Javier de Lorenzo

INTRODUCCION al ESTILO MATEMATICO

EDITORIAL TECNOS

Serie de FILOSOFIA Y ENSAYO
de EDITORIAL TECNOS

ABELLÁN, José Luis: *Miguel de Unamuno a la luz de la psicología.* Una interpretación de Unamuno, desde la psicología individual.
ABELLÁN, José Luis: *Ortega y Gasset en la filosofía española.* Ensayos de apreciación.
DÍAZ, Elías: *Revisión de Unamuno.* Análisis crítico de su pensamiento político.
DOPP, Joseph: *Nociones de lógica formal.*
ENJUTO BERNAL, Jorge: *La filosofía de Alfred North Whitehead.*
FERNÁNDEZ DE CASTILLEJO, José Luis: *Actualidad y participación.* Una filosofía contemporánea.
GARCÍA SAN MIGUEL, Luis: *Notas para una crítica de la razón jurídica.*
GURMÉNDEZ, Carlos: *Ser para no ser.* Ensayo de una dialéctica subjetiva.
HIERRO, José S.-P.: *Problemas del análisis del lenguaje moral.*
HUGHES, John B.: *José Cadalso y las "Cartas Marruecas".*
LORENZEN, Paul: *Metamatemática.*
MARTÍN SANTOS, Luis, y otros: *Ensayos de filosofía de la ciencia.* Simposio de Burgos. En torno a la obra de Karl R. Popper.
MATES, Benson: *Lógica matemática elemental.* Reimpresión.
NICOL, Eduardo: *El problema de la filosofía hispánica.*
NICOL, Eduardo: *Historicismo y existencialismo* (2.ª ed.).
PARÍS, Carlos: *Hombre y naturaleza.*
RAMA, Carlos M.: *Teoría de la historia.* Introducción a los estudios históricos (2.ª ed.).
RODRÍGUEZ PANIAGUA, José M.ª: *Hacia una concepción amplia del Derecho natural.*
SÁNCHEZ DE LA TORRE, Angel: *Los griegos y el Derecho natural.*
SOTELO, Ignacio: *Sartre y la razón dialéctica.*
TIERNO GALVÁN, Enrique: *Acotaciones a la historia de la cultura occidental en la Edad Moderna.*
TIERNO GALVÁN, Enrique: *Razón mecánica y razón dialéctica.*

INTRODUCCION AL ESTILO MATEMATICO

JAVIER DE LORENZO

INTRODUCCION
al
ESTILO MATEMATICO

EDITORIAL TECNOS
MADRID

EDITORIAL TECNOS, S. A. - 1971
O'Donnell, 27 - Tel. 2262923 - Madrid-9
Dep. legal: M. 25.751-1971

Printed in Spain. Impreso en España por Hijos de E. Minuesa, S. L. Ronda de Toledo, 24

INDICE

2

PREFACIO

En sentido muy amplio puede considerarse el Lenguaje como un instrumento mediante el cual una persona comunica algo o informa de algo a otra u otras mediante un conjunto de signos y unas reglas para operar con ellos, bajo el estímulo de diversos miembros de un conjunto que pueden denominarse Objetos —pensamientos, vivencias, emociones, cosas, los propios signos...—. Exige el Lenguaje, como mínimo, seis elementos: Emisor, Medio de transmisión y recepción, Receptor, Objetos, Signos, Reglas o convenciones lingüísticas. De ellos únicamente se tendrán en cuenta, en lo que sigue, los dos últimos. Del conjunto de signos, al que cabe dar también como nombres el de Campo, dominio o universo, el Emisor elige, para su mensaje, algunos, teniendo presente las combinaciones a que pueden dar lugar mediante las adecuadas Reglas de transformación. La elección se encuentra basada, en general, en el distinto tipo de estímulo recibido por parte de los objetos, que provoca la necesidad de emitir cierto mensaje utilizando ciertos signos. En esta elección no sólo influye el estímulo consciente; también otras tendencias que pueden no serlo o, al menos, no constituir el estímulo fundamental aparente. Así, quien pretende emitir un mensaje bajo un estímulo puramente conceptual, o que se le presenta como tal, elige ciertos signos, pero el emisor no sólo envía su mensaje en un plano puramente cognoscitivo y está movido por el solo plano conceptual. Lo elige y emite pensando tanto en su mensaje como en un receptor o receptores de aquí y ahora o de un futuro. Lo envía *para* y *espera de*. Por ejemplo, para convencer porque es él quien está convencido de su mensaje, y con él espera influir en el receptor, o receptores, de modo que lo acepte o critique y actúe en consecuencia. Incluso en este mismo plano simbólico pretende el convencimiento o asentimiento dotando al mensaje, por elección que intenta adecuada de los signos señales, de una radical objetividad e impersonalidad, con total ausencia de emotividad o afectividad. Con ello pretende desaparecer como elemento constitutivo del Lenguaje dotándolo de lo que se ha denominado carácter científico. Pretensión que, en su acepción estricta, se muestra como contradictoria en sí, ya que, aparte de que sin Emisor no hay Lenguaje, en el origen se halla, como motivación, bien el deseo de ayuda a los demás, bien una necesidad puramente económica, bien la idea de haber aprehendido la verdad, bien dar constancia a los demás —aunque éste "los demás" sea en número mínimo— de la propia existencia... Motivaciones, en el fondo ajenas a lo estrictamente conceptual, de cumplir ya una satisfacción personal, ya una necesidad vital, ya una necesidad de la colectividad. Motivación última que, en definitiva, es el sustrato común de todas las demás, su origen y destino.

Tanto el emisor como el Receptor se encuentran inmersos en el Campo o universo sígnico, y en el conjunto de objetos. Pero ninguno de ellos puede abarcarlos en su totalidad, aunque se admita su finitud. En general, ambos manejarán ciertos agregados de ambos conjuntos. Además, el campo parece presentar una actividad, vital, íntimamente ligada al carácter vital humano, mero reflejo del mismo. Utilizando una terminología conjuntista se observa que el campo presenta subconjuntos propios, que sirven como campo para otros sublenguajes. Lenguajes, a su vez, en el sentido amplio en que aquí se considera este vocablo. Así existen sublenguajes científicos o meras "terminologías" en el decir de ORTEGA, deportivos, metafísicos... La completa comprensión o conocimiento de una disciplina por parte de un receptor depende estrechamente de su dominio del lenguaje propio de esa disciplina. Ahora bien, estos sublenguajes no son disjuntos. Por lo pronto, contienen gran cantidad de signos del universo o lenguaje usual que constituye, realmente, la casi totalidad de los signos de cada sublenguaje, siendo estos términos comunes en su mayoría a casi todos ellos. Igualmente, como elementos imprescindibles, como categorías, figuran las conectivas proposiciones y los cuantificadores entre los signos comunes a todos los sublenguajes.

En esta pertenencia a la intersección de varios lenguajes se encuentra la posibilidad de equívoco, analogías, ambigüedades, ambivalencias..., además de la propia vaguedad, intrínseca, de muchos términos. El emisor que se encuentra inmerso en un agregado del campo, constituido por elementos pertenecientes a varios sublenguajes, así como inmerso en un subconjunto del conjunto de objetos —con lo cual puede dotar a esos signos o sentirse influido con proyecciones especiales— elige para su mensaje ciertos signos y convenciones. Pero el receptor —aun suponiendo la inexistencia de ruidos o interferencias provocados por el medio de transmisión, y la completa comprensión, igualdad y manejo de las convenciones— puede encontrarse inmerso en un agregado distinto y en un subconjunto de objetos diferentes, pudiendo dotar a los signos que recibe, o sentirse influido por los objetos que le rodean, con una interpretación que no corresponde a la dada por el emisor. Se crea, con ello, confusión en el mensaje y, por consiguiente, en la comunicación. De esta posibilidad de error gozan todos los lenguajes, precisamente por esa intersección común que existe entre ellos. La expresividad, riqueza e importancia de alguno se apoya, sin embargo, en dicha posibilidad. Así, el lenguaje poético; así, el lenguaje político-económico utilizado en ciertos países y determinadas circunstancias. El manejo de las equivocidades, analogías, ambigüedades, se convierte en un Arte. Así, la Poética; así, la Propaganda política. Este mismo hecho es, en un plano que se pretenda estrictamente conceptual, fuente de errores. Errores que para un lenguaje conceptual formal, simbólico, tienen que ser, de modo imprescindible, superados. Dos son las maneras posibles de hacerlo. En una el Emisor debería precisar no sólo los términos que emplea, así como los estímulos que le conducen a utilizarlos, y el manejo de las convenciones con que los utiliza, sino también el lenguaje del que las toma. Esta solución presenta, de hecho, una dificultad. Aparte de que para indicar el lenguaje que va a utilizar el Emisor requiere el empleo de un lenguaje más amplio y, por tanto, más expuesto a error de comunicación e información, los lenguajes parciales no son estamentos de fronteras nítidas, de absoluta y rigurosa delimitación. La precisión exigida no es nada fácil de conseguir con sólo este medio, siempre añorado, de precisar contextos y definir todos los términos que se utilizan. Ciertamente ha sido y es el más utilizado, base además para otras posibles soluciones, y ello porque siempre es preferible intentar la precisión que contentarse con el equívoco. Un segundo procedimiento consiste en construir lenguajes perfectamente delimitados, reducidos en su campo a unos signos que, salvo las constantes lógicas primitivas, sean propios, no pertenecientes a ningún otro lenguaje. Como no es posible esta delimitación con sólo los signos, es preciso construir reglas características, precisas. Construido un lenguaje formal de esta manera, la solución a los problemas del equívoco tanto internos como los producidos en la comunicación, quedan resueltos con ayuda del primero de los métodos. Basta indicar, ya, el lenguaje utilizado.

Este segundo procedimiento es el proceso seguido por el lenguaje matemático en este siglo mediante la axiomatización y la formalización, que ha permitido aclarar y aun resolver algún problema clásico como el sentido del término "verdad". Sin embargo, este proceso encierra, por su parte, fuertes inconvenientes. Entre otros, el de que sólo es posible no ya en la totalidad de un sublenguaje científico, sino sólo en porciones del mismo. Requiere, además, la existencia de otros lenguajes más amplios, metalenguajes, para poder describirlos y poder manejar sus reglas operacionales. Metalenguaje que, en general, no es otro que un sublenguaje más amplio, que a veces exige ser igualmente estructurado, necesitando entonces un metametalenguaje. Por otro lado, arrastra consigo problemas como el del estatuto ontológico o contenido referencial semántico de los signos que utiliza.

Entre los sublenguajes que muestran una característica más conceptual el matemático presenta, en competencia con el lógico, gran cantidad de signos que se convierten en comunes a otros sublenguajes conceptuales. Precisamente la estricta formulación de alguno de éstos se haría imposible sin la previa existencia del lenguaje matemático, del que toman tanto alguno de sus signos como alguna de sus reglas y, sobre todo, el modelo para la propia construcción. Y algún lenguaje no se ha podido estructurar en forma completamente conceptual por no haber encontrado estos elementos en el lenguaje matemático existente, teniendo que construirse éste simultáneamente a la constitución de tal lenguaje. Puede hablarse, así, del lenguaje matemático como instrumento para las demás ciencias, para el conocimiento en general, aunque no en el sentido de mera herramienta, sino de marco y molde para la captación e interpretación de las mismas. No es un instrumento inocuo. Pero, considerado en sí mismo, puede observarse que muchos de sus signos dan lugar a equívocos e imprecisiones por su excesiva dependencia respecto al campo del lenguaje usual, entendiendo por excesiva dependencia el pertenecer a un agregado, mezcla de varias partes de distintos lenguajes y no por modo exclusivo al matemático. El intento de suprimir esas imprecisiones se ha realizado, en el lenguaje matemático, mediante las dos soluciones antes señaladas. Clave ha sido la axiomatización, mediante la previa fijación de los signos y reglas a utilizar. La formalización, el posterior intento de crear un lenguaje estrictamente simbólico, sin intersección alguna con otros lenguajes.

En este contexto, la combinación de los términos 'estilo' y 'matemático' parece, a primera vista, si no contradictoria, al menos sorprendente. Ambos términos se presentan como portadores de connotaciones, de significaciones disjuntas, sin aparentes embotamientos entre sí.

Por un lado, el término *estilo* clava sus raíces en lo que he denominado intersección de varios lenguajes; hace referencia a lo "expresivo" de un lenguaje.

> *La vaguedad del significado es una seria desventaja cuando se necesita precisión; sin embargo, muchos poetas preferirán el claroscuro de las alusiones y las sugestiones, de las tonalidades emotivas y los matices evocadores, a los contornos claramente delineados que no dejan campo para la imaginación del lector* [1].

Se puede aceptar que el estudio del estilo, la estilística de una lengua no sea otra cosa que la clasificación y valoración de los elementos "expresivos" de la misma. Elementos expresivos que, desde un plano literario, no son otros que los queridos por ANDRÉ GIDE: equilibrio, ritmo, armonía. En otras palabras, tonalidades emotivas, énfasis, ritmo, simetría, eufonía, elementos evocativos... Elementos todos contrapuestos a lo que, en un sentido muy amplio, se suele denominar Lógica. De aquí la posible adopción de las palabras de FERNÁNDEZ RETAMAR:

> *La estilística es el estudio de lo que haya de extralógico en el lenguaje* [2].

O también, en la misma línea, aunque su enfoque se pretenda más científico, las de G. MOUNIN:

> *La estilística debe ser el estudio científico de las propiedades lingüísticas que un lenguaje posee* de más *cuando cumple una función poética o literaria o, más ampliamente, estética (aparte de su función comunicativa habitual)* [3].

---

[1] S. ULLMANN: *Lenguaje y estilo*. Ed. Aguilar. Madrid, 1968, p. 286.
[2] *Idea de la Estilística*. La Habana, 1958, p. 11.
[3] *Claves para la lingüística*. Ed. Anagrama. Barcelona, 1969, p. 126.

Frente a estas connotaciones del término estilo, el término *matemático* presenta significaciones que hacen referencia a la vertiente estrictamente conceptual de la lengua. Los valores expresivos antes señalados y los instrumentos lingüísticos como, por ejemplo, la sinonimia, que permiten la consecución de los mismos, parecen encontrarse ausentes de su ámbito referencial, que se ahínca en la pureza de un sublenguaje individual con pretensiones de fronteras fijas, claramente delimitadas, y por las cuales pretende carecer de esas funciones poéticas o literarias, estéticas, que se muestran fundamentales para poder hablar de estilística. En el lenguaje matemático se huye, precisamente, del empleo de tales instrumentos como la sinonimia porque la elección de términos sinónimos, y, por tanto, de estructura lingüística diferente, aunque conteniendo aproximadamente la misma información, dota con cargas de expresividad distintas a una misma frase. Se corre el riesgo de que esas distintas cargas expresivas y esos contenidos "aproximados" de información provoquen equivocidades, ambigüedades o vaguedades tanto en la expresión —que no refleje fielmente el pensamiento— como en la interpretación de la misma —que el intérprete se encuentre en ambiente referencial distinto respecto a esas cargas expresivas—.

Desde otro plano se ha querido ver una total disjunción entre ambos términos. Desde el plano que considera a la lengua como algo vivo frente a la terminología científica o nomenclatura. Como si tal terminología no estuviera incluida en la lengua y permitiera, precisamente, el pensamiento científico, no menos imaginativo y creador que el literario, y sus términos no fueran también algo vivo, en permanente estado de creación, destrucción, cambio de sentidos... En este aspecto puede citarse la frase de EUGENIO D'ORS:

> *El lenguaje es vida y las normas lineales y matemáticas fracasan ante su palpitante realidad*[4].

O las afirmaciones de ORTEGA Y GASSET cuando contrapone la terminología a la lengua:

---

[4] Glosa de 1934 incluida en "El católico errante", *Nuevo Glosario*, v. III. Ed. Aguilar, Madrid, 1949, p. 42.

Una lengua es un sistema de signos verbales merced al cual los individuos pueden entenderse sin previo acuerdo, al paso que una terminología sólo es inteligible si previamente el que escribe o habla y el que lee o escucha se han puesto individualmente *de acuerdo sobre el significado de los signos. Por eso la llamo pseudolengua y digo que el hombre de ciencia tiene que comenzar por traducir su propio pensamiento a ella... Tan es así que estos libros parecen herméticos, ininteligibles o por lo menos muy difícil de entender a los hombres que hablan la lengua auténtica en que aparentemente están escritos.*

... En lo dicho hasta aquí me he limitado a fundar el utopismo del traducir en que el autor de un libro no matemático ni físico, ni, si usted quiere, biológico, es un escritor en algún buen sentido de la palabra. Esto implica que ha usado su lengua nativa con un prodigioso tacto, logrando dos cosas que parece imposible cohonestar: ser inteligible, sin más, y a la vez modificar el uso ordinario del idioma [5].

Modificación en la cual se encuentra, precisamente, la clave para hablar del estilo, tanto del personal de autor como del propio de la lengua en la cual se encuentra inmerso. Como líneas antes precisara ORTEGA:

Escribir bien consiste en hacer continuamente erosiones a la gramática, al uso establecido, a la norma vigente de la lengua [6].

De aquí se obtiene, de modo inmediato, la incompatibilidad que se presentaría en la conjunción de los términos 'estilo' y 'matemático'.

Ambos planos realizan una disección algo tajante que pasa por las fronteras del Arte y el Conocimiento, que se pretenden radicalmente disjuntos. El Estilo hará referencia al Arte; la Matemática, al Conocimiento. Todavía con mayor claridad lo expresa ROGER GARAUDY, por el trasfondo que implican sus palabras:

El arte —que es una forma del trabajo, *y no una forma del* conocimiento— *no constituye, por lo tanto, sólo un reflejo o una imitación de la naturaleza, sino, ante todo, una creación del hombre* [7].

[5] *Miseria y esplendor de la traducción.* O. C. V., Rev. de Occ. pp. 434-5.
[6] *Op. cit.*, p. 434.
[7] *Estética y marxismo,* p. 18. Ed. Martínez Roca. Barcelona, 1969.

Ahora bien, parece como si el lingüista partiera de un axioma, implícito: Existe algo que comunicar con realidad objetiva —sea la realidad material a describir, los pensamientos, afectos, etc.— real, pero a través de un prisma interpuesto por la lengua ante cada individuo. Para cada hombre, los términos con los cuales bautiza esos afectos o experiencias producen unas connotaciones diferentes a cualquier otro hombre. Y en esa distinta connotación individual, propia de cada sujeto, se encuentra la capacidad para producir arte y, con él, para poder hablar de estilo. Que sería el reflejo, la impronta que un individuo plasma en el mensaje que realiza. Por el contrario, la terminología o nomenclatura científica se muestra como una lengua muerta ante la cual no cabe la posibilidad de individualismo interpretativo, porque sus términos carecen de las mismas connotaciones que en el caso anterior. Son válidos para todo individuo y en todo tiempo, o al menos durante el tiempo en el cual se ponen de acuerdo previamente. Pasa, así, a ser "conocimiento" y no arte, en el sentido de ser mera aprehensión de la naturaleza. Carece, pues, de capacidad de producción de finalidad estética alguna.

Las dicotomías hombre-naturaleza, creación-conocimiento son, realmente, artificiales. Momentos de un mismo proceso. Todo conocimiento es, también, creación humana. Y, como tal, hay que aceptar que, en su propia expresión, existe la posibilidad artística, el darle un contenido estético marginado a su propia función comunicativa conceptual. Por otro lado, apoyarse en el subjetivismo individualista de que cada individuo posee una carga afectiva propia respecto a cada experiencia y afecto, descartando de ese subjetivismo que también pueda tener la misma carga afectiva en experiencias o con términos de una disciplina científica, se muestra como algo arbitrario. De hecho, en la Matemática, aunque en un sistema formal se carezca, o se quiera carecer, de contenido eidético alguno, cada individuo dota a los elementos que maneja con las mismas cargas afectivas que el individuo poeta, por ejemplo. Lo que quizá se logre, con el paso a una nomenclatura, es el hacer partícipe al mayor número posible de miembros de la comunidad humana de unas mismas connotaciones, universalizarlas. Ello implica también una función electiva de los medios expresivos. De aquí que al hacer referencia a las connotaciones del término 'matemático' no se pueda evitar, por imposible, el señalar que huye, por ejemplo, del empleo de la sinonimia y de los valores expresivos que la misma permite. Lo cual no revela otra cosa que una connotación de valor expresivo, precisamente; no otra cosa que una selección expresiva —sea o no impuesta por la materia o contenido propio de lo que se entiende por Matemática—, y, por lo tanto, perteneciente a lo que he considerado ámbito referencial del término 'estilo'. Prueba clara de que existe embotamiento entre ambos términos y no incompatibilidad.

Si frente a los peligros que la intuición sensible supone para el pensamiento matemático y su reflejo expresivo se reaccionó en los primeros años del siglo actual queriendo situar a la Matemática como disciplina estrictamente formal, sintáctica, superada esta fase, hay que admitir que en la Matemática coexisten tanto el elemento lógico como el intuitivo. La contraposición o equilibrio de ambos elementos, dota de carácter expresivo especial, propio, a la Matemática considerada como sublenguaje. El estudio de este equilibrio, de la contraposición entre intuición y formalización, entre rigor e intuición, pertenece por entero a la Estilística, considerada como elemento propio apto para caracterizar una obra, un período cultural.

En su forma externa la Matemática ha utilizado y utiliza, junto al lenguaje ordinario o usual, un conjunto de signos propios de muy difícil, por no decir imposible, transcripción tanto oral como escrita. Dificultad que ha ido en aumento —precisamente por su deseo de organizar un sublenguaje con fronteras nítidamente delimitadas respecto a los demás sublenguajes— hasta llegar a un grado tal que, en el momento presente es casi imposible seguir un razonamiento matemático algo largo sin la introducción *escrita* de dichos signos. Se podría considerar que ésta es una dificultad de carácter psíquico, individual. Sin entrar en discusiones, lo único que podría indicarse es que, de modo efectivo, hay matemáticos que, como GALOIS o POINCARÉ "razonaban" de memoria, pero su plasmación *tenía* que ser escrita a más corto o largo plazo. En cuanto a lo que aquí interesa —la Matemática como obra de creación, de trabajo humano— sin la escritura no habría sido posible. La Matemática es una lengua esencialmente escrita, no oral. De aquí la total ausencia de alguno de los valores expresivos que antes he indicado como propios de la obra literaria. Así, la eufonía, por ejemplo. La correlación entre lenguaje ordinario y un lenguaje artificial de signos propios, reflejada en la expresión lingüística, plantea problemas muy diversos, como el de la posibilidad o no de que la originalidad expresiva de un autor individual quede o pueda quedar ahogada por el empleo de un cálculo simbólico que, si bien permite una gran facilidad comunicativa, una universalización del lenguaje matemático, impide el reflejo expresivo estrictamente original, envuelto en una tendencia al estilo universal.

Pero si la matemática es una lengua, una lengua bien hecha como quería POINCARÉ parafraseando a CONDILLAC, es una lengua construida por el hombre, como lo es el lenguaje del cual forma parte. A pesar de su intento de máxima objetividad, quedan elementos que permiten indagar el tipo psicológico del autor individual. Terreno es este, sin embargo, que presenta muy fuertes diferencias con el estudio del carácter, de la psicología de un autor literario. La Matemática es obra social, no individual. Y ello en el sentido de que si bien los aportes se han mostrado como individuales, son aportes a una obra colectiva, y no de una generación o de un país, sino de todos los hombres. Hasta el extremo de que permite realizar tratados como los *Elementos de Matemática* que, firmados por NICOLÁS BOURBAKI, general de la guerra francoprusiana, se redactan por un grupo bastante numeroso de matemáticos franceses, suprimida de raíz toda distinción individual. Cada época tiene, ciertamente, su propio enfoque, su expresión caracterizadora. Pero los resultados obtenidos se despojan de estas notas circunstanciales de tiempo para quedar englobados en una obra común. Material fungible pierde, además, todo valor, salvo el recuerdo histórico, para las generaciones siguientes. Al despojar de esa circunstancia a unos resultados concretos el matiz expresivo propio de un autor, de su época, desaparece. Y no sólo en un plazo breve de tiempo. Consecuencia de este fenómeno de trabajo colectivo, de la fungibilidad del mismo, el propio autor intenta despojarse de cualquier nota circunstancial, sabedor inconsciente, o incluso consciente, de que cuanto menor sea su número mayor contribución "objetiva" logrará en la ciencia en la cual trabaja. Lo importante, en él, no es su capacidad expresiva individual, la forma personal en la cual se exprese, sino el contenido de su mensaje, la información objetiva del mismo. Se amoldará, por ello, a la "forma expresiva" generalizada, al estilo que en su momento sea más universal. Y ello porque el matemático ha de arrancar de lo ya hecho, tanto antes como en su propio momento. No puede desconocerlo. Pero eso mismo le sitúa como coronando la historia: integra todo el pasado en su obra para que esta pueda proseguir. Y a pesar de que puede ser un solitario social, al margen aparente de la realidad material, es él un auténtico conjunto de relaciones sociales porque es responsable, en su individualidad, de todo el porvenir. Aunque esa misma individualidad quede suplantada, en la obra, por el intento de que ésta no le refleje a él como individuo, sino que sea mero reflejo de la obra misma. A pesar de lo cual, la clasificación de los matemáticos querida por POINCARÉ en intuitivos y lógicos —y que no es otra que la de PASCAL en espíritus de fineza y espíritus geométricos o matemáticos— se refleja en la estructura de su razonamiento, aunque quizá no en la plasmación expresiva del mismo. Podemos contar con aquellos matemáticos creadores que, al razonar intuitivamente, como "si vieran" los elementos de su razonar, quizá lo plasmen en expresiones con frecuente uso de imágenes o elementos geométricos, de comparaciones de carácter mecánico; otros hay que razonan con puras relaciones y la plasmación de las mismas será estrictamente conceptual, apoyada como máximo en diagramas de carácter lógico más que intuitivo. Pero caben reservas en cuanto al éxito de una labor crítica en este terreno. Una cosa es lo "que" se piensa y "cómo" se piensa y otra muy distinta el "cómo" se expresa. Lo que se piensa y cómo se piensa puede realizarse mediante imágenes incluso sensibles, intuitivas, pero la fase última expositiva puede ser estrictamente formal o al menos semiformal. Un estudio de este tipo no podrá dar nunca valor dogmático, absoluto, a sus resultados. Por todo ello, en este estudio, no se entra en este terreno, uno de los más ricos de la Estilística en su enfoque literario, aunque en algún momento y autor se toque de pasada. Se hace el estudio desde un enfoque que puede considerarse externo. Se busca la *forma* en la que se expresa el matemático, condicionado por su época, pero en función de la época siguiente, de la repercusión que dicha forma tiene ante el matemático de la generación o generaciones siguientes.

En cuanto a las formas expresivas utilizadas por el matemático se tratarán muy brevemente. Para ello se condensan en tres niveles: Lenguaje de creación, Lenguaje de exposición, Lenguaje de divulgación. El primero puede reflejarse en diarios, cartas, ensayos breves, que atienden fundamentalmente a dejar constancia de la idea obtenida, al esquema, que a veces ni siquiera lleva esbozos de demostración. El expositivo encierra ya el libro, ya el ensayo, con un mayor cuidado expresivo, con el reflejo de una tendencia al estilo universal, semiformal. El de divulgación, como puede ser el libro de iniciación o de texto, al buscar un más amplio público, aunque sea de muy alta iniciación al exponer teorías originales de un autor o escuela, adopta como notas características las propias de toda obra didáctica, como son la claridad, sencillez, concisión...

* * *

En cuanto al trabajo que sigue parece oportuno precisar varios puntos.

1. Sólo he encontrado un artículo con explícita referencia al Estilo matemático. Es de C. CHEVALLEY, y fue publicado en 1935 en la *Révue de métaphysique et de morale,* comprendiendo diez páginas, 375-384, de las cuales sólo tres se dedican, auténticamente, al estilo. Y para ello, únicamente al estilo que CHEVALLEY bautiza con el nombre de "estilo de los ϵ". En algunos otros trabajos, escasos, he encontrado mención de ambos términos, pero, en todos ellos, mención del tipo "sería interesante estudiar el estilo matemático...". Un "sería interesante" descorazonador, para lo que se pretende tan interesante, que no llega a superar el interés del trabajo en el cual se menciona, que no merece más atención que la cita y el deseo, sin estudio efectivo, pasando de largo.

2. Aunque parte de este ensayo se hilvane con la Historia de la Matemática, conviene señalar que no se hace en él tal historia. La perspectiva histórica está condicionada por la búsqueda del Estilo matemático y sus variaciones. Así, por ejemplo, al hablar de simbolismo algebraico no se entra en discusiones sobre la influencia o no de VIETA o STIFFEL sobre DESCARTES; ni se menciona casi la polémica entre LEIBNIZ y NEWTON y seguidores acerca de la invención del Cálculo, etc. Ello importa desde un enfoque rigurosamente histórico; lo que importa, aquí, es resaltar que las consideraciones sobre tal simbolismo van a determinar en gran medida el Estilo de una cierta matemática. Tampoco se desarrollan temas que, conexos con el Estilo en el enfoque dado, podrían ser de amplio tratamiento, como los sugeridos por el desarrollo del formalismo.

Para aquél que conozca la Historia de la matemática debo indicar otro punto. Esta disciplina, en general, se ha visto y se ve con un enfoque estrictamente historicista, evolutivo. Cada época de la Matemática se considera como un subproducto de la anterior, pero unido a ella como un organismo vivo, perteneciendo ambas a tal organismo en permanente evolución y desarrollo, orgánico. De tal forma se ha visto a la Matemática como si fuera un individuo; cada una de sus etapas, un momento de su desarrollo. Nada más alejado de la realidad. Aunque este ensayo, al no ser una historia, no sea el lugar oportuno para demostrar esta negativa, podrá observar quien lea con atención Los Estilos, que la Matemática crece por yuxtaposición, dialéctica y no orgánicamente. Existen varios tipos de Matemática, sin más enlace entre ellas que el ser producto del espíritu humano. Cada época tiene sus enfoques y temática propios, que pueden ser, incluso, variados dentro de ese instante histórico. Y sólo cuando tanto desde una temática y desde unos enfoques determinados puede observarse *con replanteamiento nuevo* lo conseguido en otra época anterior, se incluye en el nuevo edificio.

3. Aunque ello sea intrínseco a todo intento clasificatorio, debo señalar que los tipos de estilo matemático que indico y estudio no pretenden ser completos, exhaustivos. Quizá puedan existir otros, ser más ampliamente tratados. Respecto a lo primero, puedo indicar únicamente que no los he visto y, por ello, no he podido tratarlos. Respecto a lo segundo, entra en la arbitrariedad electiva del autor, no para todos acertada.

4. Parece oportuno destacar un hecho que se refiere al lenguaje con el cual está redactado este libro. Es un lenguaje que pudiera denominarse clásico. Bastaría sustituir en el punto 2 anterior, por ejemplo, los términos de "enfoque histórico" por "enfoque diacrónico" y otros semejantes, y decir que este libro pretende calas sincrónicas para determinar la estructura de un estilo determinado —"la forma en la que se expresa el matemático", página 21— sin olvidar que tales estructuras, cerradas en sí, quedan hilvanadas por un proceso dialéctico, para convertir el libro en una obra de tesis, en un intento de coordinar el método estructural con el método dialéctico. Es tesis que sólo se explicita en este punto, pero que se encuentra subyacente en toda la obra, con el intento, además, de que tal tesis pueda exponerse en términos clásicos y no

enladrillados con los vocablos de moda. Aunque vuelva a citarse en un momento oportuno se puede suscribir la afirmación de BARROW:

> *... se podría alargar por un discurso apagógico, pero ¿para qué?*

5. Finalmente, suele ser norma, en todo trabajo de este tipo, encontrar la expresión de agradecimientos y el reconocimiento de influencias. Del primer punto tengo que decir que este libro pudo escribirse, en parte, gracias a una Pensión de Literatura "Juan March" correspondiente al año 1966. De lo segundo, la influencia explícita la menciono todas las veces que puedo; procede, siempre, de ensayos o libros, únicos interlocutores en este trabajo. En los demás casos, en toda la estructura, tendría que señalar que se debe en parte a mi esfuerzo personal, y en parte al sedimento que toda lectura prolongada, constante, deja en el lector, quien, a veces, llega a considerar como suyas ideas expresadas quizá en esas lecturas.

