2 anterior. Por ejemplo, sea la demostración 6; en ella se suponen dados tanto X como $\mathcal{P}(X)$, es decir, se suponen todos y cada uno de los elementos de los conjuntos X y $\mathcal{P}(X)$. Y, sin embargo, se construye un conjunto M, elemento de $\mathcal{P}(X)$, para lo cual se utiliza la totalidad de los elementos de $\mathcal{P}(X)$ y, por consiguiente, el propio M. Totalidad de $\mathcal{P}(X)$ ya que M se define como el conjunto de todos aquellos elementos de X que no pertenecen a su conjunto imagen, lo que equivale a admitir que antes de dar la definición de M se han manejado *todos* los conjuntos elementos de $\mathcal{P}(X)$ y, por tanto, el propio M. Hay, por todo ello, un flagrante círculo vicioso. Círculo vicioso o impredicatividad apoyado en la admisión previa del total $\mathcal{P}(X)$ como dado, no en el hecho de admitir la existencia de la aplicación biyectiva f, para luego encontrar una contradicción mediante el recurso a la reducción al absurdo, ya que esto último sólo puede establecerse tras la admisión anterior.

Este hecho de la impredicatividad como consustancial con la creación cantoriana y, básicamente, con la aceptación en ella del infinito actual con la aceptación de totalidades caracterizadas no por sus elementos sino que es la totalidad quien los caracteriza —puesto de relieve por Poincaré por vez primera en 1905, al dar su diagnóstico de las paradojas conjuntistas—, se observa igualmente en las demostraciones 4 y 5. Se admite la totalidad de unos elementos para obtener otro elemento en términos de esa totalidad en la que ya se quiere incluido, por consiguiente, en términos de sí mismo.

La impredicatividad se muestra como contraria al mínimo rigor lógico que pretendidamente se había querido introducir, con la consiguiente eliminación del factor intuición. Rigor lógico en su versión clásica de que lo definido no debe entrar en la definición. Rigor lógico que podría tenerse la esperanza de introducir posteriormente, como en muchos otros casos —basta recordar la no convergencia de algunas series, admitida incluso por Cauchy y rechazada por Abel y la búsqueda de criterios de convergencia adecuados— con las leves variaciones pertinentes pero que, por su incardinación con el enfoque globalizador existencial es imposible de introducir sin, a la vez, eliminar la teoría conjuntista en sí, al menos en su versión intuitiva cantoriana, en su versión absolutista. Es lo que pondrán de manifiesto las paradojas, es la gravedad que las mismas entrañan y su limitación consiguiente.

Y es al mismo Cantor a quien corresponde alcanzar los límites de su obra, encontrar en ella la autocontradicción interna tan queridamente rechazable en nombre del rigor lógico. Así, en 1895 —el mismo año en el que edita su primer ensayo sistematizador de la teoría— Cantor encuentra la paradoja que, de modo independiente, hallará Burali-Forti y que hoy lleva el nombre del matemático italiano, paradoja en la teoría ordinal. Y en 1899 Cantor encuentra otra antinomia, la que hoy lleva su nombre, esta vez en el otro frente de su teoría, la cardinal. Es mera consecuencia del razonamiento elaborado en el teorema de su nombre, el teorema 6 del punto 2, por el cual se ha obtenido que $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(X)}}$. Como $\mathcal{P}(X)$ es conjunto potencia, un conjunto de conjuntos, tendrá que ser, a su vez, un conjunto, luego habrá de ser subconjunto del referencial de X; aplicando el teorema anterior se obtiene que $\overline{\overline{\mathcal{P}(X)}} < \overline{\overline{X}}$, lo cual es una contradicción. El concepto de «conjunto de todos los conjuntos» se muestra, de esta manera, antinómico.

La paradoja de Cantor encontrará inmediatas variantes. La más conocida es la versión de Russell —quien conocía la antinomia de Cantor antes de 1901— por el impacto que produjo en la obra de Frege al enviársela a éste en 1902 y ser traducida en los términos fregeanos de «concepto de todos los conceptos» y «extensión de concepto». El marco, en este punto, sigue teniendo su importancia. Lo tuvo en la creación cantoriana y en la inmediata difusión de sus ideas que culminarían en la creación de otras disciplinas. Lo tiene, nuevamente, en la aparición de sucesivas antinomias. La cardinal de Cantor, de Russell era encontrada y comunicada en las mismas fechas, 1902, por Zermelo.

Si las anteriores afectan tanto a la parte ordinal como a la cardinal de la teoría de conjuntos —como a la obra de Frege y a la de Dedekind—, Richard publicará en 1905 otra que se ligará directamente al proceso diagonal. De esta forma culminaría el proceso de señalar la impredicatividad en todos y cada uno de los elementos centrales en que se apoya la ruptura cantoriana y, tras ella, la nueva matemática. El esquema de la paradoja de Richard puede esbozarse como sigue:

Se consideran todos los números reales, escritos en su desarrollo decimal, que pueden definirse mediante un número finito de palabras. Aunque éste número de palabras sea todo lo grande que se quiera, el conjunto de números que definen es un conjunto a lo sumo numerable. De aquí que puedan distribuirse en grupos según el número de palabras y, en cada grupo, pueden ordenarse según un orden alfabético, por ejemplo. Sean los números reales ya ordenados $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Se puede definir ahora el número de Richard indicando que si la n-sima cifra decimal en el número real r_n es 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, entonces, la n-sima cifra del número de Richard será, respectivamente, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0. Con lo cual, según el método diagonal, el número de Richard así obtenido tiene que ser diferente a todo número real r_n, por lo que no podrá pertenecer al conjunto de todos los reales caracterizados por un número finito de palabras. Y, sin embargo, dicho número está definido por un número finito de palabras, por lo que ha de pertenecer a dicho conjunto.

Conviene destacar que las antinomias no afectan tan sólo a la teoría de conjuntos abstractos en sí. Afectan tanto a las nuevas disciplinas, a las que toman como base dicha teoría —análisis de variable real, topología conjuntista, análisis funcional...— como, fundamentalmente, a todo el nuevo hacer, al marco en el que se inscribe la ruptura cantoriana. Es interesante observar que los procesos de aritmetización del análisis, con su construcción de los irracionales como pórtico, realizada en nombre del rigor lógico, había descansado igualmente en otro círculo vicioso: el número irracional se definía como el límite de sucesiones de números racionales siempre que este límite no fuera racional. Era lo admitido por Cauchy en 1821; es lo admitido por Méray cuando en 1869 afirmaba que en el caso de que una sucesión de números racionales no tuviera límite racional «se le asigna uno ideal que se llama un número o una *cantidad inconmensurable,* y que se representa con el mismo signo como si existiese realmente». Implicaban los métodos constructivos aritméticos la implícita admisión previa de lo que ese límite iba a definir. Para superar ese círculo Cantor requiere el dato previo de los reales como algo ya dado y, en ese conjunto, diferencia los racionales de los irracionales no en cuanto a su estructura algebraica —que es la misma, la de cuerpo—, no en cuanto a la densidad —que también poseen los racionales—, sino en cuanto a la completitud, en cuanto a que toda sucesión de Cauchy sea convergente, o toda sucesión de intervalos encajados posea un punto común. Para evitar el círculo vicioso Cantor necesita hablar del conjunto de los reales y, con ello, requiere de la previa construcción de la teoría de conjuntos; para evitar el círculo vicioso y la llamada a la intuición geométrica Dedekind requiere de dicha construcción —en lugar de conjunto, sistema— y de las cortaduras en un continuo previamente dado. Son los procesos de pretendido auténtico rigor frente a la impredicatividad de los puramente aritméticos. Procesos que partían del dato previo de una totalidad amorfa a la que dar estructura algebraica, topológica, de ordenación.