EL SIMBOLISMO

Considerada la Matemática como lenguaje, el conjunto de Signos que lo componen se presenta dividido en dos subconjuntos. Por una parte, términos que tomados aisladamente o incluso en semifrases, poseen un sentido, un significado —único o múltiple— para el lector no matemático. Por otra, términos, signos y figuras especiales que, para el profano, se muestran como imposibles de traducción o representación en el subconjunto anterior, carentes para él de referente semántico alguno. Es esta mezcla la que posibilita la afirmación antes citada de ORTEGA Y GASSET de la ininteligibilidad del escrito matemático. En gracia al estilo, y por un abuso del lenguaje, voy a denominar Lenguaje usual u ordinario al primero de los subconjuntos señalados, y al subconjunto de términos, signos y figuras especiales, Lenguaje artificial o propio de la Matemática. El usual u ordinario está compuesto de "palabras", de característica fonética fundamentalmente, como la gran mayoría de los elementos del conjunto de Signos que constituyen el Lenguaje general. El artificial se compone tanto de "palabras" en el sentido anterior, aunque en proporción mínima, como de símbolos ideográficos, artificialmente construidos o elegidos por el matemático.

Ambos lenguajes tienen sus papeles propios. El ordinario o usual presenta una muy clara misión: ser el vehículo o instrumento práctico que permite indicar cómo han de manejarse los elementos del lenguaje artificial; cómo han de interpretarse, posteriormente, tanto los términos como los signos y las figuras de este último.

El papel del Lenguaje artificial no aparece tan claro. Dos son las posturas que en general se han mantenido en cuanto a su función. Por un lado, considerarlo como esencialmente innecesario, aunque en la práctica sea conveniente, pero sólo en cuanto elemento abreviador y no como elemento propio, independiente dentro del edificio matemático. Este puede ser construido, en última instancia, sin recurrir a él, o en todo caso, cabe la posibilidad de traducción de tal edificio a términos del lenguaje usual sin perder potencia ni ganar ambivalencia alguna. Por otro lado, considerarlo como el elemento básico de la Matemática, hasta el extremo de ver en el ideograma, en el símbolo artificial la esencia de esta disciplina y considerar al lenguaje usual como un estorbo para su adecuada construcción; estorbo que, por ello mismo, debe ser eliminado. Ambas son posturas extremas.

Necesidad del Lenguaje artificial.

Frente a la primera cabe señalar que sea o no el signo gráfico, el signo artificial, en su origen, abreviatura del lenguaje ordinario su existencia es imprescindible para la Matemática al igual que para toda otra ciencia. Unicamente por la constitución de un lenguaje especial junto al ordinario, pero separado de éste, se ha llegado a organizar la Matemática como disciplina científica. La necesidad del ideograma, del simbolismo artificial ha sido muy ampliamente afirmada. Se pone, como ejemplo, el caso del signo cero para mostrar la potencia del artificio. De los argumentos utilizados para tal afirmación destaco, en principio, los siguientes:

1. *Delimitación de sublenguajes.*

Es el ya dado con anterioridad de que todo término del lenguaje pertenece a varios sublenguajes distintos. Posee, por ello, cargas de ambigüedad, vaguedad, imprecisión, etc., que son fuente de error inevitable. La existencia del signo ideográfico permite superar dichas cargas al dotarle, si es preciso, de un referente único, perfectamente delimitado. El lenguaje artificial se convierte en ese instrumento delimitador del sublenguaje matemático respecto a los restantes sublenguajes del Lenguaje general.

2. *Capacidad generalizadora.*

El lenguaje artificial, al estar desprovistos sus elementos de referente semántico —o, de poseerlo, único— permite obtener generalizaciones imposibles de alcanzar en el lenguaje ordinario. Es característica esencial de la ciencia, que es tal ciencia sólo cuando supera el estadio de particularización.

Ejemplo ya clásico se encuentra en el paso de la Aritmética, incluso como *álgebra numerosa,* en el decir de Vieta, al Cálculo algebraico. Ambos permiten resolver, por ejemplo, problemas de la vida ordinaria, pero la primera sólo versaba sobre tales temas y además sobre casos particulares, individuales. Así, encontramos en DIOFANTO de Alejandría —por otro lado uno de los primeros matemáticos occidentales en el manejo de lo que puede considerarse como cálculo algebraico— un problema como el siguiente:

> *Uno compra dos calidades de vinos, una a 8 dracmas el congio, la otra a 5 dracmas. El precio que pagó está dado por un cuadrado tal que agregándole un número (60), se obtiene otro cuadrado, cuyo lado es la suma de las cantidades compradas de los dos vinos. ¿Qué cantidad de cada uno de los dos vinos fue adquirida?* [1].

Cada uno de estos problemas exige un planteamiento y solución propios, particulares, sin quedar englobados en método general alguno, válido para todos y cada uno de ellos. Es el razonamiento aritmético, de gran ingenio, pero de nula potencia estrictamente científica. Sólo la analogía con otros problemas del mismo tipo ayuda al aritmético en su trabajo. Sin embargo, desde un enfoque algebraico, el problema antes citado equivale a resolver un sistema indeterminado de tres ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ 8x + 5y &= t^2 \\ t^2 + 60 &= z^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

A este sistema puede llegarse mediante enunciados del mismo tipo del citado de DIOFANTO aunque referentes a otras cuestiones de la vida ordinaria. Engloba, así, una infinidad de tales problemas, que pueden quedar resueltos de manera mecánica, ya que el sistema (1), algebraicamente, posee un algoritmo de decisión para obtener sus soluciones.

De esta forma, el Cálculo algebraico, que no es otra cosa, en el fondo, que un primer intento de Cálculo formal —con *signos* propios como x, $+$, $.$, $=$, las cifras..., y una *sintaxis* dada por reglas para operar con esos signos, y que no son otras que las de equivalencia que permiten "pasar de un miembro a otro", "multiplicar por una misma expresión los dos miembros", las que establecen la

---

[1] *Aritmética*, Libro V, 30. Tomado de J. A. SÁNCHEZ PÉREZ: *La Matemática en Grecia, India y Roma*. C.S.I.C. Madrid, 1947.

suma o diferencia de términos semejantes, etc., además de las reglas lógicas—, puede aplicarse tanto a problemas de la vida ordinaria, como el citado en el ejemplo anterior, o los clásicos de móviles, descuentos..., como a problemas de otras disciplinas como la Mecánica, Biología, Psicología...

Ello ocurre con toda la Matemática, y no sólo con el Cálculo algebraico en su versión primitiva, en cuanto se aleja de la formulación particular del lenguaje ordinario y crea un simbolismo o lenguaje artificial propio con su sintaxis correspondiente, mediante el cual pone de manifiesto la estructura subyacente a todo un conjunto de problemas o casos particulares.

3. *Concisión y simplicidad.*

Puede citarse el extraño caso de la resolubilidad de la ecuación de tercer grado, descubierta por NICOLÁS TARTAGLIA y comunicada a GEROLAMO CARDANO en tercetas. Especie de reglas mnemotécnicas, las reglas dicen:

1. a) *Quando ch'l cubo con le cose apresso,*
b) *Se agguaglia à qualche numero discreto*
c) *Trouan dui altri, differenti in esso.*

d) *Dapoi torrai, questo per consueto,*
e) *Ch'l lor produtto sempre sia eguale*
f) *Al terzo cubo, delle cose neto.*

g) *El residuo poi suo generale*
h) *Delli lor lati cubi, ben sottratti*
i) *Verrá la tua cosa principale.*

2. *In el secondo, de contesti atti;*
Quando ch'l cubo restasse lui solo,
Tu osserverai quest'altri contratti,

Del numer farai due, tal part'à uolo,
Che l'una, in l'altra, si produca schietto,
El terzo cubo della cose in stolo;

Delle qual poi, per comun precetto,
Torral li lati cubi, insieme gionti
Et total somma, sara il tuo concetto;

3. *El terzo, poi de questi nostri conti,*
Se solue col secondo, se ben guardi
Che per natura son quasi congionti

Questi trouai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecent'è quattro è trenta;
Con fondamenti ben saldi, e gagliardi.

Nella Città del mar' intorno centa.

Los casos planteados por TARTAGLIA son tres: 1. Cubo más cosas igual a número; 2. Cubo igual a cosa más número, y, finalmente, 3. Cubo más número igual a cosa. Si representamos "cosa" por un signo como "x", el cubo será x^3, y más simple y concisamente expresados los tres casos serán:

1. $x^3 + px = q$
2. $x^3 = px + q$
3. $x^3 + q = px$

Las tres primeras tercetas dan la solución del primer caso, que seguida verso a verso es la siguiente:

a) $x^3 + px$
b) $=q$
c) $u - v = q$
e) $u\,v =$
f) $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$
g)-h) $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$
i) $= x$

La regla para el segundo caso puede ser expresada ya directamente en la forma

$$x^3 = px + q \;,,\; q = u + v \;,,\; uv = \left(\frac{1}{3}\,p\right)^3 ,,\; \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = x$$

Desde un aspecto puramente matemático el interés de las tercetas de TARTAGLIA se centra en haber descubierto —tras noticias de haberlo hecho DAL FERRO, que nada dejó publicado ni manuscrito— la solución de la ecuación de tercer grado siempre que ésta posea raíz real positiva. Es a la que hace referencia el primer caso, siempre resoluble. Lo que no ocurre con los otros dos que enuncia. En el segundo caso la regla puede fallar, como CARDANO puso de manifiesto con el "caso irreducible", producido cuando se verifica $27\ q^2 < 4\ p^3$. Pero es el tercero el que muestra una oscuridad total: o no es aplicable la regla por presentarse el "caso irreducible" o en caso contrario, es decir, con $27\ q^2 \geqslant 4p^3$, la única raíz real de la ecuación es negativa, y al no ser admitidos los números negativos en esta época, carece de solución y, por lo tanto, de aplicabilidad la regla. La oscuridad del texto es casi completa. Además, las tercetas utilizadas por TARTAGLIA se ven impotentes para la resolución "general" de las ecuaciones de tercer grado. Y, sin embargo, ha utilizado, por una parte, demasiadas palabras; por otra, muy pocas palabras, y siempre, excesivamente complicadas. Concisión y simplicidad ausentes en su texto, a pesar de ser reglas de carácter mnemotécnico. Y hay que observar que, en todo caso, TARTAGLIA se ve forzado a admitir términos como "cosa", "número", "cubo", etc., y utilizarlos con un sentido "artificial", no propio del lenguaje ordinario, sino del estrictamente matemático.

El ejemplo anterior es, ciertamente, un caso extremo. Sin embargo, la difusión característica del lenguaje ordinario también puede verse en EUCLIDES, quien a pesar de su estilo ejemplar, se muestra excesivamente farragoso y prolijo, así como en todos aquellos matemáticos anteriores a la existencia de un simbolismo adecuado o que, coetáneos al mismo, no se deciden a su empleo sistemático.

Frente a reglas mnemotécnicas como la anterior o frente al amplio lenguaje euclídeo o pascaliano, el lenguaje artificial permite realizar una gran concisión expresiva que implica, simultáneamente, una gran simplicidad. Y con ello, naturalmente, economía del pensamiento. Gracias a la traducción algebraica un problema aritmético, por ejemplo, permite ser resuelto de manera casi mecánica, sin necesidad de utilizar excesivo ingenio, que puede invertirse en la búsqueda de otros métodos resolutivos. La concisión y simplicidad expresiva que se gana con el empleo del símbolo repercute, de esta manera, en el argumento 2, de posibilidad generalizadora.

4. *Capacidad inventiva.*

Al ser la Matemática un sublenguaje, es una actividad realizada por el hombre. Si éste, en muchas ocasiones, se deja guiar en su razonamiento no sólo por las palabras en su sentido fonético, sino por los signos con que las está plasmando en su redacción, hasta el extremo de que para algún escritor influye tanto el signo escrito como la imagen sonora mental, también el matemático se deja arrastrar en su razonamiento por la forma del signo artificial o sus combinaciones. Y quizá en un grado mayor. Es en éste sentido en el que se puede afirmar que el signo artificial propio de la Matemática es creador. Tanto por su forma aislada o combinada como por las reglas para operar con ellos.

Históricamente se puede avalar esta última afirmación señalando el hecho de la admisión del número complejo en la Matemática. CARDANO los admite porque así lo muestran los cálculos que, pasando por expresiones "carentes de sentido" como $\sqrt{-1}$, hacen llegar a la solución real esperada. En posición extrema, LEIBNIZ los admite porque

> *tienen de admirable que, en el cálculo, no envuelven nada de absurdo o contradictorio y, sin embargo, no pueden ser presentados en la naturaleza de las cosas* seu in concretis... *si tales cantidades imaginarias no fueran dadas en el cálculo sería imposible instituir cálculos generales, es decir, encontrar valores comunes a los posibles y a los imposibles, que no difieren más que por la explicación de las letras* [2].

En búsqueda de un referente, LEIBNIZ los ha de calificar como

> *especie de anfibio que no es el ser, ni el no ser* [3].

En cuanto a la forma en sí de los símbolos y de las fórmulas en las que entran a formar parte, permite el descubrimiento de analogías, apreciar simetrías concretas y semejanzas, que el lenguaje ordinario deja ocultas. En esta apreciación interviene de modo efec-

---

[2] Tomado de JACQUES RUYTINX: "Logique leibnizienne et philosophie contemporaine". Memorias del XIII Congreso Int. de Filosofía. México, 1964, tomo V, p. 317.

[3] En LE LIONNAIS: *Les grands courants de la pensée mathématique*, París, 1948, p. 465.

tivo el factor estético de la Matemática. La búsqueda de la belleza de una fórmula, de una demostración, es siempre un elemento subjetivo, pero es búsqueda que existe en todo matemático, y que en algunos momentos ha permitido crear nuevos campos de investigación. La simple colocación de los términos en una ecuación —ocasión habrá de hablar de ello— a partir de DESCARTES, permite la clasificación de las ecuaciones y, consecuentemente, de las curvas que con ellas se ligan. Citando a COHEN-NAGEL:

> *la introducción del desplazamiento dieléctrico por Maxwell y el subsiguiente descubrimiento de las ondas etéreas se deben todos directamente a la sugestión de los símbolos*[4].

Igualmente el factor de simetría en la matriz de las ecuaciones de LORENTZ condujo a POINCARÉ a su formulación definitiva... Se podría continuar.

Es la percepción de analogías entre estructuras al parecer distintas uno de los principios fundamentales de la invención matemática. Pero el descubrimiento de tales analogías se debe a que dichas estructuras son, formalmente, idénticas, aunque el ropaje con el cual quedan revestidas por el lenguaje ordinario impide la percepción de tal identidad, sólo puesta de relieve cuando se formulan en símbolos artificiales que dejan al descubierto el esqueleto o armazón de las mismas. Teorías como la de las fuerzas, velocidades, rotaciones, torbellinos, etc., desarrolladas independientemente, mostraban, en el fondo, una armadura común, la que permitía su estudio a partir del concepto de vector. Sólo cuando se estudió el razonamiento seguido en las mismas pudo comprobarse que era el mismo, con total independencia de los elementos a los cuales se referían y que el lenguaje ordinario mantenía. Despojado de tales referencias, quedaba una teoría más general, la de vectores, sin referente concreto y que había que desarrollar de manera independiente, apoyada en el manejo de sólo el símbolo. Análogamente, las series de FOURIER podían mostrar todo su valor en cuanto se despojaban de la referencia original, de su primitiva explicación de los fenómenos calorimétricos, y pudo aplicarse a otros campos como el tan actual de la Teoría de la información. La Matemática se encuentra

---

[4] COHEN-NAGEL: *An introduction to logic and scientific method.* Nueva York, 1934, p. 120.

llena de estructuras obtenidas, creadas por este tipo de generalización abstractiva, apoyada de modo esencial en la formulación simbólica, única que ha permitido el descubrimiento de analogías formales [5].

LA MATEMÁTICA, ¿MERO SIMBOLISMO?

Si las consideraciones anteriores suponen que el signo artificial, el símbolo es necesario para la Matemática, no deben implicar posición extrema opuesta, aquella que ve en el lenguaje artificial la esencia única del lenguaje matemático.

La Matemática, en su perfección, únicamente sería una combinación de signos artificiales, dados en número muy pequeño, fijado de antemano, sin resto alguno de lenguaje ordinario. Este vocabulario iría acompañado de una sintaxis propia, compuesta de un número, también fijo y muy restringido, de reglas que indicaran cómo se combinan los elementos de ese vocabulario. Esta idea ha sido expresada por PHILIP JOURDAIN:

> *Lo que un matemático tiene siempre presente, aquello a lo que siempre aspira, es a elaborar unas leyes de cálculo y un simbolismo conveniente.* Esas *son* sus *cosas* [6].

JOURDAIN ha retomado la "boutade" de RUSSELL, al que por otro lado seguía admirativamente, explicadora de una toma de posición de carácter filosófico previo en torno a la naturaleza de la Matemática, como mero cálculo sintáctico formal, carente de referente sus signos, dejando en el aire la adecuación o no de la Matemática con la realidad y la explicación de su potencia instrumental respecto a ésta:

> *Las matemáticas pueden definirse como la materia en la que nunca sabemos de lo que estamos hablando ni si lo que decimos es cierto.*

---

[5] Cfr. M. FRÉCHET: *Las Matemáticas y lo concreto.* México, 1958.

[6] *La Naturaleza de la Matemática.* Contenido en la Antología *Sigma* realizada por James NEWMAN, vol. I, p. 376 de la versión española. Ed. Grijalbo. Barcelona, 1968.

Es un ideal utópico, irrealizable. Como tal ideal, perfecto, ya que los signos serían tales que no dejarían lugar a equívoco alguno, por carecer de contenido semántico y estar manejados y definidos de manera unívoca, perfecta, mediante las reglas sintácticas. Sin embargo, hay varias razones que invalidan esta pretensión exagerada. En primer lugar, y aunque se argumente que las reglas se dan en número mínimo y de una vez por todas, la sintaxis necesita ir enunciada en un lenguaje de nivel superior al del vocabulario, es decir, las reglas de este cálculo formal han de estar dadas en un lenguaje en el cual los signos se nombren, pero no se usen. Y este lenguaje o bien es el ordinario o bien también está formalizado. En este último caso su metalenguaje tendrá que ser, nuevamente, o bien el ordinario o bien el estrictamente formal. En último término, será preciso apelar al lenguaje usual que se pretendía desterrar.

En segundo lugar, y aunque admitiéramos que la Matemática pudiera convertirse en un lenguaje estrictamente formal, con sólo signos artificiales en su número mínimo requerido, y admitiéramos el empleo del lenguaje ordinario sólo para las reglas de transformación, con lo cual el lenguaje usual únicamente aparecería al comienzo de tal cálculo y no en el resto, resultaría que el matemático se vería impotente para trabajar en la Matemática. Se ha calculado que sólo para representar el número natural "uno", concepto que es relativamente asequible, harían falta decenas de millares de signos. Naturalmente, el matemático prefiere utilizar una abreviatura, como puede ser "1". En comparación de ROGER GODEMENT:

> *El matemático que tratase de manipular reuniones como ésta se parecería al alpinista que, para elegir puntos de apoyo sobre una pared rocosa, las examinase con un microscópico electrónico*[7].

Pero si dentro de una estricta formalización se necesita, por la impotencia del matemático en su trabajo —aunque se pudiera argumentar que es impotencia no del cálculo formal en sí, sino meramente psicológica del individuo matemático, olvidando entonces que precisamente es éste quien hace la Matemática, y construye tal cálculo formal—, de la abreviatura junto a la definición nominal, realmente se encuentra en la misma situación que el lenguaje

[7] *Algebra,* p. 29. Ed. Tecnos. Madrid, 1967.

ordinario, impotente para la construcción matemática considerado aisladamente. Además, la propia abreviatura, olvidando su origen, llegará un momento en que sea dotada de un referente existencial, con la diferencia de que el platonismo realista a que esta posición extrema conduce ha intentado partir de una asepsia total y pretendidamente afilosófica. Este peligro ya lo sufrieron los propios bourbakistas, quienes, en 1948, llegaron a escribir:

> *no se sabría insistir bastante sobre el papel fundamental que juega, en sus búsquedas, una* intuición *particular, que no es la intuición sensible vulgar, sino más bien una especie de adivinación directa (anterior a todo razonamiento) del comportamiento normal que le parece tener derecho a esperar, por parte de los seres matemáticos que un largo trato le ha convertido en tan familiares como los seres del mundo real*[8].

En tercer lugar, insisto en la "actividad" de la Matemática. El indicar o aceptar que no es más que un cálculo formal implica un estatismo que contradice la propia evolución de la Matemática. El matemático no descubre, crea, construye. Y en esta construcción creadora el símbolo, y sus reglas sintácticas, sí es, ciertamente, fundamental. Pero no único motor de invención. Las series a las que dio su nombre, las creó FOURIER para dar explicación de un fenómeno físico, el calor. Y constituyeron auténtica revolución en la conceptuación que se tenía en el siglo XIX de "función", ya en plano estrictamente teórico, hasta el punto que obligó a la revisión de tal concepto. Es uno de entre los innumerables ejemplos que señalarían cómo las ciencias en general constituyen una fuente de la creación matemática, motor que, precisamente, se apoya no en el símbolo artificial y en regla sintáctica alguna, sino en un contenido fáctico. Y esta última vertiente ha sido constantemente remarcada por muy grandes genios, profesionales de la Matemática como POINCARÉ o HILBERT. Más cercano, un bourbakista, JEAN DIEUDONNÉ, señalará:

> *los matemáticos que hacen abstracción por el amor de la abstracción son muy frecuentemente los mediocres*[9].

---

[8] "L'architecture des mathématiques", en LE LIONNAIS, *op. cit.*, en nota 3, página 31.

[9] *Calcul infinitesimal.* Hermann, París, 1968, p. 7.

Aunque en línea distinta, un matemático español, RICARDO SAN JUAN, suscribiría las anteriores palabras. Suyas son, sin embargo, las siguientes:

> *En Matemáticas, como en Música, el simbolismo es fundamental, pero mejor para exponer que para descubrir. El compositor concibe la melodía por inspiración y después la escribe en el pentagrama para que el instrumentalista pueda reproducirla. Los conceptos y relaciones de la Matemática se conciben generalmente antes de expresarlos en cálculos; precisamente esta labor resulta casi siempre desagradable, aunque altamente provechosa, por los errores que permite descubrir y que desgraciadamente subsisten muchas veces, incluso después de la completa redacción* [10].

LENGUAJE USUAL-LENGUAJE ARTIFICIAL.

Si la formalización completa es la meta añorada no impide que, en la realidad, todo texto matemático sea una combinación de Lenguaje ordinario y Lenguaje artificial. Combinación esencial de la expresión y construcción matemática, que la determina claramente. Como señalará GILLES-GASTON GRANGER

> *la dosificación de lengua común y lengua formal en cada dominio de la ciencia, e incluso en las obras de cada científico, determina el estilo del pensamiento científico en cierta analogía con los estilos de la expresión literaria* [11].

Combinación de ambos, aunque no siempre equilibrio. El progreso matemático ha ido acompañado de un constante retroceso en el empleo del lenguaje usual. El equilibrio se ha ido rompiendo en beneficio de éste. Y ello motivado por el deseo de claridad, precisión, eliminación de ambigüedades, supresión de los peligros de la intuición y analogía terminológicas... En el fondo, deseo de perfección, o en palabras muy usadas en la Matemática, deseo de rigor tanto conceptual como expresivo.

---

[10] Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1956, pp. 13-14.

[11] *Formalismo y ciencias humanas.* Ed. Ariel, Barcelona, 1965, p. 51.

Meta irrealizable, la aproximación a la expresión estrictamente formal presenta "lagunas", en las cuales el lenguaje ordinario se emplea ampliamente y de modo insustituible. Así, aunque el deseo de la obra sea el de una obra enteramente formalizada, NICOLÁS BOURBAKI—que ha realizado uno de los esfuerzos más considerables de todos los tiempos por lograr este objetivo en toda la Matemática— tiene que indicar, de modo implícito, que ello es imposible, aceptando el lenguaje usual junto al artificial en dicha obra.

> *Frecuentemente, incluso se utilizará el lenguaje corriente de una manera mucho más libre aún, por abusos de lenguaje voluntarios, por la omisión pura y simple de los pasajes que se supone pueden ser restituidos fácilmente por un lector incluso poco ejercitado, por indicaciones intraducibles en lenguaje formalizado y destinadas a facilitar esta restitución. Otros pasajes igualmente intraducibles contendrán comentarios destinados a hacer más clara la marcha de las ideas, al necesitar una llamada a la intuición del lector; el empleo de los recursos de la retórica se hace entonces legítimo, siempre que permanezca inalterada la posibilidad de formalizar el texto* [12].

Y aunque se suponga el rigor expresivo matemático perfecto, al poder traducirse a un lenguaje puramente artificial, todavía queda la mezcla de ambos elementos, símbolo-lenguaje usual, para que el matemático recurra a la retórica, como quieren los bourbakistas. Quienes, por otra parte, dan como criterio para lograr tal perfección en el trabajo personal de cada matemático, su "experiencia" y su "perspicacia de matemático" siempre que las contraste con "el parecer general de los matemáticos". Realmente es un criterio tan subjetivo como el dado por POINCARÉ a principios de este siglo cuando afirmaba que el rigor en la Matemática había sido ya totalmente alcanzado. POINCARÉ quedaría sorprendido de que lo que él consideraba enteramente riguroso hoy no se considere tal, habiéndose incluso relativizado el concepto de "rigor", que ya no se pretende como alcanzable en su totalidad, sino sólo por aproximaciones sucesivas.

---

[12] *Eléments de mathématiques,* Libro I: *Théorie des ensembles. Introduction.* Hermann, 2.ª ed. París, 1960, p. 7.

Clases de signos artificiales.

Al considerar el Lenguaje matemático como unión de los lenguajes ordinario y artificial, supuesto que del primero de ambos subconjuntos se tenga una idea respecto a los elementos que lo componen, conviene precisar cuáles son los elementos del segundo de dichos subconjuntos. Al hacerlo así, considero a la Matemática no como un cálculo formal riguroso —ideal que ya he dicho utópico, aunque deseable como guía para su elaboración y construcción—, sino como la Matemática que se hace y se trabaja constantemente, como la Matemática que encontramos en *todos* los textos matemáticos. No se entra, aquí, en la clasificación de las funciones que se asignan a ciertos signos en el interior de una determinada rama de la Matemática; ello pertenece a la introducción de tal rama, donde deben especificarse que tales o tales signos van a utilizarse como signos de variables, o parámetros, o variables sintácticas, etc.; es decir pertenece al acuerdo notacional introductorio del trabajo, o introductorio de las nociones que a lo largo del mismo se vayan introduciendo. Tampoco entro en la discusión acerca de si el lenguaje es un convenio artificial de la humanidad y, por lo tanto, todos sus elementos son arbitrarios, artificialmente construidos por el hombre, o si por el contrario corresponden o tienen un origen "natural" onomatopéyico, por ejemplo. Afectaría, esta discusión, únicamente al lenguaje oral, fonético, y no al escrito, el cual es, ciertamente, artificial en la forma alfabética en que lo utilizamos. En este aspecto, tanto el que he llamado lenguaje usual como el artificial, son, los dos, artificiales. La diferencia entre ambos es, por lo tanto, de grado.

Como elementos propios del lenguaje artificial matemático considero los siguientes:

a) Signo estrictamente artificial. Carece de referente alguno en el lenguaje ordinario. De este tipo son, por ejemplo, $\int$, $\rightarrow$, $\in$, $\Subset$, ∇, ... A veces, alguno de estos signos ha pasado al lenguaje ordinario, como en el caso del signo operatorio "$+$" entre los naturales.

b) Signo gráfico único que, en contexto distinto al matemático, posee significación propia. En esta categoría se incluyen todos los signos vocálicos de los que hace un uso inmoderado el matemático, y que quizá constituyan, en proporción a los restantes, la base fundamental del lenguaje artificial. Así, se emplean para designar conjuntos, elementos de conjuntos, puntos, coordenadas... Algunos pasan a tener un referente constante, por ejemplo, N, Z, Q, R, C, e, i, π, Γ... Los primeros, tomados aisladamente, son vocales del alfabeto castellano; los otros, letras del alfabeto griego. Su significación concreta, respectivamente, N, Z, Q, R, C indican los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, reales, complejos; e, i designan dos números trascendentes de gran importancia; i representa la unidad compleja; Γ la función gamma o también función factorial, de fértiles aplicaciones en Física.

c) Signo compuesto por varias letras que en lenguaje ordinario carece de referente y en la Matemática actúa de operador o elemento concreto, determinado. Es, en general, el propiamente abreviador. Así, *lim* por "límite"; *dx* por "diferencial de x"; *log* o *lg* por "logaritmo"; *sen, cos, tg,* para las funciones trigonométricas...

d) Término que en lenguaje usual posee referente semántico y no único, en general. Es signo que puede considerarse tanto del lenguaje corriente como del artificial propio de la Matemática. Así, términos como *grupo, anillo, ideal, cuerpo, filtro, fibra, norma, categoría...* son signos propios del lenguaje matemático en el sentido de que en el interior de esta disciplina actúan de modo inequívoco, estando perfectamente definidos, ya que son nombre de estructuras o conceptos claramente delimitados; por ello tienen un sentido tan preciso que se les podría reemplazar por un signo artificial cualquiera. De hecho, es lo ocurrido en algún caso, frontera entre un término que podría ser considerado del lenguaje ordinario y que, sin embargo, pertenece de lleno al lenguaje matemático. Por ejemplo: *núcleo* de un homomorfismo entre dos estructuras algebraicas. Ultimamente se está reemplazando tal término por las iniciales de su traducción inglesa o alemana —respectivamente, *kernel, kern*— y así tanto los textos franceses como los castellanos admiten *ker* para designar *núcleo*, incluso sin advertencia previa. *Ker* bien puede considerarse, en contexto castellano, como signo artificial carente de referente en el lenguaje ordinario, aunque *núcleo* posea multitud de significaciones tanto en éste como en otros sublenguajes estrictamente científicos.

También se incluyen en este apartado aquellos términos que, teniendo sentido originario matemático, por ser nombre de ente u objeto específico de esta materia, el lenguaje ordinario los ha absorbido, con el mismo o muy parecido sentido, perteneciendo al vocabulario mínimo que todo hombre posee. Así, los nombres de ciertas figuras geométricas como *punto, recta, triángulo, circunferencia...* En esta absorción, el "parecido sentido" es posible fuente de error que a veces cuesta arrancar mucho por las representaciones intuitivas que entraña y que se cargan de manera inconsciente en el empleo de los mismos en el lenguaje estrictamente matemático; pero constituyen, a la vez, y como contrapartida, fuente de muy fecundas intuiciones, así como generalizaciones y posibilidad de simplificar las demostraciones. Estas ventajas han hecho casi necesario el empleo de un "lenguaje geométrico" en los terrenos del análisis.

e) Figura que acompaña al texto. Hasta ahora estaba considerada como más característica de los textos geométricos, aun apareciendo también en los analíticos, como en el caso del estudio de derivadas, entornos, variable compleja..., y aun existiendo geometrías que se permitieron desarrollar sin hacer llamada alguna a la figura geométrica, como la Proyectiva de STAUDT implica muy grandes peligros su utilización, ya que puede dar lugar a generalizaciones de propiedades sólo válidas para el modelo de la figura representada. Además, tampoco permite generalizaciones absolutas, para espacios de n dimensiones, objetivo actual de muchas zonas de la Matemática. Tampoco permiten percibir, en el Cálculo infinitesimal, por ejemplo, el comportamiento de una función que sea derivada de orden superior al segundo respecto a sus continuidades o no, ni qué interpretación cabe dar a las mismas.

Sin embargo, la figura continúa siendo uno de los motores fundamentales de la invención matemática y de la propia divulgación de la misma, ya que, en su base, se encuentra el "lenguaje geométrico" al que se ha hecho referencia en el apartado anterior. Cabrían multitud de ejemplos, como en GAUSS la preocupación geométrica de la construcción con regla y compás de polígonos regulares, que da paso a las ecuaciones ciclotómicas; los movimientos del icosaedro en FÉLIX KLEIN con su hermoso paralelismo respecto a las ecuaciones de quinto grado; la geometría hiperbólica llevando a POINCARÉ a las funciones θ-fuchsianas...

Y no sólo motor de invención. A veces constituyen fuente directa de descubrimientos.

> GINO LORIA, *en una comunicación dirigida a* Il Bolletino de Matemática *(año V, núm. 10-12) el 4 de diciembre de 1906, cita los dos siguientes casos de descubrimiento por construcción geométrica: 1.º* IVON-VILLARCEAU, *siendo estudiante de la Escuela Central de París, al dibujar una lámina de Geometría descriptiva, descubrió las secciones circulares del toro, no meridianas ni paralelas. 2.º Por mucho tiempo se admitió que "toda cónica que pase por cinco puntos de inflexión de una cuártica plana, contiene otros tres", hasta que* F. KLEIN (Math. Ann. *tomo X, 1876, p. 397) demostró su falsedad deducida de la inspección de las hermosas láminas relativas a tales figuras publicadas por* BEER *en 1852* [13].

Hay una diferencia esencial entre la figura utilizada en texto clásico y en texto actual, sin embargo. La primera pretendía dar una imagen real, literal del objeto representado y, con ello, de lo que ocurría en la Matemática. Es la pretensión la que daba lugar al equívoco. A pesar de ello, se ha mantenido con exceso en el espíritu humano. El propio HANS REICHENBACH llegó a afirmar que "es totalmente imposible pensar en forma abstracta sobre relaciones", lo cual es cierto, pero no la conclusión de que el empleo de figuras en geometría descansa por ello "en una necesidad básica del pensamiento humano". El pensamiento, para ejercerse, requiere de elementos concretos como el signo gráfico o la palabra, pero no de la figura que sea imagen real o literal del concepto u objeto sobre el cual o acerca del cual se piense [14].

---

[13] Nota de los traductores REY PASTOR-ALVAREZ UDE en p. 63, a *Lecciones de Geometría moderna* de M. PASCH. Ed. Junta Ampliación Estudios. Madrid, 1913.

[14] *La filosofía del espacio y del tiempo*. Tomado de M. BUNGE: *Intuición y ciencia*. Ed. Eudeba, Buenos Aires, 1965, p. 97.

Hoy día esta figura se ha sustituido en los razonamientos matemáticos de carácter algebraico y más aún analítico, por el diagrama o esquema. El paso de lo figural o de la figura imagen a la figura simbólica ha sido realizado también en muchos otros campos del pensamiento. El discurso filosófico o el antropológico, por ejemplo, se ayuda también del diagrama. Como señala MARIO BUNGE en *Intuición y Ciencia,* NICOLAI HARTMANN, al evolucionar hacia un cierto tipo de realismo "se hacía cada vez más aficionado a los diagramas para ilustrar sus ideas; su *Einführung in die Philosophie* está profusamente ilustrado con dibujos lineales" [15].

Desde otro plano advierte este mismo hecho LUCIENNE FÉLIX en la Advertencia a la tercera edición de su *Exposé moderne des mathématiques élémentaires*:

> *Las estructuras de las diversas cuestiones que conciernen al estudio de las funciones se subrayan ahora y se hacen sensibles por el empleo de esquemas. Hace unos quince años estos servían como mucho para dejar su huella en la mesa de explicaciones del maestro. En una concepción conjuntista y relacional, esos esquemas* forman parte de la exposición misma; *hacen perceptible el objeto de estudio,* aligeran la redacción *y, más aún, permiten percibir bajo un aspecto más general las nociones que se han creído excesivamente ligadas a sólo las funciones numéricas* [16].

f) Signo artificial, aunque no único de la Matemática o con significado estrictamente matemático. En esta categoría se podrían incluir las cifras hindú-arábigas, así como acentos, subíndices, superíndices, paréntesis... Más propio de este grupo podemos considerar los pertenecientes a la Lógica, como los de cuantificación.

ABREVIATURA-NOMBRE.

Es evidente que alguno de los signos artificiales antes enumerados ha surgido, realmente, como abreviatura del lenguaje, bien del

[15] *Op. cit.*, p. 95.
[16] Ed. Dunod, París, 1965. Los subrayados, míos.

ordinario, bien del propio artificial. En algún caso adaptando la o las iniciales del término que se abrevia, como *Z* para el anillo de los enteros —de *Zahlen*—, *R* para el cuerpo de los números reales, el propio caso de *ker,* el de *lím,* o del término que designaba la relación original como $\in$ para la pertenencia de elemento a conjunto, de εστιν, etc. En otros casos, para hacer más concisa la expresión, creando el signo artificial correspondiente, como en la desfiguración de "S" inicial de "suma", para dar lugar a "$\int$" para integral...

También es evidente que, en muchos otros casos, y en un principio en su totalidad, el signo artificial ha sido una creación no abreviadora de términos, sino de designación de nombre a concepto, a idea previa de un objeto matemático existente con antelación a su designación nominal. En este sentido, el nombre buscado pretende reflejar con la mayor exactitud posible la esencia del objeto al cual se asigna. De esta forma, para indicar la igualdad entre dos cosas, entre dos objetos matemáticos cualesquiera, el inglés RECORDE introduce hacia 1550 el signo "=", "por no haber nada más igual que estos dos trazos paralelos", mientras se utilizaba por parte de VIETA, DESCARTES, y hasta el siglo XVIII, la deformación de las iniciales de *aequare,* "∞", como signo de la igualdad. El signo que ha prevalecido no es el abreviador, sino aquel que en su figura recuerda más el concepto que pretende designar. Aunque este punto no es, en modo alguno, esencial. Y así el propio PLATÓN, que en cuanto al origen del lenguaje no parece adoptar postura definida entre origen divino o convención natural humana, en la *Carta VII* plasmará nítidamente la postura de la previa existencia real del objeto al nombre y de la convención de éstos, cuando afirma:

Decimos también que el nombre de los objetos no es una cosa fija en modo alguno para ninguno de ellos, y que nada impide que las cosas ahora llamadas redondas sean llamadas rectas y las rectas, redondas; su valor significativo no será menos consistente para los que hacen el cambio y las llaman por los nombres contrarios. Respecto de la definición se puede decir lo mismo, desde el momento que está compuesta de nombres y predicados: no hay en ella ninguna consistencia suficientemente firme [17].

---

[17] 343 b. Ed. Instituto de Estudios Políticos, Madrid, 1954.

Lo figural-Lo operativo.

Se plantean, aquí, dos problemas. En primer lugar, la evolución en el sentido de los términos. A pesar de su no imprescindibilidad, del convencionalismo que suponen palabras como las anteriores, los términos griegos utilizados para los objetos matemáticos gozaban, en su totalidad, del carácter de reflejar o intentar reflejar al objeto bien en su cualidad o esencia, bien en su construcción. A dichos términos los podemos calificar como figurales o descriptivos. Ya es clásico tomar el ejemplo de las cónicas en este punto. Así παραβάλλειν significa "aplicar" y, en el lenguaje matemático, pasó, desde los pitagóricos, al παραβολὴ τῶν χωρίων "aplicación de áreas", es decir, construcción de un paralelogramo de área dada sobre un segmento de longitud también dada. *Parábola en elipse* —posteriormente sólo *elipse*— consistía en realizar tal aplicación por defecto; *parábola en hipérbola* —después sólo *hipérbola*— aplicación en exceso, dado que los términos ὑπερβάλλειν y ἐλλείπειν designaban, en lenguaje usual, "exceso" y "defecto", respectivamente.

Tras Apolonio, aplicación o parábola, elipse o hipérbola pasan a designar a las secciones cónicas. Pierden, con ello, su carácter representativo de una construcción, pierden su carácter descriptivo. Varía su sentido originario en beneficio de otro significado. Pasan a dar nombre a unas figuras concretas. Pero ello se realiza en beneficio no de tal figura, sino de la analítica. Apolonio hace el paso del concepto clásico al actual mediante el álgebra geométrica. Analíticamente, la parábola viene dada por la expresión $ax = kS$, donde a es la longitud del segmento dado, S el área conocida del paralelogramo y x la longitud del otro lado que hay que calcular. Si es parábola por defecto o elipse la expresión es $ax - x^2 = kS$ donde x^2 es el paralelogramo semejante al dado que queda en defecto; y si es parábola en exceso $ax + x^2 = kS$. Si en lugar de aplicar un paralelogramo de área S aplicamos una *curva* de ordenada y sobre el eje de abscisas, las ecuaciones anteriores adoptan la forma de las ecuaciones de la parábola, elipse e hipérbola en el plano, respectivamente $ax = ky^2$; $ax - x^2 = ky^2$; $ax + x^2 = ky^2$. Se ha generalizado, así, una cierta construcción. Se ha pasado de esta a un nombre; de un paralelogramo, a una curva cualquiera que satisfaga una ecuación determinada. Se puede continuar y admitir que las tres ecuaciones quedan englobadas en una sola. En este caso, surgen otros entes entre las cónicas. Así, la circunferencia, lo cual no es difícil de admitir intuitivamente. O dos rectas reales con un punto de intersección también real. Pero las ecuaciones obligan a admitir nuevos entes, también considerados como cónicas por responder a la misma ecuación, y para los cuales hay que inventar un nombre, los imaginarios o las rectas isotropas. Se ha producido, de esta manera, un indudable enriquecimiento en los terrenos colindantes a los tres términos que se han puesto de ejemplo, y no sólo mero cambio de nombre.

Ejemplo más reciente se tiene en el caso de la estructura algebraica "espacio vectorial" que llega a englobar, en su esencia, elementos aparentemente tan distintos como el vector del que toma el nombre, el conjunto de las aplicaciones de un cuerpo sobre otro, las soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden sin segundo miembro, los polinomios... Y que presentan, también, inmediatas semejanzas con transformaciones geométricas, en el álgebra lineal que conducen a una ampliación tanto terminológica —apoyada en la imagen geométrica— como conceptual. Del vector como mera "magnitud" con "sentido" [18] se ha pasado, conservando el término, aunque enriquecido, a nuevos campos conceptuales.

Ahora bien, lo importante, lo que hay que remarcar, es que dicho enriquecimiento se ha producido, precisamente, por la pérdida del contenido descriptivo o figural de los términos primitivos. Sólo cuando han perdido su carácter representativo, han permitido realizar otras construcciones, se han vuelto operativos. Y si en un primer momento pasan a designar otros objetos, llega un momento en que no designan más que una interpretación métrica de una expresión algebraica.

Igualmente se podrían haber tomado otros términos en el lenguaje matemático griego. En competencia con el color, términos como *punto, recta, superficie, figura...*, designan fronteras de cuerpos. Son, por ello, eminentemente figurales o descriptivos. Y, sin embargo, a pesar de que EUCLIDES, por ejemplo, se ve obligado a definirlos explícitamente por esta concepción, resulta que no utiliza tales definiciones. Y ello porque tales términos, en la Mate-

---

[18] Términos que, al igual que los casos anteriores, servirían de modelo ejemplificador para indicar la evolución en el sentido sufrida por los términos matemáticos.

mática axiomatizada, han perdido tal carácter figural, y sólo pueden ser definidos implícitamente.

En esta evolución, en este paso del carácter descriptivo a lo operativo, veo la clave del simbolismo artificial matemático. Este nada tiene que hacer, ni como abreviatura siquiera, en un terreno figural. En él hay objetos y construcciones; se dan nombres para tales objetos y tales construcciones. El signo artificial abrevia y clarifica algo la expresión, pero se puede prescindir de él. Sólo cuando pierde su nota descriptiva, el signo artificial se convierte en imprescindible y permite que la Matemática alcance su nota característica de generalidad. Este hecho lo podemos observar a todo lo largo de las etapas de la Matemática. El genio griego no pudo o no supo liberarse de la particularización y ello por el empleo de este tipo de términos. Contra la afirmación anterior se ha querido ver el poder abstractivo generalizador que supuso la Geometría. Ahora bien, si observamos todas las manifestaciones griegas, lo que se nos presenta es todo lo contrario, se nos muestran afirmaciones de carácter particularizador respecto a un objeto o construcción determinados. Una propiedad del círculo es válida para *el* círculo singular y concreto, para la Forma pura del mismo. De aquí la imperiosa necesidad de la figura. Sin ella, el geómetra griego nada hubiera podido hacer. Pero la figura es una particularización, un modelo —todo lo imperfecto que se quiera— de una única Forma pura de la cual participa. En EUCLIDES —ya se volverá a este punto— la demostración se realiza mediante un paso a la figura o al caso particular, mediante la llamada *especificación* dentro de la proposición matemática. Los geómetras hindúes llevan a su extremo esta posición. Les basta el enunciado, la figura y un imperativo: "¡Mira!". Análogamente, sólo cuando la Aritmética pudo liberarse del carácter descriptivo de sus términos —y basta recordar toda la literatura existente sobre los números triangulares, pentagonales...— se pudo convertir en álgebra. El signo artificial, perdida su nota descriptiva, puede aplicarse a campos de objetos cualesquiera, en los cuales se particulariza. Pero con ello permite el paso para la consecución de los puntos 2 y 4 que antes he reseñado para indicar la necesidad del signo artificial.

El signo, característica no unívoca.

Un segundo problema se liga con el anterior. Si el signo artificial permite la instrumentalización de la Matemática al despojarse de su referente descriptivo, ¿consigue suprimir, de modo radical, las equivocidades y ambigüedades que el lenguaje usual entrañaba? En este sentido, signos como los que se han puesto de ejemplo en los apartados anteriores sólo consiguen suprimir posibles equívocos por el contexto. Así, C puede designar tanto el cuerpo de los números complejos como la constante de EULER-MASCHERONI, como el vértice de un triángulo... En casos como éste la solución es inmediata: basta la indicación de qué signos se van a utilizar en cada contexto. Sin embargo, en otras ocasiones el término suele dar lugar a equívocos precisamente por el enriquecimiento obtenido al paso del tiempo. Por ejemplo, en el caso *triángulo* —debido al hecho de que "ángulo" puede interpretarse como originado por una semirrecta que gira alrededor de su extremo o como región plana determinada por dos semirrectas de origen común— podemos interpretarlo como una región plana, intersección de tres bandas. Pero también puede considerarse como un cuerpo rígido formado por tres segmentos que tienen dos a dos un punto común. Los dos sentidos se utilizan frecuentemente. Y en muchas ocasiones desconcierta al lector no preparado. Igualmente, conceptos como "función", "curva", "número", han ido sufriendo paulatinos cambios de los que habrá ocasión de hablar. Así como el de "operación" cuyo sentido primario permanece con el actual, provocando lo que puede considerarse como peligrosa ambigüedad. Este tipo de equivocaciones y ambigüedades sólo puede superarse mediante una rígida formalización que determina, axiomáticamente, y por tanto de modo implícito, el sentido con el cual puede aceptarse o manejarse un término determinado. Pero ello nos conduce a otro principio fundamental de la Matemática. El de que sólo el signo no la determina de modo unívoco. Si es importante, esencial para su desarrollo, lo es igualmente la sintaxis del mismo. La caracterización del texto matemático no va a estar, por ello, en la mera utilización del signo artificial, sino en el modo de emplearlo y en el modo por el cual se le da un referente o contenido semántico posterior.

LOS ESTILOS

La consideración de que el empleo del signo artificial es necesario para la construcción matemática ha conducido al problema de si la Matemática es mera manipulación de signos arbitrarios o si tal manipulación no es más que secundaria, obligada en cuanto a la expresión, pero no en cuanto a su esencia. Pero si estos problemas han surgido realmente en nuestra época, ya mucho antes el empleo del signo, de su buen o mal uso había suscitado sus comentarios. Desde sus orígenes, el matemático se ha preguntado si, en ocasiones, el excesivo empleo de tales signos no provoca lo que se pudiera denominar "empacho sígnico", que conduce a no reflejar con exactitud el pensamiento o a enmascararlo, o a hacer creer que se dice algo, sin decir nada, o bien a creer que se está pensando acerca de objetos cuando lo único que se hace es operar con signos carentes de todo correlato real. En el fondo, lo que se debate es la cuestión del objeto propio de la Matemática. Si ésta trata sobre objetos reales, independientes del hombre y, por supuesto, de naturaleza eidética; si versa acerca de entes construidos meramente por el espíritu humano; si sobre meras palabras o signos materiales. Es, este último caso, el que haría recaer toda la importancia de la Matemática sobre el signo artificial junto a su sintaxis, despreocupados de las relaciones entre realidad material o ideal y pensamiento. Pero los dos anteriores enfoques tampoco escaparían al problema del fiel reflejo del pensamiento por el signo, de la inevitabilidad de este para la construcción matemática y de los condicionantes que su uso entraña.

Conceptuación previa de la Matemática.

Son consideraciones, las anteriores, que pertenecen más a terrenos de lo que se pudiera calificar como Filosofía de la Matemática, que a terrenos de lo que se ha calificado Estilo matemático. Sin embargo, este va a estar condicionado, en gran medida, por la previa conceptuación de la naturaleza y método propios de la Matemática. Conceptuación de autor que puede estar implícita, como en la mayoría de los matemáticos pragmáticos, preocupados más por el desarrollo de su disciplina que por sus fundamentos. En este caso, no se puede olvidar que ese autor está inmerso en una época y, en ella, otros habrá que formulen con precisión tales conceptuaciones; la necesidad del signo artificial o no; si este, de necesario, es figural o simbólico operativo; si el lenguaje corriente es o no apto para la captación de los entes matemáticos y de sus relaciones...

Precisamente las variaciones del estilo matemático que se intentan caracterizar en lo que sigue, se van a configurar por esta previa conceptuación de la naturaleza de la Matemática, sus métodos y su lenguaje, su fundamentación última. Según que se adopten unos u otros puntos de vista, se hará una u otra literatura. Pero, además, va a permitir, esa previa toma de posición, caracterizar la Matemática de toda una época. Así, la consideración del signo como imagen literal del objeto representa un cierto tipo de Matemática, la griega, con su estilo propio, el que denomino geométrico, apoyado en estructura axiomática. Por el contrario, el signo como entidad propia o como imagen simbólica sin referente alguno, va a caracterizar la Matemática actual, aunque el estilo a que da origen —y que denomino formal— se apoye también en cuanto a la estructura, en el modelo axiomático. En ambos tipos, como en todos los demás, el estilo sufrirá variaciones; dependerá, naturalmente, de la característica propia del autor particular que escriba, así como del tema que desarrolle.

Clases de estilo.

Según estos enfoques, los estilos matemáticos que han aparecido a lo largo de la historia, se pueden clasificar como sigue:

Estilo geométrico.—Pone el acento más sobre el aspecto axiomático-deductivo que sobre el operacional o notacional. De aquí el empleo de signos en su aspecto figural, como representación fiel del objeto que representan. El rigor, completo, aunque por lo anterior no tengan más remedio que utilizar la intuición sensible en las propias demostraciones. Como nota principal destaca su carácter expositivo con total preponderancia sobre el aspecto inventivo de la Matemática.

Estilo poético.—Mucho más abstracto que el anterior, utiliza el signo con carácter operacional esencialmente, aunque lo designe con términos del lenguaje usual, colores fundamentalmente. Se carece de demostraciones, simple enunciado de las reglas o proposiciones matemáticas. En verso dichas proposiciones, el poema condiciona la expresión, la elección de casos, hasta el origen de la obra matemática. Carácter inventivo más que expositivo.

Estilo cósico.—Mezcla de lenguaje ordinario y principios de signo estrictamente artificial. El nombre se lo doy por la constante referencia a la "cosa" para designar la incógnita. Hay casi completa ausencia de rigor y, lo que es más importante, de generalización abstractiva. Se dan casos particulares; se resuelven multitud de problemas de carácter aritmético, pero con ausencia de método uniformador, general.

Estilo algebraico-cartesiano.—Notacional, aunque con ciertas limitaciones. Es el primer paso hacia el álgebra moderna. No hay completa sistematización operacional abstracta. Queda muy pronto absorbido por el siguiente.

Estilo de los indivisibles.—La figura geométrica es fundamental, pero a caballo entre sus enfoques figural y simbólico. Gran abstracción, pero con total ausencia de un lenguaje apto para expresarla adecuadamente. No existen justificaciones para el método en su plano conceptual, sólo aceptado por el indiscutible éxito obtenido en los resultados. El rigor, por ello, es escaso. Los razonamientos por analogía son frecuentes. También las interpolaciones apresuradas. Es lenguaje de carácter inventivo, no expositivo.

Estilo operacional puro.—Meramente calculatorio. Consecuencia del anterior, los conceptos quedan desfigurados bajo un impresionante aparato simbólico artificial, aunque el rigor en muchos momentos no exista. La preocupación fundamental es la de desarrollar algoritmos y aplicarlos en todos los terrenos de la ciencia.

Estilo de los "ϵ".—Es denominación que adopto de CHEVALLEY. Surge como consecuencia de una de las corrientes de fundamentación de la Matemática durante el siglo XIX, la de aritmetización del análisis. Vuelta al rigor, que se hace completo mediante la definición de paso al límite dada por WEIERTRASS, tomada como base de todo el desarrollo del análisis matemático.

Estilos sintético y analítico.—Consecuencia del renacimiento geométrico a principios del siglo XIX y de la Geometría proyectiva, se contraponen el desarrollo de la Geometría pura, sin empleo de coordenadas, mera relación de figuras geométricas imaginadas, y la Geometría analítica, desarrollada a partir de su enlace con el cuerpo de los números reales. El sintético, es, en el fondo, una vuelta al estilo euclídeo, aunque quizá no con el rigor pretendido de este.

Estilo dual.—Consecuencia del principio de dualidad de la Geometría proyectiva, esta disciplina puede realizarse en su exposición a dos columnas, con intercambio únicamente de ciertos términos duales. Tanto los estilos sintético y analítico como el dual coexisten juntos.

Estilo axiomático.—Consecuencia de la corriente geométrica de fundamentación de la Matemática, también en el siglo XIX. Como el geométrico, sigue el esquema axiomático deductivo. Los signos, esenciales, pero de carácter no ya figural, sino estrictamente simbólico. El rigor, completo, sin llamadas a la intuición sensible o a axiomas no explícitos. Carácter más expositivo que inventivo.

Estilo formal.—El signo, único instrumento a utilizar. Se abandona el lenguaje usual. Rigor absoluto, total. Los signos, carentes de todo contenido referencial semántico, aunque puedan interpretarse en modelos o realizaciones. Sirve para la exposición de algunas ramas de la Matemática, no para su totalidad. El aspecto exterior es el de un mero juego simbólico.

Estilo semiformal.—Es el usado en la actualidad por la mayoría de los matemáticos. Como meta ideal se pone de modelo el anterior. Utiliza el lenguaje ordinario, aunque en poca medida, la imprescindible, y considerándolo como vehículo necesario, pero, a la vez, en su posición extrema, como un abuso del lenguaje, de la "retórica". El signo sólo se admite, como en el caso anterior, en su dimensión sintáctica. Deductivo, define de modo axiomático las estructuras de que parte, ya que se encuentra casi totalmente algebrizado, hasta en las parcelas topológicas. El rigor, si no como el anterior —único además del que podría asegurarse su plena existencia, y ello con las reservas del utopismo ya señaladas anteriormente— puede considerarse casi absoluto. Permite, por otro lado, dar las dos vertientes del lenguaje, ya que es tanto expositivo como inventivo.

Todos ellos se estudiarán partiendo de la conceptuación previa que de la Matemática exista, formulada bien por filósofo anterior a la plasmación en obra matemática definitiva —como en el estilo geométrico— bien por filósofo-matemático o por matemático, autores de las obras y, por tanto, modelos propios del estilo a que dan origen.

1. ESTILO GEOMETRICO

1. Platón y su conceptuación de la Matemática.

Signo, Palabra, Acción.

Platón, primer autor en el cual encuentro referencia explícita al estilo matemático, a la manera de expresarse los geómetras, parte del hecho de ser la Matemática un lenguaje oral, siéndole imprescindible la palabra. De aquí su rechazo del signo, que exige manipulación, como elemento imprescindible para la elaboración matemática. En el Libro VII de *La República* ataca directamente la manera de expresarse que tienen los geómetras, la manera de utilizar un lenguaje especial los matemáticos de su época, cuando escribe:

> *su lenguaje es sumamente ridículo y forzado, pues hablan como si estuvieran obrando y como si todas sus explicaciones las hicieran con miras a la práctica, y emplean toda clase de términos tan pomposos como "cuadrar", "aplicar" y "adicionar"* [1].

Que el lenguaje propio de la Matemática sea el oral —y contrapuesto a la acción, al obrar, en lo que ambos significan de manipulación práctica, con cosas materiales— lo encontramos en varios pasajes de los Diálogos. Por ejemplo, en *Gorgias* se lee:

[1] 527 a. Cito por ed. Inst. Est. Pol., Madrid, 1949.

Otras artes hay, en cambio, que todo lo realizan con palabras y que, por así decirlo, muy poca o ninguna acción necesitan, como la aritmética, el cálculo, la geometría... en las cuales las palabras están casi a la par con las acciones o más frecuentemente aquellas aventajan a éstas y toda la acción y el dominio se ejerce por completo a través de las palabras.

... si... me preguntara alguien: ¿en qué consiste, SÓCRATES, *la aritmética?, yo le contestaría, como tú hace un momento, que es una de las artes que logra su objeto por medio de la palabra. Y si de nuevo me preguntara: ¿Sobre qué trata?, yo le diría que sobre lo par y lo impar, cualesquiera que ellos sean. Si me preguntara: ¿Qué entiendes por cálculo?, le contestaría que también es un arte que todo lo realiza por medio de la palabra. Y si una vez más preguntara: ¿Sobre qué trata?, le diría, como suele decirse en los decretos, que en cuanto a lo demás son iguales la aritmética y el cálculo, porque también este último trata lo par y lo impar, pero que el cálculo se diferencia en que considera las cantidades de lo par y lo impar en sí mismas y en su mutua relación. Y si alguien al decir yo que también la astronomía todo lo realiza por medio de la palabra, me preguntara: ¿Pero las palabras de la astronomía sobre qué tratan,* SÓCRATES*?, yo le contestaría que sobre el movimiento de los astros, del Sol y de la Luna y sobre cuáles son sus velocidades relativas*[2].

Ahora bien, PLATÓN no rechaza ni por un momento el que la Matemática exija también una acción y, por ello, necesite de la figura —que es fundamentalmente el único signo al que puede hacer referencia, ya que el número aparece como manipulación de cálculos, con guijarros materiales y con el gnomon o escuadra—, de la construcción. Uno de los pasajes matemáticos platónicos más citados, el primero del *Menón* (82-84), por si las palabras de *Gorgias* antes transcritas no bastaran, es una de las más claras manifestaciones de la imperiosa necesidad de la construcción gráfica. SÓCRATES, en este pasaje, "demuestra" construyendo materialmente, prácticamente sobre una figura la duplicación del cuadrado.

Pero esta necesidad constructiva, manipuladora, es una necesidad de carácter pragmático. De modo muy explícito PLATÓN la utiliza para introducir su concepto de reminiscencia. Para PLATÓN la Ma-

---

[2] 450 d-451 b-c. Cito por ed. Eudeba, Buenos Aires, 1967.

temática versa acerca de objetos ideales, de puras Formas que el hombre ha de captar por medio de la razón y no de los sentidos. De aquí que la Matemática sea independiente, considerada en toda su pureza, de cualquier construcción y, por ello, de cualquier tipo de lenguaje material, sea algorítmico o bien gráfico. E incluso sería independiente del propio lenguaje oral al que tan machaconamente se refiere en *Gorgias*. Pero dado que el hombre ha de alcanzar la visión de la Forma pura mediante la reminiscencia, esta viene facilitada —se podría decir, que posibilitada únicamente— por la construcción gráfica y el empleo de signos especiales, imagen de esa Forma. De esta manera el trabajo efectivo de descubrimiento y exposición por parte del matemático procede por construcción, por elevación desde lo sensible —la figura, el cálculo y las formas de disponerlos— y lo manual —acción de cuadrar, de aplicar áreas, por ejemplo—, hasta la Forma pura. Con palabras del propio PLATÓN en *La República,*

> *¿Y no sabes también que se sirven (quienes se ocupan de geometría, aritmética y otros estudios similares) de figuras visibles acerca de las cuales discurren, pero no pensando en ellas mismas, sino en aquello a que ellas se parecen, discurriendo, por ejemplo, acerca del cuadrado en sí y de su diagonal, pero no acerca del que ellos dibujan, e igualmente en los demás casos; y que así, las cosas modeladas y trazadas por ellos, de que son imágenes las sombras y reflejos producidos en el agua, las emplean, de modo que sean a su vez imágenes, en su deseo de ver aquellas cosas en sí que no pueden ser vistas de otra manera sino por medio del pensamiento?* [3].

Método hipotético-deductivo.

El proceso perfecto, para PLATÓN, es el dialéctico, que capta directamente las ideas, las Formas puras, y hace ir al pensamiento de una a otra mediante un movimiento puramente intelectual. La Matemática, al no poder manejar este método, sigue otro, condicionado fundamentalmente por las anteriores ideas de PLATÓN. Método que va a influir de modo decisivo en el desarrollo y exposición expresiva de toda la Matemática posterior, que requiriendo el signo, la fi-

---

[3] Libro VI, 510 d-e. Ed. cit.

gura y el término propios, los va a encadenar en una sintaxis especial, característica de la expresión matemática.

El método querido por PLATÓN para la Matemática es el hipotético-deductivo. Así, en el segundo pasaje geométrico de *Menón,* al hacer referencia al estilo matemático, PLATÓN explicita —sin ridiculizar, ya, al lenguaje geométrico, sino por el contrario, haciendo uso de él—,

> *consiénteme que consideremos por hipótesis lo de si es enseñable o cómo lo es. Y al decir 'por hipótesis' quiero decir a la manera que con frecuencia discurren los geómetras, cuando se les pregunta, por ejemplo, acerca de una figura, si es posible inscribir como triángulo en este círculo esta figura, y contestan: "Todavía no sé si es así, pero como hipótesis creo que resulta de utilidad para el asunto la siguiente: si esta figura es tal que al aplicarla a la línea dada del círculo le falta una figura semejante a la misma que se ha aplicado, estimo que se seguirá una cosa, y otra distinta si es imposible que le ocurra eso". Partiendo, pues, de esta hipótesis es como quiero decirte lo que hay sobre su inscripción en el círculo, si es imposible o no* [4].

Pero donde con más claridad explica PLATÓN el proceso hipotético es en *La República,* Libro VI,

> *Creo que sabes que quienes se ocupan de geometría, aritmética y otros estudios similares, dan por supuesto los números impares y pares, las figuras, tres clases de ángulos y otras cosas emparentadas con estas y distintas en cada caso; las adoptan como hipótesis, procediendo igual que si las conocieran, y no se creen ya en el deber de dar ninguna explicación ni a sí mismos ni a los demás con respecto a lo que consideran como evidente para todos, y de ahí es de donde parten las sucesivas y consecuentes deducciones que les llevan finalmente a aquello cuya investigación se proponían* [5].