A pesar de lo cual continuaba aceptándose que el número real se apoyaba finalmente en el número natural, paso aparentemente obligado para llegar al irracional en dichos procesos de rigor —así la teoría cardinal cantoriana, los naturales como sistema axiomático realmente en Dedekind—, no digamos en los de aritmetización. Creencia mantenida por todos los que pretendieron dicha aritmetización y de los que invirtieron la misma. Creencia mantenida, curiosamente, hoy día, por todos aquellos que han seguido acríticamente los términos «aritmetización del Análisis» sin ver la complejidad interna que encierran los mismos.

Estas pretensiones son erróneas porque o bien se apoyan en la asignación ficticia a las sucesiones de infinitos racionales de una entidad ideal —y el problema sería entonces la creación de entes matemáticos mediante la sola asignación de una definición, como en la «vaca carnívora»; o en el problema de la igualdad o comparabilidad de dichos entes ideales—, o bien tienen que partir, directamente, no del número natural, sino del dato previo de la clase de todos los conjuntos. De cualquier forma, el número irracional obtenido es una especie de híbrido bastante «irracional». Como apunta acertadamente Morris Kline en su *Historia del pensamiento matemático*, «lógicamente un número irracional no es un símbolo único o un par de símbolos, tal como una razón de dos enteros, sino una colección infinita, tal como la sucesión fundamental de Cantor o la cortadura de Dedekind. El número irracional, definido lógicamente, es un monstruo intelectual, y podemos ver por qué los griegos y muchas otras generaciones de matemáticos encuentran tales números difíciles de aceptar».

Se parte del dato previo del conjunto infinito para acotar, por un lado, el número natural y a partir suyo el entero, el racional; por otro, el irracional. De ahí lo erróneo de la creencia de los procesos aritmetizadores y el intento superador por parte de Cantor, Dedekind, Frege, tomando como base el conjunto, el sistema, el concepto; o de Weiertrass tomando como base las sucesiones de infinitos racionales que se admiten como dados en su totalidad, y no tomando como base el número natural, desde el cual es imposible alcanzar el número irracional. Es la inversión denunciada y criticada por los matemáticos constructivistas, como Kronecker, Poincaré, Borel, Brouwer, Heyting, Weyl...

Además, el proceso caracterizador apoyado en esta inversión va a hacer uso de lo que pretende desterrar: la impredicatividad, la intuición geométrica. El rigor buscado, querido, se muerde la cola, introducidos los elementos que destierra precisamente en su punto de partida, en la clase, en el conjunto de todos los conjuntos que ha de darse para poder realizar la construcción. Punto de partida que viene dado por el principio de abstracción o comprehensión según el cual un conjunto queda caracterizado o «definido» por una propiedad, ley en común que poseen sus diversos elementos. Principio válido cuando se posee el dato de un referencial o conjunto previo, pero que deja sin posible caracterización a ese referencial de partida y al «conjunto de todos los conjuntos» que en el mismo pueden fabricarse. Y no por culpa del posible rigor o su ausencia a lo largo del trabajo, sino por culpa del material que el matemático se da a sí mismo en su comienzo. Lo que claramente puso de manifiesto Russell al negarse, en 1901, a admitir las consecuencias paradójicas, atribuyéndolas a error o equivocación demostrativa del mismo Cantor: «*Existe* el mayor de todos los números infinitos que es el número de todas las cosas juntas, de todo tipo y clase. *Es evidente* que no puede haber un número mayor que éste, pues si se ha tomado todo no queda nada que añadir. Cantor ha hecho la demostración de que no existe el número mayor, y si esta prueba fuera válida las contradicciones de la infinitud reaparecerían en una forma sublimada. Pero en este punto el maestro ha sido culpable de una falacia muy sutil que espero desarrollar en alguna obra futura.» Quien se equivocaba era el discípulo, como reconocería posteriormente aceptando la antinomia

—apoyada en la demostración 5 del punto 2 anterior— y dando su propia versión de la de Cantor, conocida hoy con su nombre.

Y a partir de 1905, en que Poincaré hace el diagnóstico de la impredicatividad como clave de la construcción cantoriana, se revela que también el Análisis de variable real —el enfocado ya desde la nueva perspectiva, el creado tras la ruptura de los entornos de 1875— hace uso de esa impredicatividad, lo cual no es otra cosa que una confirmación, realmente, de la tesis de Poincaré. Propiedades fundamentales de las funciones continuas, por ejemplo, mostrarían que en su demostración se hacía uso del círculo vicioso. Lo cual era consecuente dado que las mismas son eminentemente topológicas, si se enfocan desde la ruptura cantoriana, desde el enfoque conjuntista y no desde el aritmético y figural como se enfocaban antes de dicha ruptura. Zermelo, en 1908, indicaría que la demostración del teorema fundamental del álgebra realizada por Cauchy era impredicativa, a lo que cabría agregar que cualquier demostración de este teorema lo es en cuanto en la misma ha de introducirse el número irracional. Pero también los conceptos de «máximo» y «mínimo» de un subconjunto de los reales son impredicativos y se encuentran en la base del análisis de variable real, en su capítulo de continuidad. Naturalmente, el argumento de Zermelo de reconocer que la teoría de conjuntos es impredicativa y que, como lo es el análisis de variable real, tal impredicatividad no es peligrosa porque da resultados válidos, recuerda el consuelo de la absolución de un ladrón indicando que también otros roban. Y recuerda, una vez más, que el criterio para rechazar o admitir unos procesos determinados de razonamiento se apoyan no en algo absoluto sino en algo tan relativo como la justicia que condena o absuelve según varíen las circunstancias, el tiempo, las sociedades...