2. EL ORDEN EXPOSITIVO.

Si cabe la duda, los textos no permiten resolverla con absoluta claridad, y más que los textos las ideas explícitas respecto a otras

[4] Ed. Inst. Est. Pol.
[5] 510 c.

materias, en cuanto a que el edificio matemático sea estrictamente hipotético-deductivo, como se quiere actualmente, o bien hipotético-deductivo en el sentido de que las primeras proposiciones son hipotéticas no en sí, sino por falta, por impotencia de aprehensión del pensamiento respecto a la verdad de las mismas, de lo que no cabe duda es de la influencia ejercida por estas ideas de PLATÓN sobre la expresión matemática. Precisamente es PLATÓN uno de los más preocupados porque los miembros de la Academia compongan *Elementos,* es decir, plasmen en obra los descubrimientos matemáticos.

Los "Elementos". Euclides.

Y ello en el orden que siglos después realizará EUCLIDES —"platónico en sus planes, y familiarizado con la filosofía platónica" como lo quiere PROCLO—: en un orden expresivo axiomático. Orden que se puede resumir como sigue:

Toda obra matemática, para que sea considerada como tal, ha de ser una obra deductiva, en la cual para nada se invoque a la experiencia, aunque sus proposiciones puedan ser comprobables empíricamente. En sus comienzos debe darse la lista de los términos que se van a utilizar, con las definiciones pertinentes que, en el caso euclídeo, más que definiciones se pueden considerar como designaciones. A pesar de lo cual, no podrán definirse todos los términos propios de la materia a elaborar, todos los signos del tipo incluido en el apartado *d*) —p. 39—, y ello porque exigiría un regreso al infinito, que está prohibido. Si a lo largo de la obra se introduce algún otro nuevo signo o término propio, deberá ser definido en función de otros términos o signos artificiales ya conocidos o del lenguaje ordinario. Igualmente, habrá un número de proposiciones que no podrán ser demostradas y habrá que tomarlas como hipótesis de partida. La condición impuesta por PLATÓN en el párrafo citado anteriormente de *La República,* Libro VI, es que son proposiciones que los matemáticos "consideran como evidentes para todos", bien entendido que son hipótesis, siempre.

De esta forma, el texto matemático muestra como una malla o red en la cual toda proposición o teorema se encuentra ligada al conjunto por ser consecuencia de otras proposiciones, formando un todo coherente en el cual nada puede ser modificado sin modificar, igualmente, todo el edificio construido.

Ello condiciona, evidentemente, la expresión matemática. Ninguna proposición puede quedar aislada respecto al sistema; ninguna puede quedar sin demostración rigurosa o atender meramente a la intuición sensible para aceptarla; ningún término puede utilizarse con sentido distinto al establecido en las definiciones o designaciones. Pero ello impide el juego retórico. Obliga a la univocidad semántica, a prohibir el empleo de cualquier figura estilística que entrañe un mínimo riesgo de equivocidad. De aquí el rigor, pero también la sencillez de la expresión matemática; de aquí el no empleo de recursos como la sinonimia, por ejemplo. De aquí, la "maravillosa exactitud" del texto matemático, en el decir del tópico. Si hay que reiterar un término en la misma frase, se reitera ese término, no se lo reemplaza por ningún otro y, de hacerse, se ruegan disculpas al lector, "en gracia al estilo...", naturalmente al estilo no matemático.

Han sido estas condiciones las que han colocado a la obra de EUCLIDES como modelo del razonar deductivo humano. La expresión *more geometrico* se llegó a convertir en sinónimo de *more lógico.* El término *geómetra* todavía hoy designa al *insigne matemático.* Y no sólo modelo del razonar, modelo del lenguaje. Todavía se ha mantenido como enseñanza obligatoria del escolar tanto por su aspecto deductivo como por el aspecto del manejo preciso, riguroso, de los términos, de las proposiciones.

Las llamadas a la intuición.

Ahora bien, pese a todo lo dicho, el rigor total, absoluto en los *Elementos* de EUCLIDES resulta, en muchos casos, meramente aparente. Y ello, por dos motivos. En primer lugar puede observarse que EUCLIDES no realiza una nítida distinción entre lo que es una definición y lo que es un axioma. Así, los conceptos primitivos en un sistema axiomático no pueden definirse explícitamente sino a través de los axiomas. Sólo deben admitirse las definiciones nominales de nuevos términos que sirven, en realidad, de abreviaturas. Y EUCLIDES intenta la definición directa de los mismos dando un total de 118, de las que veintitrés son primitivas. Un nuevo fallo se encontraría en el hecho de que luego no utiliza, realmente, las definiciones de los elementos primitivos, con lo cual no es consecuente con el sistema, aunque acierte con el sentido actual de la axiomática. Igualmente, como postulados no se encuentran todos los que a lo largo de la obra se utilizan. Así, los de orden, por ejemplo, que se emplean para demostrar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto, el baricentro, de forma que la mediana queda dividida en dos partes, una doble que la otra. O cuando demuestra que dos triángulos son iguales siempre que tengan dos lados y el ángulo comprendido igual, a base de superposición que implica la posibilidad del movimiento en el plano, y la invariancia de la figura en tal movimiento. Posibilidad no pedida al lector. Otros postulados implícitos son, por ejemplo, el que un punto de una recta divide a la misma en dos partes, o una recta en dos semiplanos al plano en el cual está contenida, o el de EUDOXIO-ARQUÍMEDES, o el de continuidad...

En segundo lugar, se pretendía desterrar, bajo la influencia platónica, toda llamada a la intuición sensible espacial. Entre los postulados sólo el V, el que ha dado más fama a EUCLIDES, quizá, hacía una explícita llamada a esa intuición sensible. Pero, prácticamente, toda la obra está haciendo uso de unos signos que no se han postulado como imprescindibles, precisamente las figuras geométricas. Admitiendo su existencia como tales elementos imprescindibles del lenguaje matemático, con lo cual se admite también la intervención de la intuición sensible en alguno, al menos, de los capítulos de la Matemática, el texto se vuelve comprensible.

Si bien los textos geométricos contenían las figuras al parecer como meros auxiliares del razonar, de la expresión rigurosa, podían interpretarse como no indispensables al lenguaje propio de la Matemática. Pero, de suprimirse en el texto, de no imaginar la figura el lector, muchas proposiciones quedarían indemostradas o, en el mejor de los casos, mal expresadas.

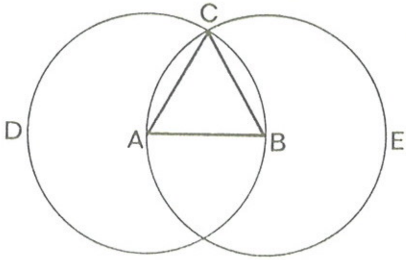
Un ejemplo de estilo geométrico.

Vamos a tomar como ejemplo, tanto del estilo de EUCLIDES —y, por tanto, del estilo de un texto que ha influido decisivamente en la redacción posterior tanto de la Matemática como de otras disciplinas—, como de la necesidad de la figura y de otros términos o signos artificiales para la expresión matemática, la *Proposición I* del Libro I de los *Elementos*[6].

en.)	*Sobre una línea recta dada finita construir un triángulo equilátero.*
exp.)	Sea *AB* la línea recta dada.
def. o esp.)	Así, está pedido construir un triángulo equilátero sobre la línea recta *AB*.
constr.)	Con centro *A* y distancia *AB* se describe el círculo *BCD;* después, con centro *B* y distancia *BA* se describe el círculo *ACE;* y desde el punto *C*, en el cual los círculos se cortan, a los puntos *A*, *B* se unen las líneas rectas *CA*, *CB*.
dem.)	Ahora, como el punto *A* es el centro del círculo *CDB*, *AC* es igual a *AB*. Además, como el punto *B* es el centro del círculo *CAE*, *BC* es igual a *BA*. Pero *CA* se ha probado que es también igual a *AB;* por tanto, cada una de las líneas rectas *CA*, *CB* es igual a *AB*. Y cosas que son iguales a la misma cosa son también iguales una a otra; por tanto, *CA* es también igual a *CB*. Luego las tres líneas rectas *CA*, *AB*, *BC* son iguales entre sí.
concl.)	Por tanto, el triángulo *ABC* es equilátero; y ha sido construido sobre la recta línea finita dada *AB*. Que era lo requerido a hacer.

Cada paso de esta demostración está justificado por un postulado, definición o noción común, tanto de los principios que utiliza como de los signos artificiales o términos propios del lenguaje geométrico. Pero hay que observar que es una demostración de carácter constructivo en la cual es imprescindible, para seguirla, realizar la plasmación material o imaginaria de los dos círculos. De lo contrario no se podría asegurar en forma alguna, la afirmación "y desde el punto *C*, *en el cual los círculos se cortan*". Es precisamente la figura la que nos "muestra" la existencia del punto *C*. Para la "demostración" completa, EUCLIDES hubiera requerido un nuevo

[6] Apoyado en texto de HEATH *Euclid's Elements*, 2.ª ed. Dover, Nueva York, 1956.



postulado, el de continuidad, que se emplea en forma implícita, no sólo en esta primera Proposición, sino en otras de los *Elementos*.

Partes formales de la proposición matemática.

También EUCLIDES es modelo en cuanto a la forma de expresión, a la manera de expresarse en cada proposición el geómetra o matemático. Tal forma de expresión fue reglamentada por la influencia griega. Es PROCLO quien cuenta las partes en que debe dividirse toda proposición que quiera ser demostrada, y que han recibido el nombre de "partes formales" de la proposición. Siguiendo de cerca la exposición de PROCLO, dichas partes son las seis siguientes:

> *Todo problema y todo teorema que está completo con todas sus partes perfectas significa que contiene en sí mismo cada uno de los siguientes elementos: enunciado* (προσασις), *exposición* (ἔκδεσις), *definición o especificación* (διορισμός), *construcción o maquinaria* (κατασκευή), *demostración* (ἀπόδειξις), *conclusión* (συμπέρασμα).

El *enunciado* establece lo que está dado y lo que está pedido en términos generales; y el perfecto enunciado consta de ambas partes claramente delimitadas.

La *exposición* parte desde lo que está dado, por sí mismo, y lo adapta para usarlo en la investigación; es decir, *establece las líneas particulares o figuras a utilizar,* y les asigna letras para ilustrar la argumentación.

La *definición* o *especificación* es realmente un replanteamiento de lo que se necesita hacer o probar, pero en términos no ya generales como en el enunciado, sino con referencia al hecho particular contenido en la exposición.

La *construcción* o *maquinaria* agrega lo necesario a lo dado "para el propósito de hallar lo pedido"; es decir, agrega otras figuras a la original para facilitar el punto siguiente, o indica cómo han de realizarse las mismas.

La *demostración* es el proceso estrictamente deductivo que, partiendo de los datos permite obtener la última parte de la exposición, la *conclusión,* que vuelve a los términos generales contenidos en el enunciado.

De todas estas partes o divisiones formales en que ha de dividirse la Proposición matemática, hay tres que son fundamentales, que jamás pueden faltar de la misma: Enunciado, Demostración, Conclusión. La definición o especificación implica, igualmente, la determinación de límites o las condiciones de posibilidad de la proposición dada con especificación de las distintas formas que puede adoptar. Y ello porque en muchas ocasiones un problema no presenta una solución en los casos generales, sino que hay que imponer ciertas condiciones a los datos del problema para obtener dichas soluciones particulares. Condiciones particulares que han de incluirse en la tercera parte de la Proposición.

El texto citado de los *Elementos* de EUCLIDES está redactado siguiendo estos preceptos, con total fidelidad. Para su mayor claridad he agregado a la izquierda del mismo cada una de las partes formales en que dicha proposición se divide.

Exposición-Invención.

Constituyen, las divisiones formales de una proposición, las reglas básicas del buen escribir geométrico, preceptos válidos para todo tiempo, y a los cuales todo escritor de *Elementos* debía someterse. Pero, naturalmente, son reglas válidas para la exposición, no para la creación matemática. Se expone, de manera ya rigurosa, lo previamente creado o descubierto. Ahora bien, la expresión también condiciona al pensamiento, a la obra de creación. Y si se pretende la obra perfecta en su aspecto expresivo, puede ocurrir que se caiga en el manierismo, en el virtuosismo lingüístico de nulo pensamiento creador, o bien en el arte de un TAYLLERAND de "disimular los pensamientos con palabras", pero muy bien dichas, construidas según los mejores preceptos de la retórica.

El paso a esta segunda fase lo va a manifestar con toda claridad la Matemática griega. EUCLIDES deja una obra perfecta tanto en su construcción lógica como en su estilo expresivo. Los matemáticos posteriores se dejarán envolver por las reglas expositivas, y su creación será mínima. Se convertirán en sistematizadores y expositores, no en creadores. Unicamente ARQUÍMEDES escapará a este dilema. ARQUÍMEDES, considerado como el genio matemático más grande de todos los tiempos, recalcará la dicotomía creación-expresión. Sus métodos de invención quedan ocultos para quebradero de cabeza de los matemáticos posteriores. Sólo en 1906 se consigue descubrir una carta suya a ERATÓSTENES, en la cual, como tal carta, no como obra acabada, deja traslucir sus métodos creadores, muy alejados de las reglas, de los preceptos ortodoxos.

3. EL LLAMADO "ESTILO ALGEBRAICO-GEOMÉTRICO".

Lo figural.

Una de las características esenciales de la Matemática griega es el haber sido eminentemente espacial o, con términos de DAVID GARCÍA BACCA, figural. En ella domina lo visible, la figura, sobre lo inteligible o más puramente abstracto, el número y su enlace formal. El número se halla supeditado, siempre, a la figura, al punto. De aquí que, como ya he indicado, EUCLIDES no tenga que hacer referencia explícita alguna a la figura, porque esta se encuentra radicalmente implícita en su razonar. Ello conduce, en ocasiones, a un álgebra geométrica espacial, no simbólica o aritmética, y condiciona, de modo evidente, no sólo a a la Matemática, sino a su propio lenguaje expresivo. De esta forma, el producto de dos números, por ejemplo, vendrá representado y expresado por un rectángulo cuyos lados son las líneas que representan a cada uno de los números factores. Si ambos son iguales, el producto de los mismos dará lugar a un *cuadrado;* si el producto es de tres factores iguales, el resultado es un *cubo;* si distinto, un *paralelepípedo.* Sumar o restar cantidades representadas por líneas equivale a alargar o acortar una de las líneas dadas. En este aspecto, la teoría de las proporciones elaborada por EUDOXIO DE CNIDO era fundamental, así como el proceso de aplicación de áreas.

Se encuentran, así, en el propio EUCLIDES, proposiciones expresadas y demostradas en lenguaje geométrico, que pueden ser traducidas de modo inmediato a lenguaje simbólico algebraico. Tomemos las primeras Proposiciones del Libro II de los *Elementos*, por ejemplo. La primera establece:

> *Si hay dos líneas rectas, y una de ellas se corta en cualquier número de segmentos, el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta completa y cada uno de los segmentos.*

Es proposición que expresa, en lenguaje algebraico, la propiedad distributiva del producto respecto a la suma y que se puede representar

$$a\,(b + c + \ldots.) = ab + ac + \ldots$$

La proposición segunda establece:

> *Si una línea recta se corta al azar, el rectángulo contenido por el total y cada uno de los segmentos es igual al cuadrado del total.*

$$(a + b)\,a + (a + b)\,b = (a + b)^2$$

La proposición cuarta:

> *Si una línea recta se corta al azar, el cuadrado del total es igual a los cuadrados sobre los segmentos y dos veces el rectángulo contenido por los segmentos.*

La demostración estrictamente geométrica de esta última proposición, que equivale al desarrollo del cuadrado de un binomio, ha quedado como modelo de este género algebraico-geométrico o analítico-geométrico, reduciéndose la longitud de la misma a partir de los trabajos de CLAVIUS, pero ya con un sentido más algebraico. En lenguaje estrictamente simbólico esta proposición es

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Otro ejemplo de estilo geométrico.

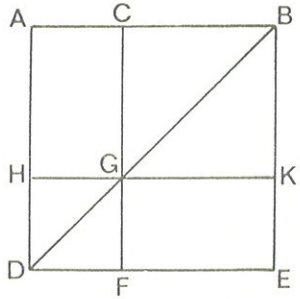
Dado su carácter de modelo en cuanto al estilo geométrico, transcribo tal proposición, esta vez sin indicaciones de las partes formales en que se divide que, por otra parte, se encuentran muy claramente delimitadas.

Si una línea recta se corta al azar, el cuadrado del total es igual a los cuadrados sobre los segmentos y dos veces el rectángulo contenido por los segmentos.

Sea la línea recta AB cortada al azar en C; digo que el cuadrado sobre AB es igual a los cuadrados sobre AC, CB y dos veces el rectángulo contenido por AC, CB.

En el cuadrado $ADEB$ construido sobre AB unimos BD; a partir de C sea CF la paralela trazada bien a AD, bien a EB, y a partir de G sea HK la paralela trazada a AB o a DE.

Entonces, como CF es palalelo a AD, y BD los corta a ambos, el ángulo exterior CGB es igual al ángulo interior y opuesto ADB. Pero el ángulo ADB es igual al ángulo ABD, ya que el lado BA también es igual a AD; por lo tanto, el



ángulo CGB es también igual al ángulo GBC, ya que también el lado BC es igual al lado CG. Pero CB es igual a GK, y CG a KB; luego GK también es igual a KB; por consiguiente, $CGKB$ es equilátero.

Digo ahora que también es de ángulos rectos. Porque, como CG es paralelo a BK, los ángulos KBC, GCD son iguales a dos ángulos rectos. Pero el ángulo *KBC* es recto; luego el ángulo *BCG* es también recto, por lo que los ángulos opuestos *CGK*, *GKB* también son rectos.

Por consiguiente, *CGKB* es de ángulos rectos; y se ha probado también que es equilátero; luego es un cuadrado; y está construido sobre *CD*.

Por la misma razón *HF* es también un cuadrado, y está construido sobre *HG*, es decir, *AC*.

Luego los cuadrados *HF*, *KC* son los cuadrados sobre *AC*, *CB*.

Ahora, como *AG* es igual a *GE*, y *AG* es el rectángulo *AC*, *CB*, porque *GC* es igual a *CB*, entonces *GE* es también igual al rectángulo *AC*, *CB*.

Por consiguiente, *AG*, *GE* es igual a dos veces el rectángulo *AC*, *CB*.

Pero los cuadrados *HF*, *CK* son también los cuadrados sobre *AC*, *CB*; por lo tanto, las cuatro figuras *HF*, *CK*, *AG*, *GE* son iguales a los cuadrados sobre *AC*, *CB* y dos veces el rectángulo contenido por *AC*, *CB*.

Pero *HF*, *CK*, *AG*, *GE* hacen el total *ADEB*, que es el cuadrado sobre *AB*.

Por consiguiente, el cuadrado sobre *AB* es igual a los cuadrados sobre *AC*, *CB* y dos veces el rectángulo contenido por *AC*, *CB*. Luego, etc.
Q.E.D.

Por este procedimiento, base de muchos de los términos que todavía hoy se utilizan, los griegos llegaron a resolver problemas de carácter algebraico de segundo grado. Y aún más, en ARQUÍMEDES —auténtico virtuoso de este lenguaje— se puede encontrar el cálculo del centro de gravedad del trapecio parabólico, ligando el segmento desconocido c con los segmentos conocidos a, b, de tal forma que la razón $(a - c) : (a - b)$ es igual a la razón entre dos segmentos cuya expresión algebraica actual es, respectivamente,

$$3b\sqrt{b} + 6b\sqrt{a} + 4a\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}$$

y

$$5b\sqrt{b} + 10\sqrt{a} + 10a\sqrt{b} + 5a\sqrt{a}.$$

2. ESTILO POETICO

Al hablar de la necesidad del signo propiamente matemático me permití citar las tercetas de TARTAGLIA acerca de la resolución de la ecuación de tercer grado. Aunque escrito en tercetas, el texto no puede ser considerado como una bella pieza poética. Igualmente, podían citarse pasajes —hasta libros enteros— escritos en verso y versando acerca de las Ciencias Exactas. Así, el poema astronómico-matemático de GABRIEL CÍSCAR [7], que ni es libro de poesía, ni libro de astronomía, sino híbrido reliquia de un gusto algo extraño revestido de la consideración de didactismo. O los sonetos de GEORGE BOOLE —como el dedicado al Número Tres [8]—, o el de EREHSMANN, ya en tono algo más jocoso, dedicado a la Estructura [9]. Este tipo de escritos no entra en la categoría que denomino Estilo poético. Aquí va a ser aplicado a la Matemática hindú, a lo que de ella nos ha llegado. Y no sólo porque las obras estén íntegramente redactadas en verso, sino porque esa misma redacción condiciona la propia matemática que se va construyendo. Un poema estronómico-matemático es mero pasatiempo; un Tantra hindú es un verdadero tratado matemático. Pero si se aplica el término "poético" al estilo en el cual están redactados los tratados hindúes se deben precisar algunos puntos.

En primer lugar, el sánscrito es lengua de una riqueza extraordinaria hasta fonética, pero no así las traducciones que de la misma pueden hacerse, casi obligadamente en prosa. En segundo lugar, para un español, le es obligado reconocer un hecho: no existe traducción alguna al castellano de los tratados hindúes, ni tampoco trabajo consistente sobre la Matemática de este pueblo. Si ya estudios de los aportes de la Matemática griega son escasos, los realizados respecto a la hindú, nulos. Por ello, dado que es terreno virgen en la literatura castellana, pueden cometerse errores interpretativos en mayor escala que en otros terrenos; que sólo puede haber solidez en una visión de una ciencia cuando existen estudios parciales acerca de la misma. Aquí debo reconocer mi gratitud para

---

[7] *Poema físico-astronómico en siete cantos,* 2.ª ed. Madrid, 1861.

[8] En Rev. *Mind,* abril 1948. Reproducido en A. ASTI VERA: *George Boole precursor de la Lógica simbólica.* Buenos Aires, 1968, p. 11.

[9] *Catégories et structures.* Ed. Dunod, París, 1965, pp. V y 341.

don Justo RAMOS —ya fallecido—, quien canalizó mis intentos —que en tal quedaron— de aprender sánscrito y tuvo la gentileza de traducir algún pasaje, para mí oscuro, de la obra de ARYABHATA.

Dos son los hechos con que se encuentra todo aquel que pretende enfrentarse con la Matemática hindú. Por una parte, su íntimo enlace con la astronomía. Los pasajes estrictamente matemáticos se encuentran como meros capítulos, los menos, de grandes tratados astronómicos, los tantras. No hay, al parecer, independencia en la materia, sierva la Matemática de una ciencia experimental, aunque condicionándola fuertemente. En segundo lugar, el que dichos tantras aparecen escritos en verso.

Este último condiciona, de modo radical, la expresión. No se puede olvidar que el primer gran lingüista-gramático conocido, regulador de la gramática, fuera PANINI. El juego de vocales y consonantes impone su dominio sobre la expresión. Así, la composición en la cual se expresa el astrónomo-matemático, el "çloka", se compone de dos versos, con obligación de que la quinta sílaba sea breve. Ello conduce a algunos comentadores a la absoluta convicción de que el conocimiento era eminentemente hablado, y la fonética prevalecía sobre el concepto. Los "çlokas" o estrofas serían, así, meras composiciones para recitado y recuerdo de los conocimientos y no verdaderas obras, escritas y planteadas bajo estos condicionantes lingüísticos. Ello lo desdicen los comienzos de los capítulos, cuya estrofa suele ser o una invocación a los dioses, o una breve noticia del autor, fecha, lugar, motivo por el cual se escribe. Así, en el *Gonitam*, de ARYABHATA, se lee:

> *Habiendo rendido homenaje a Brahma, a la Tierra, a la Luna, a Mercurio, a Venus, al Sol, a Marte, a Júpiter, a Saturno y a las constelaciones,*
>
> *Aryabhata expone aquí, En Pataliputra* (*Ciudad de las flores*) *una ciencia excelente.*

Por su parte, BRAHMAGUPTA, dando cuenta de sí, afirmará:

> *En el reino de Srî Vyâghamukha de la dinastía Srî Châpa, quinientos cincuenta años después del Rey Saka, Brahmagupta, el hijo de Jishnu, a la edad de treinta, compuso el Brahmagupta Siddhânta, para alegría de matemáticos y astrónomos.*

Y a BHASKARA —por citar a los tres más grandes matemáticos hindúes— se le atribuye como motivación para componer su *Lilavati* la desgracia de que su hija no pueda casarse y comenzar:

Escribiré un libro con tu nombre que será recordado en todo tiempo; porque un buen nombre es una segunda vida y el establecimiento de eterna existencia.

Si fueran meras reglas al tipo ya citado de TARTAGLIA, no tendría objeto el enfoque dado por los autores, sus motivaciones y el lugar tan esencial que prestan a su obra.

Sin embargo, es evidente que si en una estrofa de dos versos y con el condicionamiento que imponen las rimas, se quiere dar un enunciado matemático, la expresión de este ha de resultar, por una parte, muy concisa; por otra, oscura, y, finalmente, la demostración que desde un enfoque clásico griego se mostraba necesaria, aquí se muestra imposible. Consecuencia fundamental, la necesidad del comentario, en prosa, pero ya desde planos distintos, realizado no por el mismo autor, sino por autores posteriores, salvo en el caso de BHASKARA. Y el comentario no suele ser, en general, muy afortunado. En ello influye la rivalidad de las distintas escuelas —así ARYABHATA escribe en Pataliputra, ciudad imperial, pero en decadencia en su época, mientras que la escuela rival se encuentra en Ujjayini, que va a convertirse en el centro de la ciencia hindú; y ARYABHATA será comentado por PARAMADIÇVARA, perteneciente precisamente a Ujjayini...—, el cambio de dialectos, el transcurso del tiempo, la propia oscuridad del texto a comentar con sus posibles interpretaciones...

Este estilo, al impedir en él la explanación de la demostración, se ha querido contraponer al estilo geométrico griego en cuanto al rigor. El rigor demostrativo griego, absoluto; no así el hindú, ausente. Naturalmente esta contraposición depende del concepto previo que se tenga del rigor. Ya he señalado cómo, a pesar de su arquitectura deductiva, la Matemática griega se presenta como esencialmente figural, siendo imprescindible la figura concreta para que la demostración tenga lugar. Sin la figura, el rigor demostrativo tan comentado y admirado desaparece. Pero tal condicionante obliga a una expresión en tres fases: enunciado general, particularización, vuelta al enunciado general o generalización. Y tanto la particularización como la generalización de una proposición se utilizan como axiomas lógicos implícitos, ausentes de la previa enunciación axiomatizadora. A su vez, los matemáticos hindúes, por el condicionante del lenguaje sólo se mueven —en el terreno geométrico— en lo particular. Les basta el enunciado general, la construcción de la figura, aquí sí de forma explícita, y, en BHASKARA, un "¡Mira!" para la demostración del teorema de PITÁGORAS, por ejemplo. Pero es tanto en ese imperativo como en la figura en los que se condensa, precisamente, todo el aparato demostrativo. La prolijidad de un EUCLIDES queda absolutamente eliminada. No hay espacio en un "çloka" para realizar la demostración junto al enunciado. La figura se presenta, aquí, en condicionante muy parecido a la figura en el análisis realizado por WEIERTRASS, matemático considerado como modelo de categoría psíquica lógica. Pero, como cuenta HADAMARD, la figura que emplea WEIERTRASS es tal que de ella se deduce, realmente, todo. Sobran palabras. Exige, en contrapartida, un mayor alcance del lector. Por otro lado, ciertamente la geometría estaba en condiciones para ser modelada en arquitectura axiomática. No así el número. La necesidad de axiomatización en este terreno no surge hasta bien entrado el siglo XIX. Y en este terreno, poca diferencia existe entre el rigor griego y el rigor hindú. El matemático hindú gusta del número y del signo para representarlo. Y no sólo el matemático. Ya en los poemas védicos se muestra este gusto por la designación de números grandes. Aparecen nombres para las potencias de diez hasta el lugar catorce. Juegos que exigen cierta familiaridad con la Aritmética los encontramos en MAHAVIRA DE MYSORE, donde se ve que al multiplicar 14287143 por 7 se obtiene un número de la forma 100010001, pero intercalando un 5 entre 8 y 7 en el número dado y multiplicando nuevamente por 7 se obtiene un número de la forma 1000000001.

Ahora bien, la propia necesidad de limitarse al enunciado de una proposición y de su solución en un "çloka", motivará que el matemático hindú, al condensar, se viera constreñido a la creación de unos signos especiales para la designación de los números. Los nombres de estos, en general, no suelen dar paso a versos perfectos. El hecho es que los matemáticos hindúes, a partir de ARYABHATA, utilizan para el análisis indeterminado —la actual teoría de números— notaciones particulares para designar las incógnicas. Tal creación, por parte de ARYABHATA, de una notación simbólica abreviada, ha conducido a algún comentarista a la afirmación de que el sistema decimal posicional es desconocido en la India. Lo cual rebate el propio ARYABHATA cuando en su *Ganitam,* al dar las reglas para la extracción de las raíces cuadradas y cúbicas, con separación en grupos de dos o de tres cifras, respectivamente, hace ligar signos especiales fijos para cada número con la posición especial que ocupen. Lo cual es clara referencia al sistema decimal posicional. Pero es desde BRAHMAGUPTA cuando el empleo de los colores se hace definitivo para designar incógnitas, mientras que BHASKARA utiliza las letras del alfabeto como signos para las indeterminadas, revolución que hay que volver a atribuir al Occidente siglos después, aunque el siguiente texto de BRAHMAGUPTA es claro, cuando define al matemático, al sabio o "acharya", con las palabras:

> *Aquel que conozca el uso del método de pulverización, las cifras, las cantidades positivas y negativas, la eliminación del término medio, los símbolos y expresiones, aquél será un maestro entre los sabios.*

Método de pulverización o "kuttaka", cifras, símbolos y expresiones hacen clara referencia a la Aritmética y los primeros puntos del álgebra. La primera incógnita será designada por "yavat-tavat". Las demás, por colores. ¿Pudo sugerir una mala trasliteración de "yav" en "sha", en árabe, el constante empleo de "cosa", *res,* en el medievo para designar la cantidad desconocida? No puede olvidarse que AL-KWARIZMI conoce los tantras de BRAHMAGUPTA, los traduce, casi copia. Su tratado "al-geber y mukabala" se apoya tanto en PTOLOMEO como en BRAHMAGUPTA.

Igualmente BHASKARA hará referencia al color para identificarlo con la incógnita. Escribirá:

> *yavat-tavat y los colores "negro", "azul", "amarillo" y "rojo", y otros más, han sido elegidos por profesores venerables como nombres de valores de cantidades desconocidas.*

Abreviando, *yâ,* cosa, designará la primera potencia de la incógnita, mientras que *yâv* designará su cuadrado, de *yâvat-varga.* Con lo cual una ecuación de segundo grado que hoy se escribiría como

$$18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$$

vendrá representada por las dos líneas siguientes

$$\left.\begin{array}{l} yav\ 18\ ya \cdot ru \cdot \\ yav\ 16\ ya\ 19\ ru\ 18 \end{array}\right\}$$

que quieren decir

$$\begin{array}{l} 18x^2\ 0x\ 0 \\ 16x^2\ 9x\ 18 \end{array} \quad \text{o bien } 18x^2 + ox + 0 = 16x^2 + 9x + 18$$

Las consideraciones anteriores han pretendido mostrar cómo la influencia del medio lingüístico expresivo es uno de los factores condicionantes del pensamiento matemático, en el cual no cabe la demostración, sino el enunciado de las reglas, obliga a condensar creando un simbolismo pertinente, hace el texto oscuro. Junto a estos elementos hay, en ese mismo condicionante, otro aspecto del estilo poético. La auténtica poesía no puede olvidar su entronque con la realidad. Los matemáticos hindúes no la olvidan. Si aparecen expresiones en que se compara el cero con las estrellas, o se compara el movimiento de la Tierra alrededor de su eje con el del barquero que cree que quien se mueve son las orillas y no su barca, también aparecen problemas de la vida real, de la sociedad de su época. Así, en BHASKARA, considerado como el más grande poeta y sabio —siempre aparece como BHASKARACARYA, y KAYE recoge una inscripción en templo antiguo: "Triunfador es el ilustre BHASKARACARYA cuyos pies son reverenciados por el sabio, eminentemente sabio..., un poeta... dotado con justa fama y mérito religioso..."—, nos dará información del precio de las esclavas, de su depreciación con la edad. Y estos temas, a la vez, surgirán en plena poesía. Así, en su *Lilavati* —título que puede traducirse por *La encantadora, La bonita*— plantea problemas en términos como los siguientes:

> *Amable y querida Lilavati, cuyos ojos son como cervatillos, descíframe cuáles son los números resultantes de 135 multiplicado por 12. Si tú eres diestra en multiplicación, ya por el todo o por las partes, ya por división o separación de dígitos, dime, feliz muchachita, cuál es el cociente del producto cuando divido por el mismo multiplicador.*

Años antes, ARYABHATA formularía alguno de sus problemas en los términos

Hermosa niña de ojos radiantes, dime, si tú has comprendido el método de inversión, ¿cuál es el número que multiplicado por 3, agregándole las 3/4 partes del producto, dividiendo por 7 y disminuyendo en 1/3 el cociente, multiplicando por sí mismo, disminuyéndole en 52, extrayendo la raíz cuadrada, sumándole 8 y dividiéndole por 10, da el número 2?

Ejemplo de Estilo poético.

Modelo o ejemplo de este estilo, con las dificultades que ya he señalado respecto a una trasliteración y traducción fieles, podría ponerse el *Ganitam,* de ARYABHATA. Treinta y tres "çlokas" o parejas lo componen y es el segundo capítulo del *Aryabhatiyam* o primero de *Aryashtbsata* —que contiene ochocientos dísticos—. De dichas estrofas traduzco las siguientes —tras versión de LEÓN RODET sobre Texto de 1874 publicado por KERN en Leyden[10]:

X. Sumad 4 a 100, multiplicad por 8, sumad nuevamente 62000, he aquí para un diámetro de dos "ayutâs" el valor aproximado de la circunferencia del círculo.

XIX a. El número de términos que se quiera, disminuido en 1, dividido por 2, aumentado (del número de términos) que preceden, multiplicado por la razón y aumentado en el primer término, es la media; que multiplicada por el número elegido es la suma buscada.

XIX b. O bien se multiplica (la suma) del primero y último por la mitad del número de términos.

XX. El número de términos es (la suma) multiplicada por ocho veces la razón, sumada al cuadrado del exceso de dos veces el primer término sobre la razón; se toma la raíz cuadrada, que se disminuye en dos veces el primer término: se divide por la razón, se suma 1 y se toma la mitad.

XXI a. (Siendo) 1 la razón y primer término de las bases (tomad) el número de términos por primero, 1 por razón, se hace el producto de tres (términos consecutivos), se divide por seis, y se tendrá el contenido de la pila.

---

[10] "Journal Asiatique", t. XIII, 1879, pp. 393-434.

XXI b. O bien, el cubo del número de los términos más uno menos la raíz (cúbica) de ese cubo (dividido por seis).

XXII a. El último término, éste más uno, éste más el número de términos: del producto de estos tres números tomad el sexto, es el volumen de la pila de los cuadrados.

XXII b. El cuadrado de la pila (de los números simples) es el volumen de la pila de los cubos.

XXIII. Si del cuadrado de una suma se resta la suma de los cuadrados, la mitad del resultado es el producto de los (números tomados como) factores.

XXIV. De un producto multiplicado por el cuadrado de 2 y aumentado en el cuadrado de la diferencia tomad la raíz: agregad y restad la diferencia (tendrá, respectivamente), los dos factores dividiendo por 2.

XXVIII. Las multiplicaciones proceden de las divisiones, las divisiones de las multiplicaciones, lo que era beneficio se convierte en pérdida, la pérdida se convierte en beneficio.

XXIX. La suma de un cierto número de términos restada sucesivamente por cada uno de esos términos (forma una sucesión) que se suma totalmente; se divide por el número de términos menos uno, y se obtiene el valor de la suma.

XXX. Por la diferencia entre "gulikas" —objetos— divide la diferencia de las rupias que poseen dos personas: el cociente es el valor de un "gulika" si las fortunas son iguales.

XXXI. Dividiendo en marcha opuesta la distancia por la suma de las velocidades; en marcha acorde, la distancia por su diferencia, los dos cocientes son los tiempos de encuentro de los dos (móviles) en el pasado o en el futuro.

XXXII-XXXIII. Dividid el denominador del valor provisional mayor por el denominador del valor más pequeño; los restos se dividen uno al otro sucesivamente (y los cocientes se sitúan uno debajo del otro): se toma un factor arbitrario, y se le agrega la diferencia de los valores provisionales. Se multiplica el inferior por el superior (inmediato) y se agrega el último (y así sucesivamente); se termina por el denominador del menor valor provisional: el resto multiplicado por el denominador del mayor (es la parte) que se agrega al mayor de los valores provisionales para tener el valor conveniente en los dos denominadores (a la vez).

El "çloka" X nos da el valor aproximado de π. Hechas las operaciones se obtiene $\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$. En otros lugares, ARYABHATA utiliza 22/7 como tal aproximación. El primero es atribuido por los matemáticos árabes, como AL-KWARIZMI, a invención hindú. El segundo es el más comúnmente empleado por ARQUÍMEDES. A partir del "çloka" XIX, el tema se convierte en el de progresiones. La primera regla, *a*), da la suma de los n términos empezando por uno cualquiera a_p. Si el número de términos es n la fórmula *a*) da $S = \left((\frac{n\text{-}1}{2} + p) r + a_p \right) n$. La segunda, hace comenzar la progresión en el primer término y es la bien conocida $S = \left(\frac{n\text{-}1}{2} r + a_1 \right) n$.

El XX da la fórmula del número de términos en función de los restantes elementos de la progresión a partir de la XXI *a*). Lo que conduce a una ecuación de segundo grado cuya resolución permite enunciar la regla XX: $n = \left(\frac{-2a + \sqrt{S \cdot 8r + (2a_1 - r)^2}}{r} + 1 \right)^{1/2}$.

Los "çlokas" siguientes tratan de los números que a partir del siglo XVIII se van a denominar "números de Bernoulli". La XXI *a*) no es más que el resultado de la suma de los n primeros números llamados clásicamente *piramidales*. La XXII *b*) nos indica que $\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y que $(\Sigma n)^2 = \Sigma n^3$. El XXVIII es la famosa regla de inversión hindú. En este punto, el comentador de ARYABHATA plantea un problema en los términos siguientes:

¿Cuál es el número que multiplicado por 3, *dividido por* 5, *sumado* 6, *extraída la raíz cuadrada, restado* 1, *elevado al cuadrado da como resultado* 4?

El procedimiento consiste en realizar el camino opuesto al planteado, obteniéndose para dicho número el valor 5.

Muy concisa, pero muy general, es la regla dada en el XXX: resolución de una ecuación de primer grado en una incógnita. Las dos últimas, reunidas en una sola regla en la traducción, dan el método llamado de Euler para la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas diofántico.

3. ESTILO COSICO

En el Renacimiento, el enfoque matemático va a ser, fundamentalmente, de carácter aritmético y no espacial. La capacidad abstractiva hindú, numeral esencialmente, ejerce su influencia sobre el razonar de los algebristas italianos y alemanes de modo notable. Se pasa a la elaboración de un álgebra de tipo aritmético y no estrictamente espacial. Pero bajo la influencia griega, principalmente euclídea y arquimediana, la terminología continúa siendo en gran medida espacial. Ello da lugar a un renacimiento de la mística numérica, cuyo reflejo se puede encontrar en la *Divina Proporción*, de LUCA PACIOLI, quien con esta obra y con la *Summa arithmeticae*, va a dar culmen a toda la obra aritmético-algebraica realizada hasta finales del siglo XV.

Junto al renacer místico-pitagórico numérico y el originado en la geometría en cuanto a la proporción áurea —apoyado en que son los artistas, principalmente, los ocupados a la vez en cuestiones matemáticas y de ingeniería— se encuentra un lenguaje ciertamente desconcertante, y muy oscuro. En cuanto a la estructura expositiva no se sigue el esquema griego de fijar en primer lugar las definiciones de los términos a utilizar, a continuación las hipótesis que se postulan e inmediatamente las proposiciones o teoremas a demostrar, con sus divisiones formales que comienzan en el enunciado y terminan en la conclusión. En cuanto a los términos se mantienen algunos clásicos, como los de "cuadrado" o "cubo", pero a caballo entre su sentido geométrico espacial y su puro sentido algebraico de producto de un número por sí mismo dos o tres veces, respectivamente. Se buscan abreviaturas para las nuevas relaciones y conceptos, entre los cuales aparece el papel de la variable independiente con un sentido ya prácticamente algebraico, aunque se la represente por *cosa,* bajo la influencia todavía del caso concreto, del problema de la vida ordinaria, aritmético, y que provoca que a los algebristas se les denomine *cosistas.*

En el Capítulo IV del primer tratado de su *Divina Proporción,* LUCA PACIOLI da una justificación de esta búsqueda y empleo de un simbolismo abreviador adecuado, que algunos siglos después se ha reformulado considerándola enteramente original. LUCA PACIOLI se expresa en los términos siguientes:

> *Usaremos, además, muchos varios caracteres y abreviaturas que en tales facultades se acostumbra usar, máxime para nosotros, tal como se requiere también en todas las demás. Y así la medicina usa los suyos para escrúpulos, onzas, dracmas y manípulos; los plateros y joyeros para granos, dineros y quilates; los astrólogos los suyos para Júpiter, Mercurio, Saturno, Sol, Luna, y así los otros usan los suyos. Y los mercaderes, para liras, sueldos, gruesas y dineros, los usan también por brevedad. Y esto sólo para evitar la prolijidad de la escritura y también de la lectura, pues de otro modo se llenaría de tinta mucho papel. De modo parecido, nosotros también en las matemáticas, para el álgebra, es decir, práctica especulativa, usamos otros que significan* cosa, censo *y* cubo, *y los demás términos, como se ve en nuestra citada obra. También en este tratado usaremos algunos de ellos, y son los que hemos puesto en la tabla al comienzo. Asimismo, estos nombres:* multiplicación, producto *y* rectángulo *significan la misma cosa; y también éstos:* cuadrado *de una cantidad y* potencia *de alguna cantidad son la misma cosa... Es conveniente, pues, que estas cosas se tengan en cuenta en el curso de nuestra obra, para que no haya equívocos sobre el sentido de las palabras* [11].

Si el aparente afán es meramente abreviador, el resultado para la expresión de la obra matemática es lamentable. El estilo que resulta de esta mezcla de términos y de sus distintas posibles interpretaciones es algo más bárbaro y desconcertante que el de los griegos al que pretenden seguir encadenando las proposiciones bajo una cascada de Proposiciones y Teoremas. Y ello, además, acentuado porque se comienza a escribir en lengua romance y no en latín, y hay que mezclar términos del lenguaje romance con términos y abre-

---

[11] Ed. Losada, Buenos Aires, 1946, con prólogo de ALDO MIELI y traducción de la edición de 1509 de Ricardo RESTA.

viaturas latinas y griegas, al carecer de terminología ya establecida en romance.

Del propio LUCA PACIOLI, de su *Divina Proporción,* dirigida a un más amplio público que su *Summa,* a los artistas esencialmente, pueden tomarse dos breves fragmentos. En el Capítulo XXIX, "De la construcción y formación del cuerpo llamado icosaedro", se puede leer:

> Entonces, puesto que el cuadrado de *qn* es, por la tercera del decimotercero, quíntuplo del cuadrado de *qm,* el cuadrado de *pn* será también, por la decimoquinta del quinto, quíntuplo del cuadrado de *lm,* pues, por la cuarta del segundo, el cuadrado de *pn* es cuádruplo del cuadrado de *qn,* y también el cuadrado de *lm* es cuádruplo del cuadrado de *qm,* por la misma. Y el cuádruplo es al cuádruplo como el simple es al simple, según afirma la decimoquinta del quinto...

Las expresiones como "por la tercera del decimotercero" y sus equivalentes, que enladrillan el texto citado, quieren decir "por la tercera conclusión del Libro XIII de los *Elementos,* de EUCLIDES", que se supone —según el texto anteriormente transcrito, y casi todos los demás— que el lector tiene a la vista a la vez que el anterior o bien se lo ha aprendido de memoria, incluidos los ladillos y su orden. Las citas que realiza PACIOLI de esta obra euclídea —convertida en el texto base de toda formación matemática— corresponden además a la edición del texto latino de CAMPANO, Venecia 1482.

El segundo ejemplo del texto pertenece al Tercer Tratado de la misma obra, que corresponde, en realidad, a la traducción romance del *Libellus,* de PIERO DELLA FRANCESCA, recopilación de problemas de carácter geométrico. El Caso 18 establece:

> *Si cuatro lados de un cuadrado equilátero son iguales a* 2/9 *de su superficie, hallar la cantidad de los lados.* Tú tienes que 2/9 de censo es igual a cuatro cosas; divide 18 cosas por 1 y da 18, que es la cosa correspondiente a un lado del cuadrado; multiplica esto por sí mismo y da 324. Los 2/9 de 324 equivalen a 72, es decir, a los cuatro lados, pues, siendo cada lado igual a 18, multiplica 4 por 18 y da 72, que es 2/9 de 324.

Textos de matemáticos posteriores abreviarán ya radicalmente la escritura, con lo cual aparecerán notaciones del tipo

$$1\,C\,m.\,4\,Z\,p.\,3\,R\,m.\,6$$

para indicar lo que hoy he escribe

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6$$

donde R indica la *cosa* o *raíz*; Z el cuadrado de la cosa o *zensus, census*; C el cubo de la cosa o *cubus*; etc.; p y m son los signos para indicar las operaciones de suma y resta, de *plus* y *minus*. Avanzando en el sentido operacional del signo artificial, VIETA, con su *logística speciosa,* escribirá

$$\frac{B \text{ in } A}{D} + \left\{ \frac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F} \right\} \text{aequalis } B$$

como equivalente a la expresión actual

$$\frac{ax}{b} + \frac{ax - ac}{d} = b$$

o también

$$A \textit{ cubus } B \textit{ in } A \textit{ quad. } 3A \textit{ in } B \textit{ quad. } 3B \textit{ cubo aequalis } \overline{A + B} \textit{ cubo}$$

que no es otra cosa que el cubo de un binomio

$$a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = (a + x)^3$$

Expresión mezcla de abreviatura de términos latinos, aunque se escriba en romance, y signo propio abreviador, más cercana a nuestra concepción actual de la expresión algebraica, carece, sin embargo, de sistematización alguna en su empleo. Conceptos algebraicos que se van depurando, carecen de notación adecuada que no impide, ciertamente, el avance de la Matemática, pero que exige, ya, para este definitivo avance, una sistematización completa y universal, sólo posible mediante un cambio radical en la conceptuación de la Matemática, convertida, realmente, en otra disciplina.

4. ESTILO ALGEBRAICO-CARTESIANO

1. Descartes y la Matemática.

Influencia cósica.

Al comenzar su auténtica preocupación por la Matemática, Descartes, como no podía ser de otra forma, hace uso de las notaciones y terminología cósicas, bajo el influjo de Cristóforo Clavio, cuyos textos estudió en el colegio de La Flèche. Así, en carta a Beckmann, de 26 de marzo de 1619, observamos esa influencia, tanto en notación cósica como en el enfoque algebraico; pero, a la vez, el intento por librarse o superar ambos aspectos. Es notable observar la clasificación tan complicada —aunque Descartes busca la completa simplificación y unificación de todos los casos, como indica claramente en esta misma carta al hablar de la *Matemática universal,* de su ciencia general, con recuerdos del *Ars brevis,* de Lulio, editado en 1481, pero sin la charlatanería que atribuye a esta obra— de las ecuaciones cúbicas. Tras referirse a que ha encontrado cuatro nuevas demostraciones gracias a un compás de su invención, se puede leer:

> *Las otras tres se refieren a tres géneros de ecuaciones cúbicas: el primero, entre número absoluto, raíces y cubos; el segundo, entre número absoluto, cuadrados y cubos; el tercero, en fin, entre número absoluto, raíces, cuadrados y cubos. Para esos tres géneros de ecuaciones he encontrado tres demostraciones, de la que cada una debe extenderse a los términos variados a causa de la variedad de los signos + y —. No he acabado aún la discusión de todos; pero, a mi parecer, lo que he encontrado para los unos, lo aplicaré fácilmente a los otros. Y, por ese medio, se podrán resolver cuatro veces más cuestiones y mucho más difíciles, que por el álgebra común. Cuento, en efecto, trece especies diferentes de ecuaciones cúbicas, mientras que no hay más que tres para las ecuaciones comunes; a saber, entre* 1Z *y* OH + ON, *o* OH — ON, *o, en fin,* ON — OH. *Y ya busco otra cosa para la extracción de las raíces compuestas al mismo tiempo de varias denominaciones diferentes. Si lo encuentro, así lo espero, pondré enteramente en orden esta ciencia, siempre que pueda vencer mi pereza natural...*[12].

[12] Todas las citas de Descartes, de *Oeuvres philosophiques,* ed. Garnier, París, 1963.

Las tres ecuaciones cúbicas a que hace referencia DESCARTES, teniendo en cuenta los signos + y — y considerando a, b, c, como parámetros, no son otras que las tres siguientes:

$$\pm a \pm x = x^3$$
$$\pm a \pm bx^2 = x^3$$
$$\pm a \pm bx \pm cx^2 = x^3$$

De aquí que, combinando dichos signos + y —, aparezcan dieciséis casos. Pero como a principios del siglo XVII los números complejos no tenían aún carta de ciudadanía en la Matemática, se consideraban como ecuaciones imposibles aquellas que carecían de raíz real. Y están en este caso, y por ello el carácter de imposibles y su exclusión obligada, las

$$-a - bx = x^3$$
$$-a - bx^2 = x^3$$
$$-a - bx - cx^2 = x^3$$

quedando de esta forma las trece indicadas en el texto cartesiano. Formas que suelen estudiarse actualmente de modo global en la ecuación de tercer grado y no como "especies diferentes de ecuaciones". En cuanto a las "ecuaciones comunes" son las de segundo grado, que DESCARTES considera como de tres especies y que, en signos actuales, son

$$x^2 = ax + b$$
$$x^2 = ax - b$$
$$x^2 = -ax + b$$

el cuarto caso, $x^2 = -ax - b$, también es imposible.

En cuanto a la notación cósica, se observa cómo DESCARTES mantiene el signo Z para el cuadrado, H designa la raíz, mientras que N es el signo apto para representar al número simple y absoluto. A estos signos procedentes de CLAVIUS, agrega O para indicar una cantidad cualquiera, pero siempre conocida.

Crítica al análisis geométrico y al álgebra especiosa.

El empleo de esta notación y terminología cósicas es breve. A DESCARTES no le interesa la Matemática por la Matemática misma. Busca en ella, como antes PLATÓN, como en su misma época PASCAL, como poco después LEIBNIZ, como después la Lógica simbólica, un modelo del razonar. Y como tal modelo, DESCARTES inquiere por las notas esenciales o características de la Matemática, antes que dedicarse a desarrollarla como tal disciplina. Pero es en esta búsqueda, precisamente, en la cual realiza dos de sus mayores aportes a la disciplina: crear la Geometría Analítica, unificadora tanto de las notaciones como del método de las dos ramas clásicas, Aritmética y Geometría; crear una sistematización rigurosa de las notaciones o símbolos algebraicos. Y, con ello, dar paso a los conceptos clave de toda la "nueva" Matemática, conceptos en torno a los cuales va a girar, junto al de límite, la Matemática desde el XVII hasta los primeros años de nuestro siglo. Conceptos que no son otros que los de función, variables y constantes, aunque el término "función" sea de LEIBNIZ, acuñado cincuenta años después de publicarse *La Geometría*, en 1637.

DESCARTES, para esta labor, parte de una crítica tanto de las materias consideradas clásicas de la Matemática, como de los cultivadores de la misma. Y ello desde su primera obra seria, *Regulae ad directionem ingenii* que, aunque póstuma e inacabada, es, sin embargo, el esquema de todos sus máximos aportes posteriores, En esta obra, junto al *Discurso del Método,* su ensayo *La Geometría* y sus cartas, es donde DESCARTES realiza su construcción matemática. De aquí que las considere en un muy primer plano.

En cuanto a su crítica, y a su desprecio respecto a la obra aritmética y geométrica de sus inmediatos predecesores, por su clara conciencia de que hacían obra enteramente distinta a la Matemática naciente, como si se tratara de dos disciplinas distintas, como ocurría en realidad, podría establecerse un paralelismo entre las *Reglas* y el *Discurso*. Así, en la Regla IV, afirma:

> *Cuando comencé a aplicarme al estudio de las disciplinas matemáticas, leí uno tras otro a la mayor parte de lo que la tradición corriente nos ha legado procedente de quienes son autoridad en esas materias, y cultivé, sobre todo, la aritmética y la geometría... Pero ni para la una ni para la otra conseguí dar con ningún autor capaz de satisfacerme plenamente... Es que en verdad nada es más vano que ocuparse de números abstractos y de figuras imaginarias, hasta el extremo de querer contentarse en conocer parecidas bagatelas; nada es más vano que apli-*

> *carse a esas demostraciones superficiales, que se encuentran más frecuentemente por azar que por* savoir faire, *y que son fuente de los ojos y de la imaginación más que del entendimiento, hasta el extremo de desacostumbrarse de alguna manera en el uso de la razón; y al mismo tiempo, nada es más complicado que poner en claro, por tal método de demostración, las dificultades nuevas que se esconden bajo la alineación confusa de los números.*

Las *Reglas* fueron escritas hacia 1628. El *Discurso del Método,* publicado en 1637, retoma la postura anterior. En la Segunda parte, DESCARTES precisa:

> *En cuanto al análisis de los antiguos y el álgebra de los modernos, además de que no se extienden más que a materias muy abstractas, y que no parecen de utilidad alguna, la primera está siempre tan restringida a la consideración de las figuras, que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación; y se está de tal forma sometido, en la última, a ciertas reglas y ciertas cifras, que se ha hecho un arte confuso y oscuro, que embaraza al espíritu, en lugar de una ciencia que lo cultive.*

La solución, para DESCARTES, se encuentra en considerar una nueva disciplina, la Matemática universal, que comprenda y supere las partes anteriores.

Equivocidad del término de carácter figural.

Y si la crítica anterior va dirigida, fundamentalmente, contra las figuras del álgebra geométrica —que era sustancial al desarrollo geométrico griego— y de las reglas y cifras del álgebra, DESCARTES también critica los términos clásicos como "cosa", "raíz", "cuadrado", "cubo", "bicuadrado"..., por la equivocidad que entrañan por la representación espacial concreta que los acompaña, cuando de hecho son empleados para designar relaciones de orden muy diferente.

> *Esos nombres me han equivocado a mí mismo, lo reconozco, durante largo tiempo: porque me parecía que nada más claro, tras la línea y el cuadrado, podía proponerse a mi imaginación que el cubo y las otras figuras construidas a imagen de aqué-*

> *llas; incluso me serví de ellas para resolver más de una dificultad. Pero tras muchas experiencias, acabé por darme cuenta de que con esta manera de representarme las cosas, no había descubierto absolutamente nada que no hubiese podido reconocer sin ella con mucha mayor facilidad y distinción; y que es necesario rechazar completamente los términos de este género bajo pena de hacer confusa la representación...* (Regla XVII).

De esta forma DESCARTES rechaza la interpretación estrictamente espacial, concreta e intuitiva, en beneficio de una interpretación más puramente abstracta, no figural. De ésta admite, casi únicamente, la línea recta

> *a causa de que no encontraba nada más simple, ni que pudiese representar más distintamente a mi imaginación y a mis sentidos* (Disc. Mét. 2.ª parte).

Necesidad del signo escrito y de la figura simbólica.

Ahora bien, ello no indica en modo alguno que DESCARTES rechace el empleo del signo ni de la propia figura. Rechaza su mal empleo y las equivocidades que pueden implicar, al usar términos aceptados en el lenguaje ordinario con una carga connotacional determinada. Para superar este "mal empleo" y "equívoco" es preciso utilizar el signo *escrito,* artificial; pero ello implica que la Matemática abandona su carácter fonético, de lenguaje oral, en búsqueda de un lenguaje unívoco, de fronteras nítidas respecto a otros tipos de lenguajes.

Los motivos, las justificaciones que da DESCARTES para este empleo del signo escrito y de la figura simbólica son varios. Parte del hecho de que para el conocimiento de las cosas el hombre posee cuatro facultades: entendimiento, imaginación, sentidos, memoria. La primera facultad es, realmente, la más digna.

> *El entendimiento solo, es verdad, tiene el poder de percibir la realidad* (Regla XII).

Sin embargo, es necesario ayudarle con el empleo de las tres facultades restantes. De aquí el empleo de figuras lo más esquemáticas y simples posibles para beneficio de la imaginación y los sentidos. Con ello se logrará facilitar la distinción que ha de realizar el entendimiento, ya que

> *los recursos humanos no sabrían encontrar nada más simple para poner en luz todas las diferencias de razones* (Regla XIV).

Figuras que deben representar tanto las magnitudes continuas como las discontinuas. Es razón, pues, de ayuda de la imaginación y de los sentidos a la razón mediante la extensión concreta e imaginable, aunque esquemática.

Por otro lado, el signo escrito supone una ayuda a la memoria, con lo cual no es preciso recargar a ésta, y el espíritu queda libre para "las ideas presentes". Pero estos signos han de ser "muy concisos" para poder recorrerlos muy rápidamente, en movimiento de intuición simultánea. Y aún más, se logra aligerar la redacción, haciéndola no sólo más breve, sino más precisa, más rigurosa.

> *no solamente haremos la economía de un gran número de palabras, sino también, y es lo principal, haremos manifiestos los términos de la dificultad bajo una forma tan pura y tan despojada que, sin que haya omitido nada útil, no se encontrará nada superfluo...* (Regla XVI).

Y gracias a los signos escritos, muy concisos, arbitrarios, y a las figuras o más bien esquemas, DESCARTES cree poder unificar la Aritmética y la Geometría, ya que

> *por ese medio, tomaría todo lo mejor del análisis geométrico y del álgebra, y corregiría todos los defectos de cada uno con ayuda del otro* (Disc. Mét. 2.ª parte).

El resultado es, en manos de DESCARTES precisamente, la creación de la geometría analítica, ya que el número o cantidad discontinua se representa por la línea recta o cantidad continua, y sobre ésta se efectúan las operaciones de la aritmética como sumar, restar, multiplicar, dividir, extracción de raíces, etc., todo ello a base, siempre, de líneas rectas. Y ello porque en la crítica realizada sobre los términos clásicos, le permite pasar a una consideración estrictamente algebrizada. TARTAGLIA, por ejemplo, sostenía que era imprescindible el empleo de términos distintos según la magnitud que se estuviera considerando en el producto: *multiplicarse, ducere,* ya para números, ya para magnitudes geométricas, respectivamente, por considerar ambas operaciones como radicalmente distintas; y análogamente para la división, donde se utilizarían *partire, misurare,* para números, para magnitudes geométricas, respectivamente. Todavía VIETA seguía pensando que la ciencia de los números y la de las magnitudes geométricas eran distintas aunque sus reglas fueran, en ocasiones, paralelas. DESCARTES, al partir de la línea recta, la considera tanto una magnitud geométrica continua como una medida numérica. La clave se encuentra en que el producto de dos líneas, la potencia cualquiera de una línea, por esta unidad conceptual, sigue siendo una línea recta y no pasa a convertirse en magnitud plana o espacial. Con ello "cuadrado" o "cubo" no indicarán ya magnitudes planas o espaciales, sino sencillamente la segunda o la tercera potencia de un número. Y asignando a cada una de estas líneas con una letra o una cifra, las operaciones aritméticas quedan incluidas en los terrenos estrictamente algebraicos.

2. ALGEBRA.

El convenio notacional.

Hay que observar que la representación lineal implica una estimación puramente cuantitativa en el sentido de que se toman, de las líneas rectas, las medidas de sus longitudes, y, por lo tanto, no da lugar a representación funcional mediante curvas. Ya he señalado que ello es la clave para el paso a la escritura algebraica. Escritura que DESCARTES indica en las *Reglas,* tras señalar el paso del proceso o método algebraico frente al aritmético,

> *todo lo que es necesario considerar como uno para llegar a resolver una dificultad, lo designaremos por un signo único, que se puede hacer como se quiera. Para mayor facilidad, sin embargo, utilizaremos las letras* a, b, c, *etc., para expresar las magnitudes ya conocidas, y las letras* A, B, C, *etc., para las incógnitas; las haremos preceder frecuentemente de los signos numéricos* 1, 2, 3, 4, *etc., para expresar su multiplicidad, y les agregaremos también el número de las relaciones que se deberá*

> *comprender en ellos: por ejemplo, si yo escribo* $2a^3$, *será como si yo dijese: el doble de la magnitud designada por la letra* a, *y conteniendo tres relaciones* (Regla XVI).

Hay que observar que el signo que representa a la incógnita "se puede hacer como se quiera", es decir, es un signo artificial enteramente arbitrario y no abreviador. Ello implica que el signo no va a ser considerado como imagen del concepto, reflejo de éste —y de aquí, o quizá por ello, el rechazo de DESCARTES de los términos ambiguos "cuadrado", "cubo"...—, sino mera apoyatura operacional para captar dicho concepto. De esta forma, DESCARTES se sitúa en un plano cercano al querido por PLATÓN. Cercano y no idéntico ya que para éste último el objeto fundamental de la Matemática estriba en la captación de conceptos, de formas pertenecientes a un mundo eidético separado del mundo mental y sólo aprehensible mediante un esfuerzo intuitivo-discursivo; mientras que para DESCARTES la Matemática consiste en la captación de *relaciones* entre dichos conceptos, aprehensibles por el entendimiento humano sin recurrir a elemento trascendente alguno. Refiriéndose a *las* matemáticas

> *...aunque sus objetos sean diferentes, no por eso dejan de estar todas de acuerdo en no considerar otra cosa que las diversas relaciones o proporciones que en ellas se encuentran...* (Disc. Mét.).

Es un salto importante, consecuencia —o motivo— precisamente de la importancia que el signo operacional, la notación no cósica, posee para DESCARTES, para la Matemática que surge en estos momentos, como ave Fénix sobre las cenizas de la Matemática anterior, estructurada de modo radicalmente diferente.