Igualmente, el nuevo Análisis iniciado con la escuela francesa, con Borel, Baire, Lebesgue, Fréchet..., que hacen uso de la segunda clase de números creada por Cantor, y cuya base es la teoría de conjuntos en su totalidad, encuentra esa base minada por las antinomias, por la impredicatividad, en el fondo, con la ausencia del rigor lógico pretendido por quienes provocaron la ruptura del hacer matemático en los entornos de 1875. Prolongación de los métodos cantorianos, las nociones de conjuntos borelianos, funciones de conjunto, medidas de conjunto, conjuntos analíticos y proyectivos de Lusin..., pertenecen no ya a una rama especial, calificable de teratológica y con vertiente para la especulación —con recuerdo de las paradojas de Zenón, de las paradojas semánticas, de la paradoja de Cervantes— sino a campos de puro trabajo matemático interno, con aplicaciones a otras disciplinas y de un carácter «técnico» inabordable para los especuladores puros. Es terreno que si por un lado pertenece al plano ideológico del trabajo matemático, por el otro pertenece al plano interno.

Aquí puede ser interesante observar la reacción de algunos matemáticos. Así, Lebesgue quien, ante las polémicas semifilosófico-semimatemáticas originadas por la aparición de las antinomias y los primeros intentos de superarlas apuntará que «entre los matemáticos, la decepción había sido profunda»; al entrar en liza los filósofos, los matemáticos tuvieron que replegarse dejándoles el camino libre para las discusiones inútiles; desconfiados, «los sabios no deben contar decididamente más que con ellos mismos para edificar una filosofía científica que sea útil a la Ciencia». Naturalmente, una filosofía apoyada en el previo trabajo técnico, en el trabajo matemático del cual se obtendrán las reglas, incluso lógicas, que deban o no admitirse. Frechet insistirá que despojando las expresiones de Cantor de sus abstrusas especulaciones acerca de lo Absoluto y otras de raíz eminentemente filosófico-teológicas, despojando la creación cantoriana de su mesianismo profético, las ideas conjuntistas pueden ser una útil herramienta para el trabajador matemático que, aun desconfiado, debe proseguir su trabajo. Lusin comenzará señalando que adopta el punto de vista de Cantor respecto al continuo como conjunto de racionales e irracionales, «posibilidad (quizá muy ilusoria)» y discutible y criticable, pero deja para la teoría de conjuntos resolver el interesante problema de si se puede o no considerar la extensión lineal como «conjunto de puntos», lo cual para el trabajo matemático, al menos como hipótesis, parece aceptable.

Es actitud que, por supuesto, no resuelve frontalmente los problemas. Querer ocultar el pensamiento tras un tecnicismo absoluto —como hizo Hermite, platónico radical— no impide que, si los conceptos que se manejan dan paso a contradicciones, las mismas no terminen apareciendo, aunque se las envuelva en un pretendido plano interno puro. Es desconocer la existencia de los dos planos, ideológico-interno, que condicionan precisamente la expresión del matemático, su trabajo, de una manera radical. Los intentos de superación, por otro lado, no tardarán en llegar tras el diagnóstico de impredicatividad de Poincaré. En 1908, y de modo simultáneo, Russell propone la teoría de los tipos, Zermelo la axiomatización, Poincaré y Borel el constructivismo recursivo; Brouwer, el año antes, el constructivismo intuicionista. Los dos primeros intentos mantienen la impredicatividad tratando de hacerla inofensiva, para lo cual hay que acotar el término «conjunto» —elevando a rango de problema la cuestión de cuándo se puede decir que un conjunto está *definido*— y aceptar las multiplicidades consistentes e inconsistentes según el esbozo de Cantor de 1890 —aunque Zermelo hizo esta distinción desconociendo que ya Cantor la había realizado—, o bien aceptar el axioma de reducibilidad que es la puerta falsa por donde entra el impredicativismo que de modo explícito se pretende rechazar en la teoría de tipos. Las soluciones constructivistas suponen, en principio, el abandono radical de la impredicatividad y, con él, de demostraciones como la de reducción al absurdo con su tercero excluido al enfrentarse con agregados infinitos.

Pero todo ello pertenece a otro capítulo abierto tras la ruptura cantoriana, fundamentalmente a partir de la difusión de las paradojas, el de *Fundamentos de la matemática,* o *Filosofía de la matemática.* También pertenecen a este capítulo las discusiones centradas en torno al postulado de elección utilizado implícitamente por Peano y Cantor hacia 1890 y que Zermelo explicita en 1904 en su primera demostración de buena ordenación de un conjunto. Discusiones para tertulias de café, como irónicamente apostillaría Lebesgue, que no para el trabajo en sí del matemático, aunque naturalmente —nueva repercusión de la existencia de los planos ideológico e interno— esas discusiones obliguen a separar en dos el trabajo: cuando maneja el postulado de elección, cuando no lo maneja. Postulado de elección, en sus distintas versiones, que constituye nueva forma de razonamiento que viene a sumarse a las previamente señaladas por los lógicos.

La ruptura de 1875, principalmente la cantoriana, ha permitido, entre otras cuestiones, poner de relieve un tratamiento globalizador y selectivo como instrumento del trabajador matemático. Aunque, por supuesto, a partir de sus propias limitaciones internas, propias a todo oficio, vuelva a producirse ruptura posterior, por lo que la fabricación cantoriana pueda ser enfocada de una manera distinta a como su creador, Cantor, lo hizo.

6. UNA MIRADA ATRAS: PRESENCIA-AUSENCIA DEL INFINITO

En las discusiones semifilosóficas, semimatemáticas citadas antes, se hacía referencia al infinito actual como creencia en la cual se fundamentaba la ruptura cantoriana —en paralelo, el trabajo algebraico de Dedekind— y, en general, podía estimarse dicho infinito como dato desde el cual enfocar la ruptura en el hacer matemático de los entornos de 1875. Creencia en la cual se enraizaba la antinomia por la impredicatividad que entrañaba partir no del elemento para alcanzar el conjunto, sino de éste para llegar al elemento. Paradojas del infinito —título de Feijóo, da Bolzano— que, a su vez, remitían a Grecia, a Zenón. Desde la perspectiva alcanzada cabría dar una mirada atrás intentando abarcar los haceres, en otros instantes, respecto a los cuales se produce la ruptura cantoriana. El hacer griego con el problema del infinito y sus posibles grados, su presencia o ausencia, con la idea ampliamente difundida de su especial idiosincrasia de rechazo del infinito. El hacer del Cálculo o Análisis calificable hoy de elemental y que no es otra cosa que el estudio, precisamente, de un lugar vacío, el estudio de la ausencia del infinito, convertido en materia finita, con métodos constructivos finitos. Realmente, el Cálculo elemental no maneja el infinito sino su ausencia, y ello con métodos finitistas aritméticos por apoyarse en la reiteración de una acción u operación junto al apoyo en un marcado carácter figural, lo que no he visto destacado con la fuerza necesaria sino, por el contrario, atacado como limitación a superar y desterrar, cuando dicho carácter figural es uno de los componentes imprescindibles de dicho hacer.

Quizá convenga señalar que aunque Dedekind se remita a los *Elementos* de Euclides para indicar las diferencias entre su fabricación de las cortaduras, creadoras de los irracionales, y la creación de Eudoxio reflejada en dichos *Elementos,* o Cantor invoque la teología, los Padres de la Iglesia, Tomás de Aquino..., la influencia directa de esas lecturas en el hacer matemático interno de estos matemáticos no debe considerarse como excesivamente directa. La lectura de los autores mencionados se encuentra condicionada por el marco en el cual se mueve quien lee. Es relectura que conduce, por ejemplo, a breve polémica entre Dedekind y Stieljes con motivo de dicha interpretación de los irracionales en Euclides; polémica en la cual quien, desde un punto de vista más próximo al hecho de la matemática griega, parecería tener razón sería Stieljes y no Dedekind, como se ha querido insinuar comentando la polémica; no la tendría Stieljes en el marco en el cual se situaba Dedekind de una caracterización de tipo axiomático. Relecturas interpretativas desde un marco previo, que condicionan la interpretación haciendo nulo cualquier intento de objetividad intrínseca, que ya he calificado de utópica y que permite que, desde una mayor proximidad, se relea la teoría eudoxiana de los irracionales como la de un cuerpo de operadores en terminología de Bourbaki... La mirada atrás aquí propuesta no podrá, tampoco, escapar a este hecho de objetivar lo que, desde una perspectiva determinada, se presenta como histórico cuando desde otro contexto la objetivación buscada podría ser radicalmente distinta.

La reiteración que he mencionado como una de las notas caracterizadoras del Cálculo junto a su aspecto figural o geométrico, es la de una operación que, desde que es posible una vez, puede llevarse a cabo reiterada, ilimitada, indefinidamente. Pero estos dos últimos términos no pueden identificarse con el de infinito. La reiteración supone un devenir, una acción proyectada en lo posible, pero no realizada actualmente. Es aquí donde se afinca una distinción clásica: la posible existencia de dos infinitos con rechazo de uno de ellos o la admisión de los dos. Uno, el abierto, virtual o potencial; otro, el infinito actual.

Repitiendo, quizá sin saberlo, el argumento de Arquitas de Tarento respecto a la ilimitación —el estratega pitagórico indicaría respecto a la infinitud— del espacio, Blas Pascal afirmaría en cuanto a la Aritmética: «Por más grande que sea un número, siempre podemos concebir uno más grande y todavía otro que sobrepase al último, y así sucesivamente hasta el infinito, sin llegar jamás a uno que no pueda ser superado. Y, por el contrario, por pequeño que sea un número, como la centésima o la diezmilésima parte, se puede concebir todavía un número menor, sin llegar al cero o a la nada.» El infinito se presenta, de esta forma, como una magnitud no alcanzable tras la reiteración, como un constante «más allá». Con ello, realmente, el carácter de infinito se atribuye a la posibilidad reiterativa de una acción —lanzamiento de una flecha tras otra en Arquitas, obtención del número siguiente o anterior a uno dado en Pascal—. Desde una perspectiva actual esta atribución parece un abuso de lenguaje dado que tal posibilidad reiterativa no entraña ningún infinito actualmente dado, sino una ausencia del mismo al ser una acción —en general recursiva— que puede ser proseguida sin límite alguno concebible. Y lo finito pero ilimitado son términos que no tienen por qué ser excluyentes.

La contraposición entre el infinito potencial y el actual se hace presente de modo clásico en las paradojas de Zenón. Entre las atribuidas al filósofo de Elea cabe destacar la de dicotomía, método ampliamente utilizado por los matemáticos griegos, por encerrar el proceso ilimitado de convergencia. En la antinomia de Zenón, la dicotomía consiste en reiterar la acción de dividir un segmento en partes iguales. (Topológicamente lo que indica es que el segmento es denso, lo que no implica, de antemano, que sea la imagen de un intervalo de racionales o de reales.) Dado el segmento AB se toma el punto medio M, con lo cual se obtienen los segmentos iguales AM y MB de longitud 1/2. Se toma el punto medio de MB, M' obteniéndose los segmentos MM', $M'B$ de longitud 1/4. Se reitera la acción de tomar el punto medio, ahora de $M'B$, con lo cual se obtienen los segmentos $M'M''$, $M''B$, de longitud 1/8. La operación o acción de tomar puntos medios, de dividir segmentos en partes iguales, no presenta limitación alguna concebible, no muestra limitación. Es acción de partición indefinida.

Las longitudes de los segmentos obtenidos constituyen una sucesión

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots$$

cuya serie es tal que cada término aumenta en proporción constante. Ahora bien, tal aumento no entraña que la serie sobrepase todo límite, dado que se encuentra acotada por 1 y, además, tiende a esta cota, a 1. La dificultad, si existe, parecería centrarse en el hecho de que si se aumenta una serie, aun en cantidades todo lo pequeñas que se desee, e incluso en cantidades más pequeñas en cada ocasión, la serie debería superar toda magnitud previamente concebible. Es el caso de la serie natural, por ejemplo, en el que cada término es mayor que el anterior sin limitación alguna; es el caso de la serie armónica, manejada por los pitagóricos, destacable, ya que aquí cada nuevo sumando es más pequeño que el anterior, a pesar de lo cual la serie armónica es divergente. Por el contrario, la serie obtenida en el proceso dicotómico es convergente, como ocurre también en el caso de la serie

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

En el proceso dicotómico de Zenón la serie se encuentra acotada y con sólo un punto de acumulación. Hasta aquí, el argumento parecería centrarse en la convergencia o no de las series.

La contradicción lógica sólo aparecería como tal si se aceptaran simultáneamente: *a*) La posibilidad de reiterar una misma operación de modo ilimitado, si se acepta, con Zenón, que «lo mismo es decir esto una y otra vez»; y *b*) La existencia del infinito actual. Por la primera, la serie se tiene que ir construyendo punto a punto, actualizando cada uno de sus elementos en un proceso que parece obligar a un aumento en cada caso, por lo que como la reiteración no tiene límite, jamás se alcanzará la suma total; por la segunda, tales puntos se encuentran actualizados, por lo que el segmento deja de ser tal segmento, tal unidad, para convertirse en una multitud distributiva, por lo que la reiteración aditiva tiene sentido únicamente como proceso develador de alguno de los distintos puntos y no como proceso constructor de los mismos; la suma estará alcanzada antes aún de iniciar la operación, así como el dato de los puntos M, M', M''...

Están en juego dos enfoques, dos consideraciones de un mismo dato, del segmento *AB:* como unidad en la cual los puntos se encuentran únicamente en potencia y han de irse poniendo a luz mediante reiteración operatoria, lo cual equivale a admitir la ilimitación de la reiteración, pero no el infinito actual; como multiplicidad de puntos actualmente dados, lo que equivale a admitir el infinito actual y quedar relegado a un segundo plano el hecho de la operación, de la acción reiterativa, constructiva.