Igualmente debe señalarse que el convenio últimamente establecido se perfecciona en *La Geometría,* donde en lugar de designar por *A, B, C...,* las cantidades incógnitas —como también hacía VIETA— se admiten los signos *x, y, z...,* para la misma función; es decir, las últimas letras del alfabeto representarán, siempre, las cantidades desconocidas. El convenio cartesiano todavía se mantiene en la actualidad. Y es importante porque, a pesar de la arbitrariedad en la elección de signos, conviene adoptar un criterio unificador. La arbitrariedad electiva se mantiene, pero si fuera radical, cada autor elegiría el signo que le fuera más apetecible, provocando un caos interpretativo o de lectura y la consideración de que la Matemática era una auténtica selva ideográfica. Con el convenio anterior se logran, por ello, dos objetivos: En primer lugar, ahorrar tiempo y espacio para la explicación y comprensión de cuáles son los signos empleados por cada autor para representar las cantidades conocidas y las desconocidas. En segundo lugar, realiza una uniformización notacional que entraña economía del pensamiento y provoca una difusión mayor y más rápida de las materias tratadas.

Representación exponencial.

Siguiendo en la línea simplificadora en cuanto a los signos, se puede observar la representación exponencial para las potencias de una misma cantidad. No sólo abrevia las expresiones, como en el caso $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^6$, y permite operar con potencias de exponente cualquiera, totalmente generalizado, como al escribir x^n, sino que permite demostraciones rápidas y elegantes en otras ramas de la Matemática. Por ejemplo, en la teoría de logaritmos creada por JOHN NAPIER, y perfeccionada por HENRY BRIGGS. Gracias a la notación exponencial pueden demostrarse las propiedades esenciales de los logaritmos "en dos líneas" —como las que establecen que el logaritmo de un producto (cociente) es la suma (diferencia) de los logaritmos de cada factor—.

También en la divisibilidad de polinomios en una indeterminada, imposible de plantearse siquiera sin una notación coherente para las potencias de una variable; y así, no se encuentra hasta el siglo XVII el proceso de la división euclídea de polinomios, ni el cálculo del máximo común divisor de polinomios...

Transposición de términos: clasificación de ecuaciones.

DESCARTES tiene el mérito de ser el iniciador de la costumbre de transponer todos los términos de una ecuación a un mismo miembro. Frente a los ejemplos que él mismo daba en la carta a BECKMANN, que he citado, la transposición de términos hace que se represente una ecuación cúbica, por ejemplo, en la forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Ello presenta una muy clara ventaja. Si bien es cierto que las ecuaciones

$$3x^2 - 1 = 0 \qquad x^2 - 3x + 2 = 0$$

son diferentes en cuanto a coeficientes y términos, esas diferencias son secundarias respecto a una nota más esencial: la de ser ambas del mismo grado, de segundo. Y, por ello, las soluciones a las dos ecuaciones, aunque en la forma particular diferentes, se obtienen por un mismo método, general, válido para *todas* las ecuaciones de segundo grado. Con lo cual, la diferencia básica entre las ecuaciones va a estar no en la forma particular, sino en el grado que tengan. Y ello es actualmente tan conocido que incluso un alumno de bachillerato sabe "por experiencia" que es muy distinto resolver una ecuación de primer grado que una de segundo, y que no hay diferencia alguna en el método entre dos ecuaciones diferentes del mismo grado. Pero, para esta convicción, el primer paso consiste en llevar todos los términos a un mismo miembro y simplificar, con lo cual se sabe automáticamente de qué grado es, y podremos aplicar, de un modo ya estrictamente mecánico, la resolvente que corresponde a cada tipo de grado. De esta forma se simplifica enormemente la clasificación querida por DESCARTES en la carta antes citada a BECKMANN, ya que las ecuaciones no se distinguirán más que por su grado y no por sus particularidades o "especies".

Un ejemplo del estilo algebraico-cartesiano.

Desde el aspecto notacional la obra cartesiana es de trascendencia enorme, llegando a componer, en la tercera parte de *La Geometría,* un texto muy parecido a uno moderno de álgebra. Sólo en la escritura de la segunda potencia se mantiene la notación clásica, quizá por no ser abreviadora respecto a la notación de exponentes e imponer su facilidad de imprenta la repetición del signo. Como ejemplo del estilo cartesiano tomo un pasaje breve de este *Libro Tercero* de *La Geometría,* así como sus palabras finales en este ensayo, palabras de un cierto orgullo y que muestran su desinterés, quizá, por la Matemática estricta.

De la naturaleza de las ecuaciones.

Luego, a fin de que yo pueda dar aquí algunas reglas para subsanar una y otra de estas faltas, es necesario que diga alguna cosa en general de la naturaleza de las ecuaciones; es decir, de las sumas compuestas de varios términos, en parte conocidos y en parte desconocidos, y en que los unos son iguales a los otros; o mejor, que, considerados en conjunto, son iguales a cero; pues este será a menudo el mejor modo de considerarlas.

Cuántas raíces puede haber en cada ecuación.

Sépase, pues, que en cada ecuación, según cuantas dimensiones tenga la cantidad desconocida, otras tantas serán las diversas raíces que puede haber, es decir valores de esa cantidad; pues, por ejemplo, si se supone x igual a 2 o bien $x - 2 = 0$; y luego $x = 3$, o bien $x - 3 = 0$ y multiplicamos estas dos ecuaciones

$$x - 2 = 0 \quad \text{y} \quad x - 3 = 0$$

una por otra, se tendrá

$$xx - 5x + 6 = 0, \text{ o bien } xx = 5x - 6$$

que es una ecuación en la cual la cantidad x vale 2 y al mismo tiempo vale 3. Que si luego se hace $x - 4 = 0$ y se multiplica esta suma por $xx - 5x + 6$, se tendrá

$$x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$$

que es otra ecuación, en la cual x, teniendo tres dimensiones, tendrá tres valores, que son 2, 3 y 4.

Cuáles son las raíces falsas.

Pero, a menudo se llega a que algunas de estas raíces son falsas o menores de cero: como cuando se supone que x designa el defecto de una cantidad, que si es 5 se tendrá $x + 5 = 0$, que multiplicada por

$$x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$$

dará

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$$

ecuación en la cual hay cuatro raíces, a saber: tres verdaderas que son 2, 3 y 4 y una falsa, que es 5.

Cómo puede disminuirse el número de dimensiones de una ecuación cuando se conoce alguna de sus raíces.

Y se ve evidentemente de esto que la suma de una ecuación que contiene varias raíces puede siempre ser dividida por un binomio compuesto de la cantidad desconocida, menos el valor de una de las raíces verdaderas, cualquiera que sea, o más el valor de una de las falsas; por medio de lo cual se disminuyen sus dimensiones.

Cómo puede investigarse si una cantidad dada es el valor de una raíz.

Y recíprocamente, si la suma de una ecuación no puede ser dividida por un binomio, compuesto de la cantidad conocida + o — alguna otra cantidad, esto prueba que esa otra cantidad no es el valor de ninguna de sus raíces; así la última

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$$

puede ser dividida por $x - 2$ y por $x - 3$ y por $x - 4$ y por $x + 5$; pero no por $x +$o — ninguna otra cantidad: lo que muestra que ella no puede tener más que las cuatro raíces 2, 3, 4 y -5.

...Pero mi objeto no es hacer un gran libro, y trato más bien de muchas cosas en pocas palabras, como se juzgará que lo he hecho, si se considera que habiendo reducido a una misma construcción todos los problemas de un mismo género, he dado a la vez la manera de reducirlos a una infinidad de otras diversas, y así, de resolver cada uno de ellos de una infinidad de maneras; y, además de esto, que habiendo construido todos los que son planos, cortando con un círculo una línea recta, y todos los que son sólidos, cortando también con un círculo una parábola, y, en fin, todos los que son de un grado más compuesto, cortando lo mismo con un círculo una línea que no es más que de un grado más compuesta que la parábola; no hay más que seguir el mismo camino para construir todos los que son más compuestos, hasta el infinito. Pues en materia de progresiones matemáticas cuando se tienen los dos o tres primeros términos no es difícil encontrar los otros. Y yo espero que nuestro descendientes me estarán agradecidos no sólo por las cosas que aquí he explicado, sino por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas [13].

3. Carácter abstractivo de la nueva notación.

No puede olvidarse, en la contribución cartesiana, otro de los aspectos que encierra, quizá más importante para la evolución de la Matemática, y que se liga de modo estrecho con el anterior. Es el aspecto abstractivo que encierra la nueva notación. Cada signo, ahora, no es el representante de un número determinado, sino de un conjunto de números cualesquiera. Con lo cual, las operaciones aritméticas van a ser generalizadas de modo radical. La suma, la resta, la multiplicación, van versar sobre elementos abstractos y sobre elementos concretos. Esta es, precisamente, una de las claves del álgebra que surge con la obra cartesiana, la generalidad. Las operaciones van a indicar desde este momento no operaciones entre objetos, sino relaciones entre los mismos. El paso del enfoque aritmético clásico al algebraico lo expresa DESCARTES en varios pasajes, tanto de las *Reglas* como del *Discurso* y *La Geometría*. De ellos se puede citar el contenido en la *Regla XVI,* donde puede leerse:

> *es necesario notar en primer lugar que, si los aritméticos tienen la costumbre de designar cada magnitud por varias unidades, es decir, por un número, nosotros no hacemos, por el contrario, menos abstracción aquí de los números mismos que la que hemos hecho más arriba de las figuras geométricas, como de no importa qué otra materia. Y lo hacemos, tanto para evitar el enojo de un cálculo fastidioso y superfluo, como para obtener, y es lo principal, que las partes del objeto que se refieren a la naturaleza de la dificultad queden siempre distintas, y no se envuelvan en números inútiles: por ejemplo, si se busca la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados*

---

[13] Tomado de *La Geometría*, ed. E. C., Buenos Aires. Traducción y prólogo de Pedro ROSSELL SOLER.

dados son 9 y 12, un aritmético dirá que es $\sqrt{225}$*, es decir,* 15; *nosotros, en lugar de 9 y 12, pondremos* a *y* b, *y encontraremos que la hipotenusa es* $\sqrt{a^2 + b^2}$*, dejando distintas esas dos partes,* a^2 y b^2*, que en el número están confundidas.*

Paso al concepto de función.

Ahora bien, junto a la generalidad que esta notación entraña, y que convierte al álgebra en uno de los mejores instrumentos creados por el hombre, como lenguaje, para expresar breve, intuible, mecánicamente incluso, las relaciones enormemente complicadas que pueden tener entre sí objetos abstractos cualesquiera, se encuentra la necesidad de distinguir los signos entre sí. En el convenio algebraico cartesiano que he remarcado antes, las primeras letras del alfabeto representarán parámetros, magnitudes conocidas; las últimas letras, incógnitas, magnitudes desconocidas. De esta forma en las expresiones

$$ax + b = 0 \qquad ax + by + c = 0$$

a, b, c indican cantidades conocidas siempre, aunque cualesquiera; x, y, incógnitas. Si se fijan los valores de a y b en la primera, automáticamente queda fijado el valor de x, de la incógnita. Así, $2x + 1 = 0$, determina que $x = -1/2$. Pero si se fijan los valores a, b, c en la segunda, los de x e y no quedan determinados de manera unívoca. En este caso, si se da un valor a x, entonces sí queda determinado un valor de y. Si se dan varios valores a x, se irán obteniendo distintos valores de y. Y recíprocamente ocurrirá respecto a la incógnita y. De esta forma lo que se obtiene es un conjunto de valores "numéricos" de y, en *función* de los valores numéricos que se vayan dando a x. Es decir, lo que se ha obtenido con el cambio notacional cartesiano es uno de los conceptos más importantes de la Matemática de los siglos XVII-XX, el de función, ligado naturalmente a los de constantes y variables. En el caso anterior, son constantes los parámetros a, b, c; variables, independiente x, dependiente y.

Debo insistir en el hecho de que, en el enfoque iniciado por DESCARTES tanto la variable independiente como la dependiente o función son signos que representan números, cuelesquiera, pero números, es decir, el concepto que se crea es de carácter numérico, a pesar de la real abstracción que supone respecto a la aritmética. Con lo cual las operaciones de suma y producto, por ejemplo, no pierden sentido aplicadas a las letras o signos algebraicos, ni necesitan, por ello, de ulterior explicación o justificación. Sobre este punto volveré más tarde, al hablar de la ambigüedad que tales operaciones entrañan al generalizarse y operar con signos que no representan, ya, números, sino que varían sobre conjuntos de objetos cualesquiera.

4. Geometría = Análisis.

Identificación Curva-Ecuación. La función, concepto "geométrico".

Si hasta aquí se ve que el concepto de función puede surgir de la simple consideración de los signos algebraicos, hay que tener presente que Descartes va más allá, dando un sentido intuitivo sensible a su idea, que ha condicionado a la Matemática posterior, llegando incluso a impedir la total algebrización de la Matemática que por su cambio notacional y metódico podía preveerse. Sentido intuitivo sensible, porque ha unido el álgebra a la representación gráfica, precisamente, a través de la Geometría analítica, provocando el permanente empleo de la figura en la Matemática, con su secuela de utilización de la intuición sensible, cuando su intento parecía ser el opuesto. Al sustituir las líneas rectas por números que expresan sus longitudes, realizaba, de modo implícito, una llamada al postulado de continuidad. Y con ello establecía una función línea-número, de tal forma que todo punto en el plano se ponía en correspondencia biunívoca con un par de números. Al variar el punto en el plano varía su par de números correspondiente, sus coordenadas, pero de tal forma que a la primera componente del par se le asocia una o varias segundas componentes del mismo, y recíprocamente. Esto no es otra cosa que la noción de "ecuación de una curva" en el plano y, a la vez, la noción de función de la segunda componente respecto a la primera.

Por la primera de ambas nociones lo que se obtiene es una expresión única para representar toda la curva y, con ello, una posible clasificación de todas las curvas en el plano, en estrecha correspondencia con la clasificación de las ecuaciones en su vertiente puramente algebraica. Una ecuación lineal de dos variables —como la segunda de la página 92— no representa más que una recta; una ecuación cuadrática, una cónica cualquiera, sea elipse, parábola, hipérbola o circunferencia, etc. Desde este momento, hablar de "punto" o hablar de "par de números"; de "recta" o "ecuación lineal de dos variables", etc., resultan equivalentes.

Con ello el lenguaje va a sufrir un brusco cambio, condicionado por estas equivalencias. Una curva se estudiará de modo "analítico"; una expresión analítica encontrará —o al menos se buscará— representación gráfica correspondiente. Se podría indicar que se crean dos tipos de lenguaje: el geométrico, también llamado sintético, o el analítico, según que se utilicen o no ambos elementos o sólo uno de ellos en la expresión.

Pero gracias al lenguaje analítico podrán resolverse problemas para los cuales el geométrico puro se encontraba impotente, como el de hallar la normal o la tangente a una curva cualquiera en un punto dado, estudiar el centro de gravedad del volumen encerrado por una superficie cualquiera, el volumen de ese mismo cuerpo, máximos y mínimos de curvas generales, problemas isoperimétricos, etcétera. Pero la mayoría de estos problemas pertenece a un capítulo que se inicia simultáneamente al trabajo cartesiano, aunque con enfoque menos algebraico y sí más analítico. Capítulo que, como el notacional y algebraico cartesiano, también muestra su origen e incentivo en una crítica de la Matemática clásica griega, crítica orientada ahora en el frente del rigor demostrativo contrapuesto a la invención, al impulso creador. En contraposición no ya sólo entre el signo concreto cósico y signo lingüístico conceptual y el signo algebraico abstracto, arbitrario y simbólico, independiente del objeto representado, sino entre dos maneras de expresión, entre dos estilos radicalmente distintos. Entre el estilo demostrativo o geométrico griego y el estilo expresivo creador, nada riguroso, en búsqueda de nuevas formas tanto conceptuales como expositivas.

5. ESTILO DE LOS INDIVISIBLES

1. A vueltas con la contraposición Rigor expositivo-Invención.

El esquema impuesto por la escuela platónica sobre la Matemática obligó a la composición de textos de un rigor absoluto en su vertiente expositiva y no sólo conceptual. Orden expositivo que, como ya he señalado, presenta como obra maestra los *Elementos*, de EUCLIDES. Sin mbargo, este orden, en su vertiente general, es de carácter axiomático-deductivo, es decir, en él se parte de elementos conocidos y se van demostrando, deductivamente, las proposiciones, que también muestran su correspondiente estructura expresiva propia. Se puede remarcar que la proposición que se encadena a las restantes y se divide formalmente en sí misma, ha de ser previamente conocida, y el proceso demostrativo no consiste en otra cosa que en la búsqueda de su enlace —a veces totalmente artificial— con las proposiciones anteriores. Una obra como los *Elementos* es de carácter sistematizador, organizador de una materia realmente descubierta siglos antes. El indudable mérito de EUCLIDES reside en la elección de los primeros elementos —axiomas y postulados, nociones comunes, definiciones— para apoyar las restantes proposiciones, y en el orden en que encadena a éstas. Pero en cuanto a contribución personal creadora de tales proposiciones, muy poco es su aporte a la monumental obra que compuso. Que, como tal obra culmen, resume en sí prácticamente todo lo que los griegos hicieron en Geometría y, aún más, casi todo lo que en esta dirección pudieron hacer. De hecho, los avances posteriores realizados en los terrenos impuestos por EUCLIDES han sido mínimos. Era la obra perfecta de rigor, modelo del estilo matemático, que cerraba toda una época de la Matemática. Se ha llegado a suponer, incluso, que los matemáticos griegos discípulos de ARQUÍMEDES lograron nuevos resultados en otros terrenos, no exclusivamente geométricos, pero que, faltos de un interés o de una posible sistematización, no llegaron a escribir nada, transmitiendo sus aportes de manera oral, perdida para siempre. El motivo de esta falta de interés o de posibilidad de obra radica en la exigencia expositiva, en el estilo a que debían someter su exposición.

Crítica de Arquímedes.

ARQUÍMEDES mismo reconoce el defecto de ese estilo. En la *Carta a Eratóstenes,* que se conoce mundialmente por *El método,* descubierta en 1906 por HEIBERG en un "palimpsesto" hallado en 1899 entre los manuscritos del patriarcado griego de Jerusalén, con escritura del siglo X, ARQUÍMEDES afirma:

he creído conveniente exponerte por escrito e ilustrarte en este libro la particularidad de un método, según el cual te será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos, lo cual, estoy convencido, de que será útil también para demostrar los mismos teoremas. Yo mismo, algunas de las cosas que descubrí primero por vía mecánica, las demostré luego geométricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica verdadera demostración. Pero es más fácil, una vez adquirido por este método un cierto conocimiento de los problemas, dar luego la demostración, que buscarla sin ningún conocimiento previo. Por esta razón aun de los teoremas mismos referentes al cono y a la pirámide, que EUDOXIO *fue el primero en demostrar, a saber: que el cono es la tercera parte del cilindro, y la pirámide, la tercera parte del prisma, que tienen la misma base e igual altura, debe atribuirse un mérito no pequeño a* DEMÓCRITO, *que fue quien primero enunció, aunque sin demostrarla, esta propiedad de las mencionadas figuras* [14].

La inversión del siglo XVII: Inventar; luego, demostrar.

Los matemáticos del siglo XVII presentan un cambio radical de concepción de la Matemática. Para ellos, lo fundamental no es la búsqueda de una expresión rigurosa, sino la búsqueda de nuevos aportes a la Matemática. Se trata, fundamentalmente, de crear, inventar, no de exponer demostrativamente, axiomáticamente, rigurosamente. Que para ello se recurra a la intuición, a procedimientos mecánicos o de cualquier otro tipo, parece no importar. Tampoco, que surjan equívocos, malentendidos, incluso errores. Si el siglo XVII ve un cúmulo enorme de polémicas no será por la precisión del lenguaje matemático utilizado, sino por la prioridad del resultado. El "avanza, que la sistematización vendrá después" —parafraseando la afirmación de D'ALEMBERT—, parece ser lema de toda una generación de matemáticos, de toda una época.

Naturalmente, la tradición condicionaba en alguna medida. Matemático genial, enteramente revolucionario, no lo era todo el mundo. Existía una escuela tradicional que señalaba la heterodoxia del nuevo estilo matemático. De aquí la necesidad de justificar, en mu-

---

[14] *El Método*, edición de J. BABINI. Ed. Eudeba, Buenos Aires, 1966, página 14.

chos momentos, lo que se iba logrando. Además, la elección de métodos de exposición incorrectos, aunque fecundos, daba lugar a indudables peligros de equívocos para los matemáticos no geniales, o incluso para alguno que sí podía considerarse en esta categoría —caso DESCARTES, caso LEIBNIZ—. En este sentido, nada más aleccionador que seguir la creación del Cálculo infinitesimal a lo largo del siglo XVII, que dejará en un muy segundo plano la algebrización de la geometría cartesiana, al hacer suyo el concepto de función y, por tanto, el de suma, aunque no por ello se rompa la interrelación entre ambas corrientes.

2. EL CÁLCULO INFINITESIMAL.

Demostración: Método de exhaución.

Ante el problema de hallar áreas o volúmenes de figuras planas o espaciales, EUDOXIO creó el método que algún matemático renacentista denominó de *exhaución*. Consiste, esencialmente, en acotar la cantidad que quiere calcularse entre dos series de magnitudes que convergen hacia ella, haciéndose la diferencia muy pequeña, "agotándose". Ambas cotas se comparan bien con la cantidad estudiada, directamente, bien con las cotas correspondientes a un problema análogo y ya resuelto. Esta comparación se realiza por un doble proceso de reducción al absurdo, y de aquí el nombre de *apagógico* con el que también se le conoció en el siglo XVII, como sinónimo de "método de los antiguos o geométrico". Es decir, conocida mediante un proceso previo intuitivo, mecánico o de cualquier otro tipo la equivalencia entre dos magnitudes A y B, de las cuales una de ellas también es conocida, el método de exhaución lo que hace es *demostrar* tal equivalencia. Y, para ello, se prueba, en primer lugar, que es absurdo suponer A mayor que B; en segundo lugar, que también conduce a contradicción suponer B mayor que A. La única alternativa que se obtiene, entonces, es la de ser A y B equivalentes.

El rigor demostrativo, siempre que se admita el recurso a la reducción al absurdo, es completo. Pero es rigor meramente expositivo. En él no aparece para nada el punto quizá más importante para un matemático constructivo: cómo saber que A es equivalente a *B*. Por otro lado es método que también muestra otra falla, también importante para el matemático: exige para cada problema un planteamiento y resolución propios, particulares y, aunque siempre pudieran encontrarse semejanzas con otros problemas ya resueltos, estas semejanzas no permiten una generalización adecuada.

Invención: Método de los indivisibles.

Ante una gran cantidad de cuestiones que surgen tras los trabajos galileanos en mecánica, astronómicos, arquitectónicos, de navegación, y que presentan un fondo común, los matemáticos del siglo XVII se enfrentan al mismo tema de cuadraturas y cubaturas últimamente referido. Pero poseyendo únicamente un método demostrativo —la *Carta* de ARQUÍMEDES a ERATÓSTENES era desconocida—, y no constructivo. Ante este hecho han de buscar un método propio para cubrir esta laguna. Y el método no va a ser otro que el de los indivisibles, infinitamente pequeños o diferenciales.

Un discípulo de GALILEO, el jesuíta Buenaventura CAVALIERI, formula en 1621 el nuevo método. En esencia, consiste en considerar como indivisibles a los elementos que constituyen una figura de dimensión mayor. Así, los puntos son los indivisibles de un segmento; los segmentos, de figuras planas; las secciones planas, de sólidos. Si los indivisibles de dos figuras se encuentran en una proporción dada, entonces se admite que las figuras mismas también se encuentran en la misma proporción. Este hecho se puede condensar en formulación única para áreas y volúmenes en lo que se puede denominar "principio de CAVALIERI":

> Si dos áreas (volúmenes) son tales que para toda recta (plano) paralela (o) a una dada las corta según segmentos (áreas) cuyas medidas están en razón constante, entonces las áreas (volúmenes) están en la misma razón.

De esta forma, hallar el área de una figura *A* consiste en buscar otra *B* de superficie conocida; dividir *A* y *B* mediante un haz de rectas paralelas a una dada; comparar los segmentos del haz que interceptan *A* y *B*. Finalmente, admitir que la proporción obtenida entre esos segmentos es válida para la proporción entre las áreas. Como la de *B* es conocida, lo será la de *A*.

Una variante posterior consiste en dividir A mediante un haz de rectas paralelas equidistantes en cantidad suficientemente grande; los rectángulos que se obtienen —aunque cada uno, trazado a distancia finita, por pequeña que sea, no tiene tal forma de rectángulo— se suman y la suma total es la correspondiente al área de la figura pedida. Igualmente, hallar el volumen de un cuerpo de revolución consiste en descomponerlo en "infinidad" de cilindros, todos de altura infinitamente pequeña, mediante un haz de planos paralelos equidistantes perpendiculares al eje de revolución, y la suma de todos esos cilindros será el volumen del cuerpo pedido. Sumas que suelen introducirse mediante la expresión "suma de todas las ordenadas", o simplemente, por abuso del lenguaje, "suma de las ordenadas".

Error y crítica.

En todo ello hay, evidentemente, un error conceptual asombroso. La idea de los indivisibles va contra todos los postulados geométricos que consideran una sección plana como carente de volumen, con lo cual la superposición de dos planos continúa siendo un plano y no una figura de dimensión mayor; y lo mismo ocurre con la unión de segmentos. En otras palabras, el método de los indivisibles viola el principio de homogeneidad espacial dimensional. Por otro lado, va contra la propia intuición, no apoyándose en experiencia alguna, ni siquiera mental, por ser experimento irrealizable.

Precisamente por ello, los matemáticos que emplearon este método recibieron muy violentos ataques. Se puede citar a este respecto el realizado por ANDRÉ TACQUET en 1651 en su obra *Quatuor cylindricorum et annulorum...*, donde escribe:

> *Estimo que no es legítimo ni conforme a la geometría admitir el método de demostrar por los indivisibles, o (como yo tengo costumbre en llamarlos) por los heterogéneos, que el célebre geómetra* BUENAVENTURA CAVALIERI *ha puesto en luz. Este célebre método pasa de las líneas a las superficies, de las superficies a los sólidos, y una igualdad o proporción encontrada para las líneas, da una conclusión aplicada a las superficies. Por esta forma de razonar no se llega absolutamente a nada cierto...* [15].

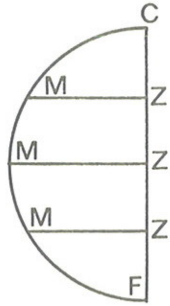
[15] Tomado de *L'oeuvre scientifique de Pascal*, PUF, París, 1964.

El propio CAVALIERI pareció tener sus dudas en cuanto a la legitimidad de su lenguaje, lo que pone de manifiesto en carta a GALILEO de 1621, a quien consulta sobre la validez o no del mismo. Pero ya desde 1622 CAVALIERI lo emplea sin más vacilaciones. Tras él FERMAT y, ya, los restantes matemáticos, principalmente franceses.

Defensa: "un lenguaje diferente".

Sólo ROBERVAL y PASCAL, tras las críticas como la de TACQUET, pretenden modificar los principios de CAVALIERI señalando que no se toman segmentos para la suma de las ordenadas, sino rectángulos de la misma altura, infinitamente pequeña, infinitésimos, como señala PASCAL en la *Carta a Carcavi*:

> *No tendré dificultad en lo que sigue de usar este lenguaje de los indivisibles,* la suma de las líneas, *o* la suma de los planos; *y así cuando considere, por ejemplo (en la figura), el diámetro de un semicírculo dividido en un número indefinido de partes iguales en los puntos Z, de donde se trazan las ordenadas ZM, no tendré dificultad alguna en el uso de esta expresión,* la suma de las ordenadas, *que parece no ser geométrica a los que no entienden la doctrina de los indivisibles, y que se imaginan que es pecar contra la geometría expresar un plano por un número indefinido de líneas; lo que no procede más que de su falta de inteligencia, ya que no se entiende por ello otra*



> *cosa, sino la suma de un número indefinido de rectángulos hechos de cada ordenada con cada una de las pequeñas porciones iguales del diámetro, cuya suma es ciertamente un plano,*

que no difiere del espacio del semicírculo más de una cantidad menor que una dada[16].

La justificación de PASCAL no agrega nada a la falta de rigor del principio de CAVALIERI. En todo caso, lo único que permite es no equivocarse tan fácilmente. Sin embargo, da paso, con ella, a la segunda fase del Cálculo infinitesimal, donde en lugar de hablar de indivisibles se establece la existencia de los infinitamente pequeños o diferenciales, de la misma dimensión geométrica espacial de la figura a la cual pertenezcan.

Sin embargo, se puede observar un hecho a primera vista algo paradójico. Los matemáticos del siglo XVII consideran que el nuevo método inventivo no es más que un *lenguaje diferente*, una manera o estilo distinto de expresar unos mismos conceptos. El propio PASCAL, unas líneas antes del último párrafo citado, escribe:

He querido hacer esta advertencia para mostrar que todo lo que está demostrado por las verdaderas reglas de los indivisibles se demostrará también con el rigor y a la manera de los antiguos: y que así uno de estos métodos no difiere del otro más que en la manera de hablar.

Igualmente, PEDRO FERMAT señalará el mismo punto:

Sería fácil dar demostraciones a la manera de ARQUÍMEDES... ; *bastará, pues, haberlo advertido de una vez para siempre a fin de evitar continuas repeticiones...* [17].

Y un ISAAC BARROW se expresará más tajantemente:

...se podría alargar por un discurso apagógico, pero ¿para qué? [17].

Sin embargo, en caso de discusión o posible polémica —cosa cotidiana en la época—, casi todos ellos preferirán expresarse en el método clásico, en el *estilo geométrico*. Naturalmente, una vez que

---

[16] Los textos que se citan de PASCAL, de la Obra completa, ed. Seuil, París, 1963.

[17] Tomado de N. BOURBAKI: *Eléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, París, 1960, 1.ª ed.

han logrado hallar una proposición y tienen que demostrarla de modo convincente. Esta posición se encuentra en el propio PASCAL cuando a comienzos de su *Carta a Carcavi,* y tras la explicación de su reto a todos los matemáticos del mundo para la resolución de un conjunto de problemas en torno a la cicloide o ruleta, y la ausencia de respuestas válidas que le obligan a ser él quien responda resolviéndolas públicamente, da idea de un método inventivo o constructivo —enteramente semejante al empleado por ARQUÍMEDES en el *Método*— para hallar los centros de gravedad. Inmediatamente después agrega:

> *Usted verá, Señor, que he entrado en el estilo geométrico; y, para continuarlo, no os hablaré más que por proposiciones, corolarios, advertencias, etc. Permitidme, pues, explicarme de esta manera sobre lo que acabo de deciros, a fin de que no quede ambiguedad alguna.*

De modo análogo se expresará en la *Carta al Señor A. D. D. S.:*

> *...sin detenerme, ni en los métodos de los movimientos, ni en el de los indivisibles, sino siguiendo el de los antiguos, a fin de que la cosa pueda quedar desde ahora cerrada y sin discusión*

Dos estilos expresivos, radicalmente distintos. El de los antiguos o geométrico, de rigor perfecto, demostrativo. El de los indivisibles, todo lo contrario. Y, sin embargo, es este último el operativo, el creador. Con él se consiguen resultados sorprendentes, inalcanzables con el primero.

3. BLAS PASCAL Y LOS INDIVISIBLES.

PASCAL es uno de los matemáticos que logra con el estilo de los indivisibles una de las más raras perfecciones. Su estilo consigue crear un lenguaje de gran precisión y claridad, que permite ser traducido al lenguaje notacional operacional actual sin dificultad alguna. Y ello, sin utilizar una sola fórmula en todos sus escritos, aunque necesite apoyarse, en contrapartida, en una figura que cumple el papel de esquema sobre el cual razonar más que el de tal figura con su cohorte de intuición sensible, concreta, imagen fiel de un concepto a aprehender. Así, de la figura que inserto en la página 100, utilizada para claridad del lenguaje de los indivisibles, se sirve para dar paso al concepto de integral considerada como la suma de todas las ordenadas ZM, siendo los límites de integración los puntos C y F.

Este concepto se puede generalizar a cualquier curva $f(x)$ y no sólo al semicírculo, y considerar a la integral de tal función como el área comprendida entre el eje de abscisas —o del eje del que partan los indivisibles— y la curva $f(x)$.

PASCAL también considera la integral de una función cuando el límite de integración depende de la misma variable que la propia función. Concibe la integral $\int_o^x f(x).\,dx$ como el valor de la razón entre la suma de todas las ordenadas de la curva a la suma de los n indivisibles que componen la unidad o, cuando emplea el lenguaje o estilo geométrico más preciso, como el límite de esa razón cuando n tiende a infinito, aunque el concepto de límite —que será precisamente el que permita superar las equivocidades de los indivisibles— carezca de una total formulación, clara y distinta, hasta muchos años después.

El estilo de los indivisibles permite a Blas PASCAL una clasificación de los problemas de integración, haciendo posible la reducción de unos problemas a otros y, por ello, de unas integrales a otras. Transformación apoyada, gracias a la imagen geométrica, en el previo establecimiento de la igualdad entre dos integrales, considerándolas como formulaciones distintas de una misma área o volumen. Así, el área de un triángulo rectángulo mixtilíneo —representación gráfica de una curva en un sistema de ejes cartesianos rectangulares— es la misma según se hagan las divisiones por paralelas al eje o a la base —a uno u otro de los ejes de coordenadas—. En términos actuales, expresando el área comprendida entre los ejes OX, OY y un arco de curva $f(x)$ entre los puntos (a, o) y (o, b) mediante la igualdad

$$\int_o^a f(x).dx = \int_o^b x.df(x)$$

Expresión que muestra marcado paralelismo con el proceso de integración por partes, utilizado hoy para resolver muchos de los problemas que condujeron a PASCAL a la formulación de equivalencia entre integrales. Paralelismo debido a que el principio pascaliano para el cambio de variable equivale a decir que el área $\int f(x).dx$ puede escribirse como la suma de las ordenadas por los intervalos "infinítamente pequeños Δx_i", iguales o no para toda subdivisión del intervalo de integración, es decir, como

$$S\,[f(x_i).\Delta x_i]$$

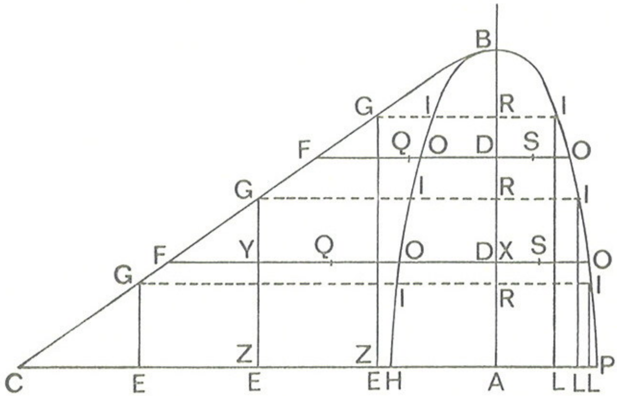
Blas PASCAL generaliza los resultados de igualdad o equivalencia anteriores, componiendo un auténtico tratado de integración en su *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets.* Para ello asocia a la función $f(x)$ o "trilínea" de partida otra función o triángulo rectángulo mixtilíneo con los mismos ejes OX, OY, pero de tal forma que tenga por abscisas los arcos de la trilínea dada, por lo que es curva definida entre los puntos (o, b) sobre el eje OY y (s, o) sobre el eje OX, siendo s la longitud de $f(x)$ entre (o, b) y (a, o). Ayudado por este triángulo auxiliar, PASCAL obtiene una serie de proposiciones que expresan igualdades entre integrales. Pero en estilo de indivisibles.

Un ejemplo de estilo.

Como muestra del estilo de los indivisibles, en su perfecta formulación pascaliana, cito un pasaje del *Traité des trilignes*:

> *Relaciones entre los senos sobre la base de una trilínea cualquiera y las porciones de su línea curva comprendidas entre el vértice y las ordenadas en el eje.*
>
> DEFINICIÓN.
>
> Se llaman aquí *arcos* no solamente las porciones de las circunferencias del círculo, sino también las porciones de todo tipo de líneas curvas.
>
> HIPÓTESIS GENERAL.
>
> Sea una trilínea rectangular cualquiera BAH (figura), y sea la misma trilínea BAP, trazada a la otra parte del eje BA, y así las

dos bases iguales *HA*, *AP*, no hacen más que una línea recta; sea dividido tanto el eje como la curva *BP* en un número indefinido de partes todas ellas iguales entre sí; es decir, que las partes del eje *BD*, *DD*, etc., sean iguales tanto entre sí como con las partes iguales de la curva *BI*, *II*, etc.: sean trazadas las ordenadas *DO* al eje, y los senos *IL* sobre la base.



Las razones que se encuentran entre la suma de los senos *IL*, y la suma de los arcos o de las porciones *BO* de la curva (comprendidas entre el punto *B* y cada una de las ordenadas al eje) serán las siguientes.

PROPOSICIÓN VI.

La suma de los arcos de la curva comprendidos entre el vértice y cada ordenada al eje es igual a la suma de los senos sobre la base.
Es decir, que la suma de todos los arcos *BO*, es igual a la suma de los senos *IL*.

PROPOSICIÓN VII.

La suma de los cuadrados de esos mismos arcos *BO* es igual a dos veces la suma triangular de los mismos senos *IL*, a comenzar por *A*.

PROPOSICIÓN XII.

Digo ahora que llevando los senos sobre el eje, a saber, las perpendiculares *IR*, la suma de los rectángulos comprendidos entre cada uno de los mismos arcos y de la ordenada que lo termina, a saber la suma de todos los rectángulos *BO* en *OD*, es igual a la suma de las porciones de la trilínea comprendidas entre cada seno sobre el eje y la base, a saber a la suma de todas las porciones *IRAP*.

PREPARACIÓN A LA DEMOSTRACIÓN.

Tómese, en la recta *AH* prolongada, la porción *AC* igual a la línea curva *BIP* o *BOH;* y, habiendo dividido *AC* en tantas partes iguales como existan en la curva *BIP*, por los puntos *E*, y que así cada una de las porciones *AE*, *EE*, etc., sea igual a cada uno de los arcos *BI*, *II*, etc., desde los puntos *E* se trazan las perpendiculares *EG*, que encontrarán a los senos *IR* sobre el eje (prolongados si es preciso) en los puntos *G;* de manera que cada una de las rectas *EG* sea igual a cada uno de los senos *IL* sobre la base, y que por todos los puntos *B*, *G*, *G*, *C*, se entienda pasar una línea curva, de la cual las ordenadas respecto a la base serán las rectas *EG*, y las rectas *GR* serán las contraordenadas. La naturaleza de esta línea será tal que, cualquiera que sea el punto *G* que se tome sobre ella, de donde se trazan las rectas *GE*, *GRI*, paralelas al eje y a la base, ocurrirá siempre que la porción *AE*, o la recta *RG*, será igual al arco *BI*, y la porción restante *EC* al arco restante *IP:* y por ese medio las ordenadas *DO* al eje siendo prolongadas, y cortándola, en *F*, cada una de las rectas *DF* será igual a cada uno de los arcos *BO* comprendidos entre la ordenada misma *DF* y el vértice.

Establecido esto, la demostración de las propiedades VI, VII, VIII, IX, XI, XII, XIII, XIV, XV, que acaban de ser enunciadas, será fácil.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN VI.

Digo que la suma de todos los arcos *BO* es igual a la suma de los senos *IL*.

Porque todos los arcos *BO* son los mismos que todas las ordenadas *DF* al eje, luego la suma es igual a la de las ordenadas *EG*, por la Proposición I, es decir, a la suma de los senos *IL*.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN VII.

Digo que la suma de los arcos *BO* al cuadrado es doble de la suma triangular de los senos *IL*, a comenzar por *A*, o que la suma de los *DF* al cuadrado es doble de la suma triangular de las ordenadas *EG*, a comenzar por *A*: lo que está demostrado por el corolario de la Proposición II.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN XII.

Digo que la suma de los rectángulos *BO* en *OD*, o *FD* en *DO* es igual a la suma de las porciones *IRAP*.
Es lo mismo que ha sido demostrado en el lema general. Porque considerando la trilínea *BAP* como siendo la figura adjunta de la trilínea *BAC*, se sigue (por lo que ha sido demostrado en ese lema) que la suma de los rectángulos *FD* en *DO* comprendidos entre cada ordenada *DF* de la trilínea *BAC*, y cada ordenada *DO* de la trilínea *BAP*), es igual a la suma de las porciones *ARIP* de la figura adjunta (comprendidas entre cada contraordenada *RI* y la recta *AP*), y que las unas y las otras componen un mismo sólido.

Las tres proposiciones que he entresacado del texto de PASCAL pueden enunciarse, en notación operacional, en la forma

Proposición VI: $$\int_o^b s\,dy = \int_o^s y\,ds$$

Proposición VII: $$\int_o^b s^2 dy = 2\int_o^s s y\,ds$$

Proposición XII: $$\int_o^b s x\,dy = \int_o^s ds \int_o^y s\,dy$$

4. Las limitaciones de un estilo.

Si el estilo matemático ha variado de modo radical en el siglo XVII, tanto en su aspecto o vertiente algebraica como en su vertiente analítica, ha sido a costa de una pérdica demostrativa, de una pérdida de rigor, sin que, además, dicha pérdida preocupe grandemente, justificando los métodos y las expresiones los resultados que con ellos se alcanzan. La vertiente analítica ha de *crear* su propio lenguaje —como se puede observar en el ejemplo pascaliano, donde aparecen términos como "trilínea", "suma triangular", "suma piramidal", "inglete", "suma de senos"..., dándole un sentido distinto al que tenían tales expresiones en la Matemática anterior o coetánea, o en el lenguaje ordinario—, y no emplea para nada las fórmulas que, en la vertiente algebraica, habían sido desarrollados por Vieta y Descartes entre otros. La falta de signo artificial puro, estrictamente operacional, queda compensada por la "maestría del lenguaje" de un Pascal, como señala Bourbaki [18].

Pero ello implica, igualmente, una total limitación operacional, y una atomización completas, creando cada autor su propio lenguaje, por otra parte figurativo. Puede observarse este hecho limitativo en el propio Pascal, o en Barrow, donde es imprescindible el permanente empleo de figuras, siempre complicadas y previamente descritas con toda minucia y detalle, porque en esa descripción puede ir la clave de la demostración posterior. En Barrow se requieren casi 180 figuras para unas cien páginas que componen lo esencial del texto [19]. Es limitación que ha llegado a permitir incluso el olvido de los matemáticos del siglo XVII como los verdaderos creadores del Cálculo integral en ciertas historias de la Matemática.

6. ESTILO OPERACIONAL

1

1. En el principio, el símbolo.

Leibniz y su enfoque operatorio.

Corresponderá a Leibniz dar carácter operacional, de tipo alge-

[18] *Id.*, p. 210.
[19] *Id.*, p. 209.

brizante, al Cálculo infinitesimal, a toda la obra anterior, convirtiéndola en instrumento fundamental tanto de la Matemática como, sobre todo, de la ingeniería y de la técnica. Por ello, de todo el progreso humano en cuanto a civilización, realizado en los dos últimos siglos. Para lo cual LEIBNIZ no tendrá más que inventar una notación adecuada en la que traducir las reglas y proposiciones obtenidas por sus predecesores. Y será en PASCAL en quien el matemático-filósofo alemán estudiará la Matemática considerada en la época como "moderna", tras el afortunado consejo del holandés HUYGENS.

En un principio LEIBNIZ comienza por "abreviar" las expresiones pascalianas. Hacia 1675 el principio del cambio de variables indicado por PASCAL —y al que hice referencia en la página 103—, recibe como transcripción

$$omn(x\omega) = x.omn(\omega) - omn(omn\omega)$$

donde $omn(\omega)$ es la abreviatura de la integral de ω tomada de O *a* x. Poco después, cuestión de días, lo sustituye por $\int$ como inicial de *summa omnium* ω, y pasa a primer plano los "infinitamente pequeños" para los cuales introduce la letra d inicial de *diferencia* o, como más tarde se expresará "diferencial". Con lo cual, LEIBNIZ pasa a escribir la noción de integral de una función $f(x)$ como $\int f(x)dx$, donde dx debe siempre escribirse, ya que

> *Advierto que se tome cuidado de no omitir* dx... *falta frecuentemente cometida, y que impide ir avanzando por el hecho de que se desprecie por ello a estos indivisibles, como aquí a* dx, *su generalidad... de la cual nacen innumerables transfiguraciones y equipolencias de figuras*[20].

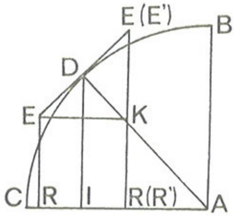
La importancia de distinguir $\int$ de d se manifiesta en LEIBNIZ de modo clarísimo. Ambos son operadores inversos entre sí, representando uno la integración, el otro la diferenciación. Alguna de las más importantes propiedades del operador integral habían sido conseguidas sin más que traducir los pasajes de CAVALIERI, FERMAT, ROBERVAL, GREGORY, PASCAL..., a esta notación leibniziana. Así, que $\int f(x)\, dx$ depende linealmente de $f(x)$; que es un operador lineal, etcétera.

Pero no ocurría lo mismo respecto al operador diferenciación. Operador que, realmente, descubre el propio LEIBNIZ sobre un texto

[20] *Id.*, p. 208.

de PASCAL, el *Traité des sinus du quart de cercle,* en su primera proposición, además, que bajo el título de "Lema" dice:

Sea ABC *un cuarto de círculo, cuyo radio* AB *se considera como eje, y el radio perpendicular* AC *como base; sea* D *un punto cualquiera en el arco, del cual se traza el seno* DI *sobre el radio* AC; *y la tangente* DE, *en la cual se toman los puntos* E



donde se quiera, desde donde se trazan las perpendiculares ER *sobre el radio AC.*

Digo que el rectángulo comprendido entre el seno DI *y la tangente* EE', *es igual al rectángulo comprendido entre la porción de la base (encerrada entre las paralelas) y el radio* AB.

La demostración de PASCAL es inmediata:

Porque el radio AD *es al seno* DI *como* EE' *a* RR' *o a* EK: *lo que se ve claramente a causa de los triángulos rectángulos y semejantes* DIA, EKE', *siendo el ángulo* EE'K *o* EDI *igual al ángulo* DAI.

En la primera Proposición obtenida por PASCAL éste establece lo que hoy se escribiría $\int senxdx = cosx$. Pero en la "advertencia" que realiza tras la demostración, PASCAL agrega —y obsérvese la proximidad de su expresión final respecto al estilo posterior de los ϵ—:

Cuando he dicho que todas las distancias juntas RR *son iguales a* AO, *y lo mismo que cada tangente* EE *es igual a cada uno de los pequeños arcos* DD, *no se ha debido sorprender, ya que se sabe bien que aunque esta igualdad no sea verdadera cuando la cantidad de los senos es finita, sin embargo, la igualdad es verdadera cuando la cantidad es infinita; porque entonces* *la suma de todas las tangentes iguales entre sí,* EE, *no difiere del arco entero* BP, *o de la suma de todos los arcos iguales* DD, *más que una cantidad menor que cualquiera dada: lo mismo que la suma de los* RR *del entero* AO.

El texto hace exclamar a LEIBNIZ en carta al marqués de l'HOPITAL que PASCAL parecía tener, en ocasiones, una venda en los ojos. LEIBNIZ considera el triángulo EKE' y su semejanza con el ADI. Este último es siempre finito, sean cualesquiera los puntos E que se tomen sobre la tangente, y siempre semejante al EKE' que, cuando se tomen los puntos E muy próximos entre sí, en longitud menor que una cualquiera dada, tenderá a hacerse cero. Pero dada la semejanza con el ADI, constante, el triángulo "infinitesimal" —o *triángulo característico,* con palabras de LEIBNIZ— podrá ser estudiado en sí. Además, cuando los puntos E se aproximen entre sí más de una cantidad cualquiera dada, la tangente tiende a identificarse precisamente con el arco, y como los catetos del triángulo son cantidades infinitesimales puede volver a estudiarse la línea representativa de una función como compuesta de arcos de línea o elementos lineales. Generalizando, una superficie como compuesta por elementos rectangulares o bidimensionales, etc. El cálculo diferencial puede, de esta forma, independizarse del principio de CAVALIERI o del método de los indivisibles en su forma primitiva y, por ello, de las servidumbres de las imágenes de las figuras y sus correspondientes preparaciones previas a la demostración, así como de la servidumbre de un lenguaje poco apto para el progreso científico.

Ya en 1684, en su *Nova methodus pro maximis et minimis,* LEIBNIZ aplica el método algebraico-cartesiano a la diferenciación; busca las reglas operativas de la misma, como, por ejemplo, $d(xy) = dx.y + y.dx$. Pasa a diferenciales de segundo orden y orden superior observando la analogía existente entre la multiplicación de números y la composición de los operadores de su cálculo, empleando la notación d^n para la n-sima derivada, ya que

es un poco como si, en lugar de las raíces y potencias, se quisiera sustituirlas siempre por letras y en lugar de xx, *o* x^3, *tomar* m *o* n, *tras haber declarado que éstos deben ser las potencias de la cantidad* x. *Juzgad, señores, cómo ello embarazaría. Ocurre lo mismo con* dx *o* ddx, *y las diferencias no son menos las afecciones de las magnitudes indeterminadas en sus lugares,* *que las potencias son las afecciones de una magnitud puesta aparte. Me parece, pues, que es más natural designarlas de forma que hagan conocer inmediatamente la magnitud de las cuales son las afecciones*[21].

Newton y su enfoque mecánico.

Si el enfoque de LEIBNIZ es de naturaleza casi estrictamente algorítmica, no sucede lo mismo con el adoptado por NEWTON, su gran disputador en la primacía creadora del Cálculo diferencial. En NEWTON el enfoque es de carácter mecánico, siguiendo la corriente iniciada por GALILEO, quien hizo pasar a primer plano problemas como el cálculo de la velocidad y trayectoria de graves, o los astronómicos con la consiguiente problemática de hallar las trayectorias de los cuerpos celestes.

En este sentido, NEWTON considera una curva no como la gráfica de una función, sino como la trayectoria de un punto en el espacio. Es decir, una curva es lo que describe un punto en movimiento durante un cierto tiempo; aunque el tiempo sea un mero fondo, que fluye de modo continuo y uniforme. Así en su *Tratado de la cuadratura de curvas,* NEWTON escribe:

No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes todo lo pequeñas que se quieran, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas son descritas y engendradas, no por yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de sus puntos; las superficies, por el movimiento de líneas; los sólidos, por el movimiento de las superficies; los ángulos por la rotación de sus lados; los tiempos, por un flujo continuo; y así sucesivamente.

El problema planteado por el físico inglés consiste en determinar la velocidad instantánea de un punto en un momento dado de su trayectoria. Para ello descompone la velocidad en dos componentes, paralela cada una a un eje de coordenadas del sistema de referencia plano al que refiere la trayectoria del móvil. A cada una de las componentes de la velocidad las llama "fluxiones" de x o y, de las componentes paralelas a los ejes, mientras que la velocidad instantánea,

---

21 *Id.*, p. 212.

la velocidad del punto en un momento determinado, recibe el término de "fluxión del arco". Pero precisamente calcular la velocidad instantánea de un punto en un punto de su trayectoria, conocida esta, no es otra cosa que calcular la derivada de la función que la misma define en el punto dado. Con lo cual, conocida la ecuación de la trayectoria, determinar las relaciones entre las fluxiones, no es otra cosa que resolver un problema de Cálculo diferencial, no es otra cosa que hallar la derivada de la trayectoria en el punto dado. Recíprocamente, si se conocen las relaciones entre las fluxiones se puede intentar determinar las relaciones existentes entre las componentes de las mismas. En este caso, es reconstruir la función que nos da la trayectoria. Es, pues, un problema de integración.

NEWTON llegaba a establecer, de esta forma, al igual que LEIBNIZ, el carácter dependiente entre ambos cálculos, inverso uno de otro, pero a través de un procedimiento de carácter mecánico y no algebraico o analítico, en cuyo lenguaje los problemas de hallar la tangente o la normal en un punto de la curva una vez conocida ésta, y el de hallar el área determinada por la curva entre dos de sus puntos y uno de los ejes de coordenadas —o, en general, respecto a una recta cualquiera o a otra curva—, eran los inversos.

Ventajas de la notación leibniziana.

A diferencia de LEIBNIZ, NEWTON, quizá por su enfoque mecánico, no pareció sentir la necesidad de emplear una notación adecuada, ni, por supuesto, dar unas reglas convenientes para el manejo de tales notaciones. En cuanto a la integración, ni siquiera la da nombre, absorbido por el Cálculo diferencial. Algunas veces representa la integral de $f(x)$ enmarcando la función o anteponiéndola un pequeño rectángulo. En cuanto al Cálculo diferencial se limitó a colocar un punto sobre la variable dependiente para indicar la fluxión de la misma. Así, "$\dot{x}$" designa "fluxión de x"; "$\ddot{x}$" es lo mismo "fluxión de fluxión", que interpretada mecánicamente equivale a la aceleración instantánea del punto en movimiento en un instante dado, y así sucesivamente.

Este tipo de notación implica serias desventajas respecto al elegido por LEIBNIZ. Por ejemplo, para las derivadas de orden superior, la notación de puntos es absolutamente impracticable. Además, con ella no se ve claramente quién es la variable independiente respecto a la cual se realiza la derivación. Si se escribe "$\dot{y}$", este signo compuesto puede significar tanto $\frac{dy}{dx}$ como $\frac{dy}{dt}$ si se están manejando en el cálculo tanto las coordenadas como el tiempo, lo que ocurre necesariamente en la versión lingüística de la derivación.

La notación de LEIBNIZ presenta otra serie de ventajas indudables, que pueden resumirse con el calificativo de ser operacionales. Entre ellas se pueden destacar las siguientes.

Para obtener la derivada de la función inversa $x = f^{-1}(y) = g(y)$, de la función $y = f(x)$, se demuestra en el cálculo de derivadas que se obtiene mediante la relación $f'(x).g'(y) = 1$, donde tanto $f'(x)$ como $g'(y)$ designan las derivadas de $f(x)$ y de $g(y)$, respectivamente, con la notación creada por LAGRANGE. En términos de diferenciales la igualdad anterior se expresa como $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$. Aquí parece "como si" esas diferenciales fueran números que se pudieran simplificar entre sí, o manejar como tales números tanto para las sumas, restas, cocientes, como para pasar de un miembro a otro...

Análogamente para el caso de la derivada de una función de función, que puede expresarse en notación diferencial como

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Otra ventaja, aunque ya más propia para la ingeniería y técnica que para la propia Matemática, se encuentra en que la notación diferencial permite fijar la atención en las cantidades $x, y, z\ldots$, que intervienen en una función. Ello está en referencia al hecho de que siempre muestra la variable respecto a la cual se verifica la derivación. En Matemática, lo que interesa es la relación funcional entre esas variables —lo que lleva implícito un sentido operacional o de procedimiento que indica cómo obtener una cantidad de otra—, pero es notación que también deja en primer plano la consideración de tales cantidades consideradas en sí, que es lo que interesa para una posible aplicación técnica.

2. La ausencia del rigor.

Precisamente por las ventajas pragmáticas anteriores y por ser el cálculo con las diferenciales de una gran sencillez en cuanto reducido a mera manipulación de signos, la vertiente leibniziana cobró una preponderancia total. Los resultados obtenidos justificaban el éxito de la misma. Y el siglo XVIII verá un auténtico desarrollo de la Matemática considerada como Cálculo, como pura ciencia algorítmica. Lo que importaba, en este siglo, era la consecución de nuevos resultados, sin tener en cuenta las debilidades del punto de partida con el cual se obtenían los mismos, la nula fundamentación de este punto.

Las aplicaciones del Cálculo son tan amplias que la Matemática se ve convertida en disciplina casi natural, abarcando la Mecánica, Astronomía, Optica, Arquitectura tanto militar como civil, Ingeniería de todo tipo.

Las series.

A ello contribuye el manejo de las series. Hay que observar, en su origen, que la teoría de ecuaciones había llegado a un cierto límite. Descubierta la resolución algebraica de la cúbica y de la de cuarto grado, no había proceso racional alguno para obtener las raíces de ecuaciones de grado superior. Incluso las raíces de ecuaciones como las anteriores presentaban dificultades cuando intervenían raíces "falsas", raíces de números complejos. De aquí la necesidad de obtener aproximaciones de dichos valores. Era imprescindible, por ello, la creacion de un nuevo algoritmo, el de las series. Pero no sólo este algoritmo va a mostrarse fecundo en el terreno algebraico. La sumación de series se presenta como clave para el manejo del infinito. Las progresiones, por ejemplo, o las sumas de las potencias sucesivas de los números cuadrados, piramidales, etc., se convierte en tarea propia de matemáticos como Pascal con su manejo del triángulo aritmético. La geometría, aquí, desaparece plenamente y el infinito puede manejarse sin la influencia de esta rama. Paso de la Aritmética a lo infinito y, con ello, a la posibilidad de definir el concepto de función sin apoyatura imaginativa o de intuición sensible alguna.

El propio Leibniz, en carta a Fontenelle de 12 de julio de 1702, señalaba el entronque entre el estudio de las series y el cálculo integral:

> *He observado que hay dos formas de llegar a las sumas de las áreas o a las rectificaciones de las curvas por el infinito: una por los infinítamente pequeños, o cantidades elementales, de los que se busca la suma; otra por una progresión de los términos ordinarios de los que se busca la suma o terminación cuando se finaliza en lo que envuelve el infinito..., y este método difiere* toto genere *de nuestro cálculo de las diferencias, de las sumas.*

Ahora bien, el concepto de serie y el de suma de una serie, tal como aparece en la literatura matemática de la época, resultan de una vaguedad inconcebible actualmente. Para poder realizar tal suma, la serie ha de ser convergente, pero el concepto de convergencia no se adquiere con nitidez hasta muchos años después. Así, se obtienen errores francamente fuertes, con interpretaciones ciertamente curiosas. Gino Loria, hablando de este período narra las andanzas y desventuras de Guido Grandi en los terrenos del análisis. La reproduzco a continuación por su interés:

> *Por su parte* Guido Grandi, *docto eclesiástico que fue uno de los primeros, en Italia, en usar análisis leibniziano, al obtener la fórmula*
>
> $$\int_0^n x^n dx = \frac{x^n + 1}{n + 1},$$ *que sirve para calcular el área de una parábola de orden superior, la aplicó imprudentemente al caso* $n = -1$, *obteniendo un resultado infinito; adelantándose, luego, a considerar valores del exponente menor que* -1, *para interpretar geométricamente su resultado, introdujo, juntamente con* Wallis, *la inconcebible noción de "espacios más que infinitos", defendiéndola con una obstinación digna de mejor causa, contra matemáticos más razonables que él. El mismo matemático, un buen día, partiendo de la conocida fórmula* $\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ *que se obtiene*

de la suma de los términos de una progresión geométrica, haciendo x = 1 *—sustitución de cuya legitimidad, por entonces, nadie dudaba— obtuvo el siguiente resultado:*

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Ahora bien, según se escriba esta relación bajo una u otra de las dos formas siguientes

$$(1) \frac{1}{2} = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

$$(2) \frac{1}{2} = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - \ldots$$

se encuentra como valor del segundo miembro 0 *o bien* 1, *resultados estos absurdos y contradictorios entre sí.*

Y bien, el buen sacerdote no tuvo escrúpulo alguno en explicar la presencia de $\frac{1}{2}$ *como valor medio entre* 0 *y* 1, *asegurando que la fórmula* (1) *era la expresión matemática del mundo de la nada*[22].

La fórmula $\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ es la expresión de la serie geométrica alternada, cuya convergencia únicamente está asegurada cuando la razón es menor que la unidad. Pero esta condición ni la impuso MERCATOR —primero, al parecer, en publicarla— ni sus inmediatos seguidores, como se observa en el caso de GRANDI.

El puro algoritmo.

Los discípulos de LEIBNIZ perfeccionan el Cálculo, pero en su aspecto instrumental. El aspecto de fundamentación del mismo queda en un segundo plano. En este terreno puede citarse a los BERNOULLI y, sobre todo, al suizo LEONARDO EULER, de quien ARAGO exclamó:

---

[22] Gino LORIA: *Historia sucinta de la Matemática.* Ed. Iberoamericana, Buenos Aires, 1948, pp. 117-8.

EULER *calculaba sin esfuerzo aparente, de la misma manera que los hombres respiran, o las águilas se sostienen por sí mismas en el aire.*

En sus trabajos, EULER se apoyaba en un oscuro paso al límite, sin formulación explícita. Buen continuador de LEIBNIZ, perfeccionará las notaciones e introducirá, ya de modo definitivo, los signos e para el número trascendente base de los logaritmos neperianos; i para la unidad compleja; las funciones trigonométricas, donde fija el signo π para expresar la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro...

En el aspecto exterior, sus escritos se presentan, en general, con fórmulas en continuos desarrollos en serie. Así, define el número e, las funciones exponenciales e^x, e^{ix}, las trigonométricas *sen x, cos x, ...* Ahora bien, la ausencia de una auténtica preocupación por los fundamentos de la disciplina a la que dedica sus esfuerzos le lleva a no destacar la convergencia o no de cada uno de tales desarrollos. Aunque como buen matemático —quizá EULER sea el más grande algorítmico de todos los tiempos—, sabedor inconsciente de la importancia que este punto tiene para el manejo de la suma de una serie, llega a solicitar del lector matemático extremada atención para el empleo de este tipo de algoritmo. Sin embargo, el propio EULER, tras esta advertencia, se permitirá sumar la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} x^n$ y obtener, nada menos, que 0 para tal suma.

El ejemplo de EULER puede servir de modelo. Sus escritos son, al exterior, de casi idéntica factura de los que podrán observarse un siglo después. Pero EULER, maestro en el manejo del Cálculo, maestro en el logro de nuevos capítulos de la Matemática, enriquecedor de la misma, no podía ser considerado como maestro alguno en el rigor y la precisión de sus demostraciones.

De este enfoque no se puede extrañar nadie de que la Matemática española, muy tarda en ponerse al corriente de la Matemática mundial, viera cómo la introducción del Cálculo diferencial e integral apareciera en un libro dedicado a la navegación, como instrumento para el cálculo de las condiciones veleras de un navío, en el *Examen marítimo*, de JORGE JUAN, publicado en 1771.

Posibles explicaciones.

Quizá la clave de tal ausencia de rigor se encuentre en la consideración "intuitiva", objetal de los elementos manejados. El área determinada por una curva y un eje, o el volumen engendrado por una superficie, eran algo "concreto", casi material. La integral que permite calcular tal área o volumen ha de representar a la misma, por lo que una trasposición ilegítima, aunque de hecho posible, puede conducir a considerar tal integral como un objeto de la misma especie o categoría que el área o volumen, puede conducir a una identificación conceptual de ambos elementos, Análogamente, la normal o la tangente en un punto de la curva, la velocidad o la aceleración de un móvil son nociones intuibles, casi visibles. Por la misma ilegítima trasposición anterior, puede considerarse que la diferencial es un objeto. Integral, diferencial, como objetos o conceptos abstractos poseyendo una realidad en sí.