Y lo que puede observarse es que la reiteración, la dicotomía en la paradoja de Zenón no basta para, a partir del primer enfoque, obtener el segundo. Mediante la intercalación de medios se logra obtener aproximaciones a los números irracionales, pero nunca a éstos, nunca se logra actualizar estos puntos, porque las sucesiones continuarán dando números racionales salvo que se acepte la previa existencia del infinito actual, del continuo. Aquí reside la paradoja, la dificultad: mediante la reiteración no se logra alcanzar el continuo; mediante el número natural no se logra alcanzar el irracional. Y ésta no creación del continuo a partir de la acción reiterativa, del después de uno va otro —nota caracterizadora del natural— será la clave de una posible solución, dada también en términos mecánicos: No existe el movimiento, la acción operatoria; lo que existe es el continuo.

Es consecuencia coherente con el marco en el que se sitúa Zenón, en el que se encontrará inmerso Platón y su escuela. Es el marco en el que se provoca una ruptura con el hacer pitagórico en el sentido de que, en éste, lo que cuenta es, precisamente, esa acción operatoria reiterable. Acción operatoria que tiene su modelo en la sucesión natural y de ahí que todo objeto posea su magnitud conmensurable con la unidad dada. Conmensurabilidad que supone que el continuo pueda obtenerse a partir de esa acción reiterativa, de lo numerable. Y es el punto donde incide la antinomia de Zenón: el continuo ha de aceptarse como dato previo, no obteniéndose de lo numerable. De éste cabe obtener aproximaciones gracias al proceso dicotómico, pero sólo aproximaciones; no el número en sí. Es una ruptura no sólo contra el hacer pitagórico sino contra la mayoría de los presocráticos. Así Anaxágoras, quien afirmaría, «En lo pequeño no hay nada que sea lo más pequeño, sino que siempre hay algo aún más pequeño. Pues lo que es, no puede dejar de ser por mucho que se le divida», de esta forma el continuo no puede componerse de elementos discretos «que están separados unos de otros como tajados por el hacha».

Ruptura de Zenón, de Platón con el hacer matemático existente que implica la supresión, precisamente, de la capacidad operatoria reiterativa aritmética en beneficio de lo que está dado, de lo que está ahí, el continuo, y dado en su totalidad. Y lo que está dado es el segmento con sus partes, aun constituyendo una unidad. Y dada esta unidad, compuesta de átomos, de elementos indivisibles, lo que prueba Zenón es que la misma no es numerable, alcanzable por la reiteración. Y puede observarse cómo Platón parece admitir la existencia del infinito actual no sólo por su rechazo de la acción reiterativa aritmética —acepta la dicotomía como «aproximación» a lo que ya está dado, pero que hay que develar, que definir—, sino en la exposición explícita de la clasificación de los números que expone en *Teeteto.* En 147 D, Platón admite la posibilidad de clasificar *todos* los números, que se encuentran en multitud indefinida, en dos tipos: racionales e irracionales, dando un criterio perfectamente coherente con la visión geométrico-figural. Las palabras de Teeteto, en el diálogo, son:

> A mí se me ocurrió una idea, viendo que las raíces cuadradas (o potencias, δυνάμεις) parecen ser ilimitadas en multitud, de intentar llegar a un término colectivo (a tratarlas unitariamente) por el cual pudiéramos designar todas esas raíces cuadradas. (...) Divido el número en general en dos clases. El número que puede ser expresado como igual multiplicado por igual lo comparo a un cuadrado en la forma, y lo llamo cuadrado o equilátero... El número intermedio, tal como 3, 5 y cualquier número que no puede ser expresado como igual multiplicado por igual, pero es producto de un menor por un mayor o un mayor por un menor, de forma que siempre está contenido entre un lado mayor y otro menor, lo comparo a una figura oblonga y lo llamo número oblongo. (...) A todas las líneas que cuadran los números equiláteros y planos los denomino «longitud» (μῆκος), y a las que miden los oblongos «potencias» (o raíces cuadradas), no siendo conmensurables con las otras en longitud sino únicamente en áreas planas a las que sus cuadrados son iguales. (...) Y de modo parecido con los sólidos.

Además de que la clasificación en partes disjuntas exige la plena aceptación del dato de todos los números como algo ya dado —al menos como hipótesis, como quizá precisara el mismo Platón, al «estilo de los geómetras»— y en multitud infinita, esos números tienen una conmensurabilidad relativa: son inconmensurables respecto a la línea los irracionales, pero no respecto al cuadrado. Y en este sentido el ser oblongos permite su construcción gráfica y, con ella, el poder resolver una expresión del tipo $\sqrt{2}\,\sqrt{3} = \sqrt{6}$, a pesar de lo que opinara Dedekind en contra. Construcción a base de los números «bordes» o lados y «diagonales», con los que puede obtenerse el valor del número inconmensurable respecto a la unidad o longitud.

Sin entrar en los detalles técnicos de estas construcciones y de su elaboración geométrica que permite obtener los números irracionales como oblongos, lo que interesa destacar es el hecho de que en el pensamiento platónico, así como en el de Zenón, el dato previo es el infinitivo actual, aunque único, como dato, y no el proceso o acción reiterativa, constructiva. Si ésta hace falta, si se la requiere, es porque el hacer matemático es un primer paso hacia la dialéctica y se precisa de la figura que se traza y se borra, así como del nombre, para poder alcanzar el auténtico grado de conocimiento. La acción operatoria, constructiva, es un medio auxiliar.

La diferencia en el enfoque y la elección contrapuesta vendrá dada por Aristóteles al indicar que el continuo es una magnitud que no está compuesta de elementos indivisibles en acto aunque pueda admitirse que tal continuo posea elementos indivisibles en potencia; el segmento es un todo, una unidad y no una multiplicidad distributiva. La contradicción de Zenón se resolvería desde este segundo enfoque negando el infinito actual en beneficio del proceso reiterativo, del infinito abierto o potencial, de la ausencia de infinito. «Cuando la línea continua se divide en dos mitades, se toma un punto de ella por dos puntos, pues se la hace tanto principio como fin. Pero en cuanto se divide así, ya no es continua ni la línea ni el movimiento... En lo continuo hay, en verdad, infinitas mitades, pero no en realidad, sino en posibilidad.» Y es en la línea de la posibilidad reiterativa en la que cabría situar, aproximar a Eudoxio, tras su separación de la Academia platónica por su reconocimiento —que no conocimiento— del cálculo pascaliano y su vuelta a los procesos de exhaución aproximadora.

Este último infinito virtual, ausencia de infinito, es el propio de los métodos calificables de aritméticos, métodos que son constructivos, en general. Así, la suma es una operación reiterable entre naturales, definibles en términos recurrenciales o inductivos. Sin embargo, la sucesión de los naturales o soporte de la definición inductiva de suma ha de irse construyendo paso a paso, negándose la existencia de dicha sucesión como un algo ya dado previamente, como algo ya clausurado.

La ruptura del hacer matemático griego representada por Platón frente a las convicciones de Anaxágoras, Arquitas, posteriormente Aristóteles, se apoya por un lado en lo figural, en lo geométrico y, por consiguiente, en el continuo como actualmente dado, pero por otro lado en la posibilidad dicotómica, elección de dicotomía como proceso reiterable pero a la vez en un todo previamente acotado, de lo contrario la sucesión a obtener podría ser divergente y la aproximación se habría perdido. De aquí los esquemas demostrativos griegos, basados en la demostración de una proposición fundamentalmente por alguna propiedad directa, construible, bien mediante la reducción al absurdo, bien por una combinación de ambas.

Modelo de este último tipo de demostraciones no constructivas, apoyado en las propiedades de lo par y lo impar, y del paso al número cuadrado o equilátero, se tiene en la prueba de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$, con previa aceptación de la reducción al absurdo: Sea AC la diagonal del cuadrado que se supone conmensurable con el lado AB y la razón numérica sea $\frac{a}{b}$ que, como $a>b$, ha de ser mayor que 1. Elevando al cuadrado —pasando a las potencias— se tiene $\frac{a^2}{b^2}$, y como $AC^2=2AB^2$, entonces $a^2=2b^2$, lo cual indica que a^2 es par, por lo cual tendrá que serlo a. Como a y b se toman sin divisores comunes, ello obliga a que b sea impar. Sin embargo, al ser a par se podrá escribir en la forma $a=2c$, de donde $4c^2=2b^2$ y, simplificando, $b^2=2c^2$, lo cual indica que b^2 es par y, por consiguiente, b también lo ha de ser. Contradicción, de aquí que AC y AB carezcan de razón alguna y AC, o su valor numérico $\sqrt{2}$, sea inconmensurable con AB o su valor numérico 1.

Modelo de demostración reiterativa finita pero con apelación a la reducción al absurdo, se tiene en la proposición 20 del libro IX de los *Elementos*.

La proposición general enunciada establece: «Hay más números primos que cualquier cantidad de números primos dada.» La proposición particular que en la maquinaria demostrativa griega sigue a la proposición general, y sobre la cual se realiza auténticamente la demostración, establece: «Sean *A, B, C,* números primos dados; digo que hay más números primos que *A, B, C*.» En términos no geométricos o figurales, como hace Euclides, sino de matiz más algebraico, la demostración se haría indicando que el número $p=abc+1$ no admite como divisores a ninguno de los tres números primos dados, *a, b, c*. Por disjunción de casos: *a*) Si *p* es primo, queda demostrado que, junto a los tres dados, existe otro; *b*) Si *p* no es primo, debe poseer un divisor primo *k*. Si *k* fuera *a, b, c,* entonces *k* debería ser un divisor de 1, lo cual es imposible; por consiguiente, *k* debe ser distinto de *a, b, c*; luego *k* es otro número primo distinto a los tres dados. En cualquiera de los dos casos de la dicotomía se obtiene otro número primo, luego la proposición particular queda demostrada. Y, aunque Euclides no lo establezca de modo explícito, en la maquinaria demostrativa griega se sobreentiende la generalización en el sentido de que puede repetirse el razonamiento para otra multitud cualquiera de números primos, ya que es lo mismo decir esto una vez y otra.

Hay que observar que la previa fijación de una multitud de números primos no supone que tal multitud haya de ser finita. Además la clave de la demostración euclídea se encuentra, precisamente, en la proposición particular por la que se toma, se elige un representante geométrico cualquiera razonándose sobre él porque no puede razonarse sobre toda la multitud simultáneamente. No es la clave la posibilidad reiterativa, dado que esa reiteración se dirige, realmente, a señalar que el mismo razonamiento puede hacerse con cualesquiera otros representantes; es decir, se dirige a indicar la propiedad que hoy indicamos con el término de «uniformidad» de una operación. De ahí que esta reiteración no implique ni siquiera el bosquejo del método demostrativo clave para el tipo del infinito potencial, la inducción completa, que algunos pretenden vislumbrar en la demostración euclídea, aunque reconozcan que permanece en el estadio de simple inducción.

Bosquejo que se mostraría aún más claro en el *Arenario* de Arquímedes dirigido a probar que siempre puede encontrarse un número mayor que cualquier número concebible de antemano. Sin embargo, hay que insistir en que estos procesos no son de inducción completa, sino en todo caso de inducción simple porque en ellos falta tanto el segundo paso constructivo sobre el número cualquiera como, fundamentalmente, la cláusula de cierre. Y aunque un historiador de la teoría de números como J. Itard mantenga que ambas inducciones constituyen un mismo proceso, e incluso señale el fastidio de tener que indicar tanto el segundo paso demostrativo como la cláusula de cierre, por mor de la rigurosidad quisquillosa de los lógicos, los procesos demostrativos indicados son radicalmente distintos como he intentado poner de manifiesto en mi libro *La filosofía de la matemática de J. H. Poincaré.*

Es el método de inducción completa el que permite suprimir la llamada al método de reducción al absurdo, constituyendo la esencia de los procesos demostrativos constructivos, directos, cuando se maneja el infinito potencial. Método no manejado por la matemática griega, precisamente porque los matemáticos, más ligados a la escuela platónica que a su rechazo aristotélico, aceptaban el infinito actual y no el potencial. El infinito potencial, el infinito como posibilidad reiterativa, como ausencia del auténtico infinito, como ausencia de lo actualmente dado, surge de la Aritmética, surge con Pascal y Fermat, con Maurolico, creadores de la Teoría de números y sus aplicaciones a la Combinatoria y al Cálculo integral, apoyándose tanto en la reiteración como en el número cualquiera, así como en la acción que da paso a la sucesión bien ordenada. Y gracias a esta acción se produce una ruptura en el hacer matemático mediante un nuevo enfoque metodológico que permite la creación de una nueva disciplina como el Cálculo integral figural, entre otras. Es a partir de esta introducción del infinito potencial frente al infinito actual, de la reiteración aritmética como acción frente a la descripción que el infinito actual desaparece del hacer matemático —con el rechazo, por ejemplo, por parte de Galileo, de la biyección entre la serie de los números naturales y una cualquiera de sus partes, lo cual supondría aceptar la infinitud actual—. En lugar de manejar conjuntos infinitos, en extensión, se habla por parte de los matemáticos de propiedades de objetos, números, figuras. Se evita así el terreno de la extensión para situarse por modo casi exclusivo en el de la comprehensión, extremada posición que tiene como ejemplo más notable a Leibniz. Como recuerda Bourbaki en sus *Elementos de historia,* el mismo Galois «no habla de cuerpos de números, sino únicamente de las propiedades comunes a todos los elementos de uno de tales cuerpos. Incluso Pasch y Hilbert, en sus presentaciones axiomáticas de la geometría euclídea siguen absteniéndose de decir que las rectas y los planos sean conjuntos de puntos».

Es en esta ruptura con el infinito actual, mediante su desaparición en beneficio de los procesos reiterativos, recursivos, en la cual surge tanto la Geometría analítica cartesiana —con la reducción de la geometría a la aritmética— como el Cálculo integral figural. El enfoque del mismo se hace desde los terrenos de la Aritmética en combinación, estrechísima, con lo figural o geométrico. En este hacer quisiera destacar aquí, únicamente, tres puntos:

a) Se recurre a métodos demostrativos «mecánicos», como la balanza, aunque se señale que tales métodos son «ideales», formales.

b) Existe la ruptura, en Cavalieri, con el principio de homogeneidad del espacio al considerar que una superficie se encuentra formada de líneas que son sus indivisibles; una línea, por puntos, etc. Ello implica una concepción radicalmente no conjuntista, dado que en ningún momento se enfocan tales indivisibles como subconjuntos, sino como objetos, como entidades singulares, individuales, matemáticas. Los continuos no son colecciones de indivisibles, sólo siguen la proporción de los mismos que no dan el contenido de dichos continuos sino tan sólo en la medida en que dicho contenido tiene que ser determinado como aritmético. De aquí la necesidad de los métodos de aproximación y, con ello, del estudio de las series. El que Pascal intente superar la contradicción que el rechazo del principio de homogeneidad supone, aceptando que los indivisibles de una superficie son del mismo tipo, superficies rectangulares de lados infinitesimales, no supone otra cosa que una reafirmación del carácter recursivo del marco de este hacer, que da lugar al reconocimiento de la concepción de límite de una sucesión de rectángulos como área o integral definida de la superficie considerada, método de definición de la integral posteriormente explicitado por Cauchy.

c) En tercer lugar, y creo que es fundamental para el nuevo hacer matemático, para el hacer que rompe con el cósico o renacentista y con el griego, se recurre a la intuición sensible geométrica mediante el empleo de la figura, pero no como entidad en sí, sino como apoyatura de la cual obtener una serie de propiedades, de conceptos y métodos que intervienen en el Cálculo «figural». Constituyen la apoyatura sobre la cual razonar y no la Forma platónica a la que se refieran. Mediante la representación gráfica Pascal llega a exponer todos los principios del Cálculo integral, con los métodos de cambio de variables o sustitución, por partes, reducción de una integral doble o triple a la integración simple..., gracias al empleo de figuras planas que, en las planchas originales, son modelo de perspectiva —por algo fue el creador, como discípulo de Desargues, de la geometría proyectiva—. Figura como apoyatura, pero incardinada en el texto, en el producto del trabajo matemático, incomprensible sin ella.

Estos tres puntos obligan a los matemáticos a romper incluso con el ideal expositivo griego, el axiomático, con el «estilo de los antiguos» o clásicos.

Leibniz mantendrá, igualmente, el infinito potencial, virtual. «En lo ideal o continuo el todo precede a las partes... Las partes, aquí, son potenciales únicamente. Pero en los casos sustanciales lo simple precede al agregado y las partes son actuales y dadas antes del conjunto. Estas consideraciones suprimen las dificultades respecto al continuo, dificultades que solamente surgen cuando se toma el continuo por algo real, que, antes de ser dividido por nosotros, consta de partes reales y cuando se toma la materia por una sustancia.» Con lo cual el principio de lo infinito ha de venir dado por la inducción constructiva que permita un proceso de actualización de las partes. Y así Leibniz pasará de una «metafísica» de indivisibles a una metafísica de diferencias finitas, de los infinitésimos, de las cantidades que, aunque infinitamente pequeñas son, pero dejan de ser en el transcurso del cálculo. Con ello logra superar los dos primeros puntos antes mencionados sobre todo restituir el principio de homogeneidad, pero no logra romper con el aspecto figural. Precisamente el mismo Leibniz *verá* su cálculo de diferenciales —y, con él, el cálculo diferencial— en una de las figuras de Pascal, en la cual verá la propiedad, el teorema fundamental de que los procesos de integración y diferenciación se muestran recíprocos entre sí. A esta visión puramente geométrica hará referencia en su carta al marqués de L'Höpital cuando indica que Pascal parecía tener, a veces, una venda en los ojos. Leibniz hacía referencia al «triángulo característico», infinitésimo pero semejante a un triángulo finito dado. Triángulo característico que le permite volver a aceptar el principio de homogeneidad del espacio y que influirá decisivamente en su concepción de la mónada.

Tras las aportaciones de Leibniz en el aspecto notacional, el Cálculo infinitesimal —cuya esencia quizá consista, en cuanto al método, en las aproximaciones mediante los procesos de mayoración y minoración— se convierte en puro mecanismo operatorio, prácticamente formal. Mecanismo operatorio que conlleva, por otro lado, la seguridad y la fecundidad de dicho cálculo, admitido realmente por tales notas características y no por la extremada debilidad de su fundamentación, de la metafísica de diferencias que son y dejan de ser. Diferencias evanescentes, en el decir de Berkeley, que no siendo son distintas entre sí y llegan a ser, en sumas sorprendentes, cantidades finitas. Representante máximo de este formalismo operatorio, Euler, en sus *Instituciones Calculi differentiales* de 1775, afirmaba:

> El Cálculo diferencial da las reglas que permiten encontrar la diferencial primera de una cantidad dada. Y, como la diferencial segunda se encuentra a partir de la primera, la tercera a partir de la segunda por la misma operación, y así las siguientes, el cálculo diferencial contiene el método para encontrar todas las diferenciales de orden cualquiera.
>
> Igual que en el cálculo diferencial se busca la diferencial de una cantidad dada, igualmente se establece un nuevo cálculo para la búsqueda de la cantidad de la cual se conoce la diferencial. Este cálculo se llama cálculo integral.

En otras palabras, el Cálculo infinitesimal es un mero conjunto de reglas, un método, apoyadas en la posibilidad reiterativa, de técnica operatoria formal que encontrará su ayuda donde ha tenido parte de su génesis, en la imagen gráfica; su aplicación y fecundidad, en las ciencias físicas y naturales, donde no existe infinito actual alguno sino únicamente reiteración de casos. Tales casos tienen la garantía de la reiteración formal ilimitada y, en círculo, dicha garantía viene dada a su vez por la fecundidad e instrumentalización del Cálculo. Las reglas se aplicarán a funciones como mínimo continuas a trozos, es decir, a funciones perfectamente determinadas, indefinidamente derivables, desarrollables en serie en el entorno de un punto, integrables y, principalmente, representables mediante curvas tales que en cada uno de sus puntos, salvo en alguno aislado y por consiguiente salvable, admita derivada, es decir, recta tangente. Recta tangente que no es, por supuesto, el límite de las secantes, sino la recta que une el punto de tangencia con otro infinitamente próximo a él, al igual que en la interpretación mecánica donde la velocidad no es el límite al cual tiende el cociente de infinitésimos, sino que es este mismo cociente.

Sin embargo, la propia garantía de fecundidad e instrumentalización, que justificaba las reglas, condujo a los límites del concepto de función aceptado hasta entonces. Cauchy construirá, en la ruptura de los entornos de 1827, el concepto de límite aplicable tanto a una sucesión como a una función en un intervalo. Con ello iniciaba el declive, aparentemente, de uno de los rasgos fundamentales del Cálculo infinitesimal, el rasgo figural en beneficio del puramente aritmético. Hasta el extremo de que a partir de esta ruptura la continuidad se va a pretender caracterizada exclusivamente en términos del infinito potencial:

> Una función f es continua en p si cualquiera que sea el número ε, $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número δ, δ función de ε, tal que la desigualdad $|h| < \delta$ implique la desigualdad $|f(p+h)-f(p)| < \varepsilon$.

Tanto ε como δ son dos cantidades, dos números, todo lo pequeños que se quiera, pero números que están dados en potencia y que se actualizarán mediante el dato de los mismos, porque no se pretende comprobar algo que queda como potencialmente comprobable, como una acción a ejecutar, si es preciso, en un devenir que se hace presente. Lo que importa es que tal acción sea posible. Es todo lo que exige la definición dada.

Lo infinitesimal, lo infinitamente pequeño, se reemplaza —mediante un rodeo que impide hacer acto de presencia al infinito actual— por magnitudes finitas, por números «todo lo pequeños que se quiera», pero números al fin y al cabo y no infinitésimos que son y dejan de ser en el transcurso del cálculo. Como Hilbert señalara en 1925, en su conferencia sobre *El infinito*, «Del mismo modo que el operar con el infinitamente pequeño fue sustituido [aunque realmente no hubo sustitución, porque el mismo no había aparecido en su forma actual, sino únicamente en la virtual] por un proceso con cantidades finitas que daba por completo el mismo rendimiento y que conducía a idénticas y elegantes relaciones formales, así también debemos sustituir el infinito por un proceso finito, sobre todo en los razonamientos en que intervenga». La sustitución se produce, realmente, tras los trabajos cantorianos, tras la ruptura de los agregados lineales de puntos dados en su infinitud real. Ruptura desde la cual tiene sentido la expresión de Cantor, frente a Weiertrass, respecto a esos números todo lo pequeños que se quiera: «los números que son *(horribile dictu)* menores que todo número real concebible, y sin embargo, diferentes de cero».

Ahora bien, el proceso de aritmetización del Cálculo provocado en la ruptura de los entornos de 1827 no puede eliminar el carácter figural del mismo. Y ello porque esta supresión implica, precisamente, la admisión de lo que no se imagina, el infinito actual. Desde el enfoque aritmético, desde la reiteración recursiva hay propiedades indemostrables, propiedades captadas por la intuición geométrica por modo exclusivo. Propiedades que caracterizan, sin embargo, a las funciones continuas, como por ejemplo:

1. Una función continua en un intervalo está acotada en ese intervalo.
2. Si f es continua en un intervalo, f alcanza un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo.
3. Una función continua no puede cambiar de signo sin anularse.

Las demostraciones clásicas invocan términos como los de sucesión, límite —reiteración— a la vez que se argumenta con la adición y diferencia de incrementos, de cantidades «todo lo pequeñas que se quiera», pero cantidades finitas. Desde un aspecto de rigor, tal invocación falla, porque lo que se tiene es, por ejemplo, un máximo absoluto alcanzable actualmente, y este máximo sólo se pone de relieve, como tal valor, mediante la invocación a la figura sensible, en la cual la gráfica asociada al grafo de la función está previamente representada, visualizada en acto, aunque se oculte este hecho aparentando que dicha gráfica no es más que un mero auxiliar, una ayuda en el plano didáctico. Desde un enfoque aritmético la gráfica no es una ayuda, sino que entra en el mismo plano demostrativo que el factor aritmético. De lo contrario, hay que admitir la existencia de cota superior para todo subconjunto mayorado —y se penetra en otro hacer, el fabricado en los entornos de 1875, que es el que permite dar cuenta precisamente de la limitación anterior, al clarificar la caracterización topológica de todas las propiedades que aquí entran en juego— de números reales, lo cual implica que toda sucesión monótona y acotada de números reales es convergente. Las demostraciones, por reducción al absurdo en este nuevo hacer, no constructivas, exigen el dato previo de la actualidad del conjunto de los reales. Demostración indirecta porque, como mostrara Goodstein en 1961, no existe proceso efectivo alguno para decidir de cualquier función recursiva $f(n)$ si hay valor para n del cual $f(n)>0$ o $f(n)=0$ para todo n.

La ruptura cantoriana implica, por todo ello, una auténtica vuelta del infinito, si se considera el hacer matemático griego de la ruptura platónica como un hacer del infinito actual, frente al virtual o potencial, frente a la ausencia del infinito que surge en la ruptura del siglo XVII, en la ruptura pascaliana.

QUIZA puedan concretarse en dos las tesis que articulan este libro: 1. El trabajo matemático, como todo trabajo, se escinde en dos planos: uno intrínseco, calificado comúnmente como «matemática», y otro externo o contexto ideológico que posibilita y condiciona al anterior, aunque el propio matemático crea que su hacer es independiente a cualquier tipo de ideología o creencia. 2. No hay una matemática que evolucione linealmente en un tiempo único, sino varias matemáticas con tiempos distintos, en algunos casos coexistentes; y ello condicionado por la existencia de rupturas epistemológicas y cambios tanto de objeto como de método, cambios de hacer matemático.

Tesis, con sus consecuencias y repercusiones, que obligan al autor, por un lado, a una discusión de la noción de historia y de la propia historicidad del trabajo matemático; por otro, a una ejemplificación de las rupturas. Punto, éste último, que conduce a discutir tres grandes rupturas, 1827, 1875, 1939, con una somera indicación de los haceres que en cada una de ellas se producen, sus marcos de validez y sus limitaciones. Un Apéndice completa esta visión al estudiar en concreto la ruptura cantoriana y, desde la perspectiva alcanzada, dar una mirada atrás, al hacer matemático griego y al hacer matemático «moderno» del siglo XVII en cuanto a un tema constante en el trabajo matemático, el infinito y, con él, lo numerable y el continuo y sus métodos de trabajo asociados.