Junto a esta posible explicación hay que tener presente, igualmente, el origen de ambos conceptos. La integral surge como tal área, como suma de cantidades infinitesimales, cantidades que en la representación intuitiva eran "algo", hasta un breve segmento. Y su unión debía serlo igualmente. La atención recaía, al dar una explicación de los fundamentos, más sobre la existencia de esos objetos concretos e intuibles de tangente, normal, área, infinitésimo..., que sobre el modo de obtenerlos. Modo que sólo se pondrá de manifiesto en el siglo XIX de forma rigurosa al hacer desaparecer el concepto en sí de integral, o el de diferencial, para dejarlos reducidos a meras definiciones de un procedimiento de cálculo que se encontraba subyacente en ambos casos: el paso al límite. Es decir, dada una función $f(x)$ y un punto x_1, se obtenía el cociente incremental

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{\Delta f}{\Delta x};$$

a continuación se intenta realizar una simplificación que impida la aparición de expresiones indeterminadas de la forma $\frac{0}{0}$. Finalmente, el siglo XIX pone el acento en un tercer punto, el de pasar al límite la expresión obtenida cuando diferencial de x tiende a cero. Y la clave del proceso de diferenciación se quiere, precisamente, que sea este paso al límite y no el quedarse en el mero cociente incremental, aunque se hablara de la "razón última" del mismo como equivalente a $\frac{df}{dx}$, o, en la notación de LAGRANGE, a $f'(x)$. Si se queda en este cociente es que se considera a los incrementos de la función y de la variable independiente como cantidades o números, como algo existente en sí, y no como la indicación de una posterior, pero inmediata operación. Si dichos incrementos pueden considerarse como diferencias pequeñas en relación con las cantidades que intervienen en el cálculo, no se puede considerar al cociente $\frac{df}{dx}$ como el cociente de dos números más pequeños que cualquier número real dado, como la "razón última" idéntica a la derivada.

La crítica de Berkeley: "El Analista".

Si los matemáticos aceptaron el nuevo cálculo como panacea para la resolución de numerosos problemas sin preguntarse por la justificación última del mismo, o envolviendo a esta en una cierta nebulosa o "mística de los indivisibles", algún filósofo señalaba tal carácter de nebulosa. El más representativo de esta tendencia crítica fue el obispo irlandés GEORGE BERKELEY. Su obra, muy breve —sólo 104 páginas—, *El Analista.* Su objetivo, atacar la fe de los incrédulos matemáticos en algo confuso, casi inadmisible. Su fecha de publicación, 1734. El fuerte escándalo provocado entre los matemáticos británicos hizo que a este libro se le considere como marcando

> *un punto de transformación en la historia del pensamiento matemático en Gran Bretaña* [23].

BERKELEY se dirige, más que a la forma expresiva, como hiciera TACQUET respecto al estilo de los indivisibles, contra el concepto de infinitésimo y el consiguiente manejo del mismo. Admite los resultados que se consiguen por este método y pretende dar una razón de la exactitud de los mismos. Quizá uno de los puntos más

---

[23] F. CAJORI: *A history of the concepcion of limits and fluxions...*, página 89. Tomado de J. NEWMANN, *Sigma,* vol. 1, p. 211. Ed. castellana Grijalbo, Barcelona, 1968.

interesantes esté en señalar que el método de trabajo de los matemáticos, la obtención de sus resultados, se realiza mediante un proceso inductivo y no por vía deductiva como se pretendía o como hasta algunos matemáticos creían. Es interesante entresacar algunos párrafos e interrogantes de este "Discurso dirigido a un matemático infiel".

> No tengo ninguna discrepancia en cuanto a sus conclusiones, sino sólo en cuanto a su lógica y método: ¿Cómo lo demuestra?, ¿de qué objetos se ocupa?, y, ¿los concibe claramente?, ¿sobre qué principios procede?, ¿cuán válidos pueden ser? y ¿cómo los aplica?...
>
> El gran autor del método de los diferenciales se dio cuenta de esta dificultad y, por ello, aceptó aquellas graciosas abstracciones y metafísicas geométricas, sin las cuales se apercibió de que no podía hacerse nada sobre los principios dados; y el lector juzgará lo que había hecho con ellos, en la forma de la demostración. En realidad, debe reconocerse que utilizaba los diferenciales al igual que los andamios de una construcción, como cosas que debían ser dejadas a un lado o librarse de ellas, tan pronto se encontraran líneas finitas proporcionales a ellas. Pero, entonces, estos exponentes finitos se encuentran con ayuda de los diferenciales. Por tanto, todo lo que se obtenga por medio de dichos exponentes debe adscribirse a los diferenciales que, por ello, deben suponerse previamente. ¿Y qué son estos diferenciales? Las velocidades de incrementos que desaparecen. ¿Y qué son estos mismos incrementos que desaparecen? No son cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, pero tampoco son nada. ¿No podemos denominarlas los espíritus de las cantidades desaparecidas? [24].

Pocos años después, D'ALEMBERT insistirá en los mismos puntos. Afirmará:

> *Querría saber qué idea clara y precisa se puede esperar que surja en el espíritu por una definición parecida. Una cantidad es algo o nada; si es algo, no se ha desvanecido; si no es nada está desvanecida totalmente. Es una quimera la suposición de un estado medio entre los dos anteriores* [25].

---

[24] En *Sigma,* 1, p. 214.
[25] De J. RUYTINX, p. 316.

Su ataque, contra el principio de tercero excluido, aunque quizá hubiera sido más propio hacerlo contra el principio de identidad, ya que lo que se hace es dar una igualdad $A = B$, agregar un "infinitésimo" a A y quedar $A + \epsilon = B$, para luego hacer desaparecer este infinitésimo "ϵ".

BERKELEY, en *El Analista*, realizaba una serie de interrogantes en los cuales va más directamente al objetivo perseguido en este ensayo. De entre ellos se pueden citar:

> *Interrogante* 4.—¿Puede decirse adecuadamente que los hombres proceden según un método científico, sin concebir claramente el objeto sobre el que tratan, el fin propuesto y el método por el cual se persigue este fin?...
>
> *Interrogante* 16.—¿No son corrientes entre los analistas ciertas máximas que chocan al buen sentido? Y, ¿no se cuenta entre ellas el supuesto común de que una cantidad finita dividida por nada es infinita?...
>
> *Interrogante* 31.—Allí donde no hay incrementos, ¿puede existir una *ratio* de incrementos? ¿Puede considerarse que "nada" sea proporcional a cantidades reales? Hablar de sus proporciones ¿no es decir sin-sentidos? ¿En qué sentido debemos entender la proporción de una superficie a una línea, de un área a una ordenada?
>
> *Interrogante* 63.—Los matemáticos, que gritan contra los misterios, ¿han examinado alguna vez sus propios principios? [26].

Explicación del éxito.

Al no tener discrepancia alguna en cuanto a las conclusiones del Cálculo diferencial, BERKELEY se ve obligado, tras la crítica, a dar alguna explicación o justificación de la validez de los mismos. Esta justificación será seguida por matemáticos como MAC LAURIN —que contribuirá a clarificar, por una parte, el método; pero por otra, volverá a utilizar los recursos clásicos, sin la notación criticada por BERKELEY, para escapar a su crítica—, LAGRANGE, CARNOT... No es otra que la "compensación de errores". Los errores que proceden

[26] *Sigma*, vol. 1, p. 215.

de la suposición falsa que se hace al considerar una curva como poligonal de infinitos lados, cada uno de los cuales, supuesto un infinitésimo que al ser prolongado se convierte en tangente a la curva, se compensa en el proceso del cálculo en el cual se retienen únicamente cantidades infinitesimales del mismo orden. Con ello BERKELEY no viene a decir otra cosa que las diferenciales son cantidades introducidos en el cálculo a fin de facilitar la expresión del mismo y de las condiciones del problema. Una vez realizado dicho cálculo se los compara con las cantidades propuestas respecto a las cuales los infinitésimos o diferenciales pueden considerarse como nulos, y entonces se deben eliminar tales diferenciales o momentos de las ecuaciones en que se encuentren para hallar el resultado completo. Explicación que el propio BERKELEY resume con las palabras

> *en virtud de un error doble, llegamos, si bien no a una ciencia. sí a una verdad.*

Consecuencias.

La crítica realizada por BERKELEY a los fundamentos del Cálculo diferencial es uno de los elementos que contribuyen a la paralización del trabajo matemático inglés durante el siglo XVIII. Pero no fue elemento único. Junto a él se encuentra el derivado del poder inmenso de NEWTON que, con su prestigio, orientó decisivamente a los matemáticos insulares contra la obra y notación de LEIBNIZ y sus discípulos continentales. La polémica entre ambos, con el antagonismo nacionalista provocado, hizo que no se mantuviera la notación del filósofo-matemático alemán. Y ésta, a pesar de toda la debilidad intrínseca de su fundamentación conceptual, era de carácter operativo, lo que no ocurría con la elaborada por NEWTON. De esta forma, mientras en el Continente se desarrollaba la Matemática a ritmo vertiginoso —con el consiguiente peligro de que, por su extraordinaria potencia para resolver problemas técnicos se confundiera con una ciencia de la naturaleza más—, en las Islas Británicas el trabajo matemático quedaba rezagado durante todo el siglo. Sin embargo, el hecho mismo de que una notación, de que la elección de un simbolismo adecuado influyera de modo tan decisivo en la evolución de una disciplina, permitirá un cambio de mentalidad en los matemáticos ingleses del siglo XIX, que les hará colocarse a la cabeza del manejo formal simbólico, con la consiguiente ampliación de los signos operatorios sobre conjuntos cualesquiera y no solamente numéricos. Ello pertenece, ya, a otro capítulo, el de la ambigüedad notacional que dicha ampliación puede entrañar.

Característica estilística: Un ejemplo.

Ya he señalado cómo, desde un aspecto exterior, los escritos matemáticos de la época, se muestran como permanentes desarrollos en serie, y plagadas sus páginas de signos de integración y derivación, con muy poca literatura escrita en lengua vulgar que puede ser latín o la lengua propia del matemático. Esta, además, se dirige a problemas que no conciernen de modo directo a la Matemática, sino a temas de las ciencias de la naturaleza. Así, a las artes de la navegación, arquitectura, ingeniería, etc. Pero obteniendo de estos temas nuevos logros estrictamente matemáticos, avalando la afirmación del proceso dialéctico entre las ciencias de la naturaleza como estímulo para la Matemática abstracta.

Naturalmente, este enfoque de la Matemática es el que predomina. Aunque siempre hay otros temas y otros estilos: los BERNOULLI o el propio EULER cuando escriben sobre temas topológicos, por ejemplo, el de los puentes de *Könisberg*. Voy a tomar como ejemplo un texto de EULER, *De Curvis Elasticis,* Apéndice primero de su *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes* de 1744. Primer tratado sistemático de las curvas elásticas, aplicación del problema isoperimétrico de máximos y mínimos, el interés estriba en el método de estudio empleado por EULER y por todos los matemáticos de la época. A partir de un fenómeno físico el estudio se hace en una primera fase estrictamente analítica; después, ya se habla de la materia propia a estudiar, aunque siempre envuelta en el ropaje del simbolismo matemático. Así, en este ejemplo, una primera parte —los tipos de curvas elásticas— es materia tratada matemáticamente; la segunda, dedicada a las oscilaciones de una lámina elástica, se orienta más propiamente a la dinámica. Sólo reproduzco, por el tema de este libro, unos muy breves pasajes, de entre los más matemáticos, de la clasificación de las curvas apoyada en una ecuación diferencial de la que puede obtenerse, entre otras cosas, las integrales elípticas, aunque en otros pasajes aparezcan ecuaciones diferenciales de hasta cuarto orden [27].

ENUMERACIÓN DE CURVAS ELÁSTICAS.

14. Como observamos desde ahora que el círculo no es el único incluido en las clases de curvas elásticas, sino que hay una variedad infinita de tales curvas, valdrá la pena enumerar todos los distintos tipos incluidos en esta clase de curvas. De esta forma no sólo el carácter de esas curvas será percibido más profundamente, sino también, en cualquier caso que se presente, será posible decidir de la mera figura en qué clase puede incluirse la curva formada. Se hará aquí la lista de los diferentes tipos de curvas de la misma forma en que las clases de curvas algebraicas se incluyen en un orden dado enumerado comúnmente.

15. La ecuación general de las curvas elásticas es

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + x^2)^2}}$$

que, si el origen de abscisas se traslada sobre el eje la distancia $\dfrac{\beta}{2\gamma}$, y si a^2 se escribe $\dfrac{a^2}{\gamma}$ (o se hace $\gamma = 1$), toma la forma más simple

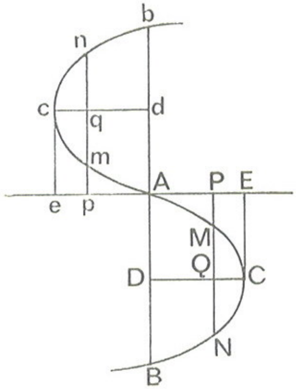
$$dy = \frac{(\alpha + x^2)\, dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + x^2)^2}}$$

Pero como $a^4 - (\alpha + x^2)^2 = (a^2 - \alpha - x^2)(a^2 + \alpha + x^2)$, sea $a^2 - \alpha = c^2$, es decir, $\alpha = a^2 - c^2$, y la ecuación se trasformará en

$$dy = \frac{(a^2 - c^2 + x^2)\, dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$$

[27] *De Curvis Elasticis,* Ap. I a *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive...*, Tradn. inglesa realizada por OLDFATHER, ELLIS y BROWN. *Isis* XX, 1933, pp. 72-160.

Sea el carácter de la curva AMC (ver figura) el expresado por esta ecuación, y la abscisa $AP = x$, y la ordenada $PM = y$. Entonces, como $\beta = 0$, la dirección de la fuerza que curva la



cinta elástica será normal al eje AP en el punto A, y entonces AD representará la dirección de la fuerza actuante. Esta fuerza será igual a $\dfrac{2Ek^2}{a^2}$ donde Ek^2 expresa la elasticidad absoluta.

16. Si $x = 0$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^2 - c^2}{s\sqrt{2a^2 - c^2}}$. Esta expresión da la tangente del ángulo que la curva AM hace con el eje AP en A, el seno del cual será igual a $\dfrac{a^2 - c^2}{a^2}$. Por lo cual, si $a^2 = \infty$, la cinta será normal al eje AP en el punto A, y no tendrá curvatura, porque la fuerza curvante $\dfrac{2Ek^2}{2}$ desaparece. Además, en el caso en que $a^2 = \infty$, la forma natural de la cinta aparece, es decir, la línea recta. Esta, entonces, constituye la primera de las curvas elásticas, que representa la línea recta AB prolongada al infinito en ambas direcciones.

22. Ahora aunque para el punto C es conocido que la abscisa es $AE = c$, sin embargo, la distancia EC no puede ser determinada excepto por integración de la ecuación

$$dy = \frac{(a^2 - c^2 + x^2)\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$$

Porque si después de la integración x se hace igual a c, el valor de y dará la distancia CE, que tomada dos veces dará la distancia AB, o el intervalo Dd que hay entre los diámetros. Análogamente, la integración será necesaria para determinar la longitud de la cinta curvada AC. Ya que, si el arco $AM = s$,

$$ds = \frac{a^2\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)\,(2a^2 - c^2 + x^2)}}$$

y su integral, valorada para $x = c$, dará la longitud de la curva AC.

[*Nota traducción inglesa*: Si $\dfrac{x}{c} = u$, y $\dfrac{c^2}{c^2 - 2a^2} = k^2$, entonces

$s = \dfrac{a^2}{\sqrt{2a^2 - c^2}} \displaystyle\int \dfrac{du}{\sqrt{(1 - u^2)\,(1 - k^2u^2)}}$, es decir, según la

definición de LEGENDRE, s es una función elíptica de primer orden. Por la misma sustitución, y se transforma en $y = \sqrt{2a^2 - c^2}$

$$\cdot \int \sqrt{\frac{1 - k^2u^2}{1 - u^2}}\,du - \frac{a^2}{\sqrt{2a^2 - c^2}} \int \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)\,(1 - k^2u^2)}}.$$

El primer término del segundo miembro es una integral elíptica de segundo orden, y el segundo miembro no es otro que la integral de primer orden. De aquí que la integración de s y de y no pueda ponerse en forma condensada.]

23. Ahora como esas fórmulas no admiten integración, se procurará expresar convenientemente por aproximación los valores

del intervalo AD y del arco AC. A este fin, sea $\sqrt{c^2 - x^2} = z$, de donde

$$PM = y = \int \frac{(a^2 - z^2)}{z\sqrt{2a^2 - z^2}}\, dx \text{ y } AM = s = \int \frac{a^2 dx}{z\sqrt{2a^2 - z^2}}$$

Expresados como series

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2 - z^2}} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\left(1 + {}^1/_4 \cdot \frac{z^2}{a^2} + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}\,\frac{z^4}{a^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12} \cdot \frac{z^6}{a^6} + \ldots\right), \text{ de donde}$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{a}{z} + \frac{1}{4}\,\frac{z}{a} + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}\,\frac{z^4}{a^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}\,\frac{z^6}{a^6} + \ldots\right) dx$$

$$s - y = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{z}{a} + \frac{1}{4}\,\frac{z^3}{a^3} + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}\,\frac{z^5}{a^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}\,\frac{z^7}{a^7} + \ldots\right) dx$$

24. Como deseamos esas integrales únicamente para el caso $x = c$, en el cual $z = 0$, entonces pueden ser expresadas convenientemente con ayuda de la circunferencia del círculo. Suponiendo que la razón del diámetro a la circunferencia es como 1 a π,

$$\int \frac{dx}{z} = \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

Ahora de la misma forma las siguientes integrales se determinan

$$\int_0^c z\, dx = {}^1/_2 \cdot \frac{\pi c^2}{2} \qquad \int_0^c z^3 dx = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\,\frac{2}{\pi}\, c^4$$

$$\int_0^c z^5 dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{\pi}{2}\, c^6 \qquad \int_0^c z^7 dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\,\frac{\pi}{2}\, c^8$$

Con ayuda de estas integrales tenemos

$$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\,\frac{c^2}{2a^2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\,\frac{c^4}{4a^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\,\frac{c^6}{8a^6} + \ldots\right)$$

$$AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{c^2}{2a^2} - \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{c^4}{4a^4} - \ldots\right)$$

Si, respectivamente, $AE = c$ y $AD = b$ son conocidos, de esas ecuaciones se determinarán la constante a y la longitud de la curva AC. Recíprocamente también, conocida la longitud de esta curva AC, y la constante a por quien la fuerza externa está determinada, será posible hallar las distancias AD y CD.

2

1. La reacción.

He insistido en que el siglo XVIII ve una ampliación enorme de los campos de la Matemática, pero no en su aspecto conceptual ni riguroso expresivo, sino en el meramente algorítmico, calculador. Amadeo Francisco Frézier, geómetra francés de no muy gran prestigio, llegaría a exclamar, cargado de melancolía,

> *...hoy, la geometría no está de moda y para pasar por científico hay que hacer ostentación del análisis.*

Algunos matemáticos intentarán reaccionar ante los errores que se cometen en el análisis, ante su ausencia de fundamentación. Así d'Alembert —quien realiza la primera demostración no circular, como reconoció Gauss, de que los números complejos permitían resolver ecuaciones algebraicas de grado cualquiera y no sólo las de segundo—, publica en la *Enciclopedia* artículos en los que ya se definen de manera rigurosa y con toda claridad conceptos como los de límite y derivada, agregando que ambos constituyen toda la "metafísica del cálculo infinitesimal". Metafísica a la que Carnot había dedicado un libro con ese título precisamente. En cuanto a las series, por ejemplo, D'ALEMBERT se referirá a su uso, señalando como clave la convergencia de las mismas:

> *Todos los razonamientos fundados sobre series que no son convergentes, me parecen muy sospechosos, aunque los resultados estén de acuerdo con las verdades conocidas* [28].

El rigor: CAUCHY.

Corresponderá a CAUCHY el mérito de iniciar —junto con GAUSS, aunque quizá con mayor repercusión, dada su posición como profesor en la Escuela Politécnica de París, centro comunal de la Matemática del mundo en esos momentos—, y de modo ya definitivo, la vuelta al rigor expresivo y conceptual en la Matemática. Consciente del enfoque, prácticamente revolucionario, que da a su obra, en su *Analyse algébrique,* de 1822, CAUCHY afirma:

> *He tratado de dar a los métodos todo el rigor que se exige en geometría, sin acudir jamás a los argumentos tomados a la generalidad del álgebra. Tales argumentos, aunque bastante admitidos comúnmente, sobre todo en el pasaje de las series convergentes a las divergentes y en el de las cantidades reales a las imaginarias, se me ocurre que no deben ser considerados sino como inducciones adecuadas a veces a hacer presentir la exactitud y la verdad, pero que no están de acuerdo con la exactitud tan reputada de las ciencias matemáticas. Además, debe observarse que ellas tienden a atribuir a las fórmulas algebraicas una extensión ilimitada, mientras que en la realidad, la mayor parte de esas fórmulas subsisten únicamente bajo ciertas condiciones y para determinados valores de las cantidades que ellas encierran.* Determinando esas condiciones y esos valores, fijando de una manera precisa el sentido de las notaciones que utilizo, *toda vaguedad desaparece* [29].

Dándose cuenta de que la base de todo el análisis se encuentra en el concepto de función, CAUCHY pretende aprehender este con-

---

[28] DE REY-PASTOR: *La Matemática superior.* Ed. Iberoamericana, 1951, página 220. El texto de D'ALEMBERT en *Opusc. Math. 5,* 1768, p. 183.

[29] DE REY-PASTOR-José BABINI: *Historia de la Matemática,* p. 288. Ed. E. C., Buenos Aires.

cepto manejando una definición muy parecida a la que hoy se utiliza. Se debe observar a este respecto que ni PASCAL, ni DESCARTES, ni LEIBNIZ, ni NEWTON, a pesar de que manejan el concepto de "curva" o trayectoria, se ven obligados a considerar que tal curva o trayectoria no es otra cosa que la gráfica de una función, de una cierta correspondencia entre dos conjuntos que son, para ellos, como para el mismo CAUCHY, exclusivamente numéricos. En todo caso, encuentran que ciertas curvas pueden expresarse de modo analítico por expresiones algebraicas, pero no ven en éstas el enunciado de relación funcional alguna.

Junto al mérito de darse cuenta de la importancia que una aprehensión rigurosa del concepto de función presenta para la Matemática, CAUCHY tiene también el indiscutible mérito de poner en luz, y esta vez de modo definitivo, el paso al límite que se encontraba subyacente en toda la obra matemática del siglo y medio anterior. Tomándola como operación originaria, CAUCHY puede obtener los conceptos de función uniforme y de derivada de una función. Con ello realiza la definitiva supresión de la metafísica en este terreno del análisis, ya que la existencia de la propia derivada puede demostrarse por un proceso estrictamente analítico y no apoyándose en la imagen intuitiva de la tangente o la normal que implicaban la admisión, sin más, de tal existencia. Incluso la definición de tales conceptos geométricos pasaba a ser mera consecuencia de la definición anterior y no causa de la misma.

A pesar de este esfuerzo clarificador del análisis, CAUCHY también tendrá sus propias oscuridades. Así, el hecho de que una función sea continua en un intervalo, por ejemplo, se define por la condición de tener derivada para todos los valores de la variable independiente en dicho intervalo; lo que mantenía la imagen intuitiva de poseer tangente la curva representativa en todos sus puntos. Por las mismas fechas, BOLZANO construía una función, que posteriormente se denominaría "patológica", continua en todos los puntos de su intervalo de definición, pero carente de derivada finita en cada uno de dichos puntos. La función construida por BOLZANO, sin embargo, no tendrá difusión, y la existencia general de este tipo de funciones se difundirá solamente avanzado el siglo.

En cuanto al cálculo integral, CAUCHY da un radical cambio en el enfoque existente. Vuelve al estilo geométrico y retoma el método de exhaución de EUDOXIO como idea directriz, en lugar de los indivisibles. Con su concepto de paso al límite ya puede hacer riguroso el método apagógico. La integral, como antes la derivada, abandonaría el terreno de la intuición sensible. Se define, ahora, de un modo estrictamente analítico. Para ello resalta como concepto primario el de integral definida, empleando para definirla el método que ha recibido el nombre de "sumas de RIEMANN" o, como lo ha llamado RICARDO SAN JUAN, "definición de CAUCHY", y que debiera denominarse, realmente, sumas de EUDOXIO o ARQUÍMEDES. La integral indefinida, base de los trabajos de PASCAL y de sus sucesores —basta recordar que la señalización de los límites de integración, por ejemplo, en el texto anteriormente citado de EULER sólo aparece tras los trabajos de FOURIER, concretamente tras el *Traité analytique de la chaleur*, de 1822— será obtenida como consecuencia de la integral definida; proceso inverso al seguido hasta ese momento.

El problema central de este método consiste en asegurar la convergencia de dichas sumas hacia el área de la figura definida por una función continua cualquiera, lo que se consigue gracias al concepto de límite.

Con ello, además, CAUCHY hace otra contribución importante, la de señalar la importancia que tiene el problema de tal convergencia, aunque, consciente del hecho, tenga que lamentar el abandono de las series divergentes en aras del rigor:

> *Me he visto obligado a admitir diversas proposiciones que parecerían* algo duras; *por ejemplo, que una serie divergente carece de suma* [30].

Pasarlo de este punto a los desarrollos en serie, es inmediato. De esta forma, CAUCHY ha de precisar el concepto de serie convergente. Conseguido lo cual, se verá constreñido a averiguar y formular criterios para la determinación de tal convergencia. Lo cual se resuelve por comparación con series previamente conocidas, que sean mayorantes o minorantes de la dada. CAUCHY se convierte en el primero de los que se pudieran llamar criteriólogos. En esta labor pronto se verá acompañado por NIELS HENRIK ABEL, quien llega a precisar, antes que el propio CAUCHY, la distinción fundamental entre convergencia simple y convergencia uniforme.

---

[30] En REY-PASTOR, *La Mat. sup.*, p. 219.

2. Vidas paralelas: Abel-Galois.

El espíritu que anima la obra de Cauchy es un espíritu de rigor, continuado por todos los matemáticos del siglo xix. Parece llegado el momento de realizar una revisión y sistematización de lo mucho conseguido. Es fenómeno que se puede observar en dos jóvenes matemáticos casi contemporáneos, muy distintos en estilo y forma de vida, pero unidos por un mismo espíritu, que se pudiera denominar romántico. Los dos jóvenes son el noruego Niels Henrik Abel, nacido el 5 de agosto de 1802, en Finö, y muerto de miseria y tuberculosis el 6 de abril de 1829, en Fröland: veintiséis años, ocho meses; y el francés Evariste Galois, nacido el 25 de octubre de 1811, en Bourg-la Reine, y muerto en duelo, en París, el 31 de mayo de 1832: veinte años, siete meses.

Ambos se han formado en la lectura de los trabajos de Euler y de Lagrange, pero donde han aprendido a "tratar" la Matemática es en los libros de Cauchy. Y este trato no es otro que el manejo del rigor. Para mayor paralelo —los dos son los segundos hijos de familia numerosa, de padres fervientemente republicanos, los dos ligados a la Matemática hacia los quince años, intentando resolver el mismo problema de la quíntica—, ambos desprecian al Cauchy hombre, regalista puro. A un Cauchy que tendrá una decisiva actuación en cuanto al no reconocimiento público de ambos, ya que pierde o no informa las memorias que estos dos matemáticos envían a la Academia de Ciencias de París, auténticas obras maestras de la Matemática. Igualmente ambos, tras el fracaso académico, confiarán en el mismo matemático, de su generación: Carlos Gustavo Jacob Jacobi, nacido el 19 de diciembre de 1804 y muerto el 18 de febrero de 1851. De él, Niels Henrik Abel, ya en su lecho de muerte, dirá a su prometida:

Jacobi es el único hombre que me ha comprendido.

Evariste Galois, en su testamento científico dirigido en forma de carta a su fiel Auguste Chevalier:

Pedirás públicamente a Jacobi o a Gauss dar su opinión no sobre la verdad, sino sobre la importancia de los teoremas.

Después de lo cual se encontrarán, espero, gentes que encontrarán su provecho en descifrar todo este galimatías.

a) NIELS HENRIK ABEL: *"encontrar la razón"*.

NIELS HENRIK ABEL[31] heredero del espíritu de rigor iniciado por CAUCHY, tratará de "encontrar la razón por la cual las ecuaciones hasta el cuarto grado son resolubles y no las demás". El objetivo se cifra no en resolver unas u otras ecuaciones, el objetivo se convierte en buscar la razón, la causa última de un resultado y no el resultado mismo. Su espíritu crítico se acentúa a lo largo de su brevísima vida. Así, en las cartas que durante su viaje de estudios por el Continente europeo escribe a sus amigos noruegos, va precisando sus ideas en cuanto a la naturaleza y método de la Matemática. En Carta de 16 de enero de 1826, dirigida a HOLMBÖE —quien fue su descubridor en la escuela, convertido en amigo, financiero y, finalmente, editor de sus obras completas, ya muerto ABEL—, escribe:

> *Las series divergentes son en su totalidad una invención del diablo, y es una vergüenza que se intente fundar en ellas demostración alguna. Utilizándolas puede obtenerse lo que se quiera; han producido mucho mal y provocado muchas paradojas. Imagínese nada más ridículo que decir*
> $$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \dots$$
> *donde* n *es un entero positivo.* Risum teneatis amici. *Mis ojos se han abierto sobre este hecho sorprendente: no existe en el conjunto de las matemáticas, salvo para casos simples como, por ejemplo, las series geométricas, prácticamente ninguna serie infinita cuya suma haya sido determinada con precisión; en otras palabras, las partes más importantes de las matemáticas están sin fundamentos. La mayor parte es correcta, lo que es verdad y muy sorprendente. Me ejercito en hallar la razón; es un problema muy interesante. No creo que podáis citar muchos teoremas en los cuales aparezcan series infinitas y donde no pueda hacer a la demostración objeciones bien fundadas. Ensayad y respondedme. La misma serie del binomio no ha sido derivada rigurosamente... Volvamos a mi ejemplo. Sea* $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 +$, *etc., una serie infinita. Usted sabe que un método usual para hallar su suma consiste en determinar la suma de la serie* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$, *y en seguida po-*

[31] Las citas de N. H. ABEL, de *Obras completas* editadas por SYLOW-LIE, 2 vols. 1881. Pueden encontrarse muy buenas referencias en la quizá un poco anticuada biografía de PESLOUAN, Ed. Gauthier-Villars, París, 1906. En castellano, "Niels Henrik Abel", de J. DE LORENZO, *Tercer Programa*, número 1, Madrid, 1966, pp. 77-118.

ner $x = 1$ *en el resultado. Esto puede ser correcto, pero me parece que no puedo aceptarlo sin prueba ya que, si se demuestra que* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ *para todos los valores de* x *que sean menores que* 1, *no debe seguirse necesariamente de allí que la misma cosa sea verdad para* $x = 1$. *Quizá la serie* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ *tiende hacia un valor distinto que* $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ *cuando* x *se aproxima cada vez más a* 1. *Esto es evidente en el caso general en que la serie* $a_0 + a_1 + \dots$ *es divergente ya que no tiene suma. He podido probar que esto es correcto si la serie converge. El ejemplo siguiente muestra cómo se puede deducir. Se puede demostrar rigurosamente que para todo valor de* x *menor que* π, $^1/_2\, x = \operatorname{sen} x - {^1/_2} \operatorname{sen} 2x + {^1/_3} \operatorname{sen} 3x -$ *etc. Aparentemente esta fórmula será válida para* $x = \pi$. *Pero se tendría entonces*

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen} \pi - {^1/_2} \operatorname{sen} 2\pi + {^1/_3} \operatorname{sen} 3\pi - \dots \textit{ absurdo.}$$

Con lo cual, NIELS HENRIK ABEL lo que demuestra, en esta carta, es que un teorema famoso de CAUCHY, enunciado en el *Curso de Análisis,* de 1822, "sufre excepciones". El teorema de CAUCHY establecía.

> Cuando los diferentes términos de una serie son funciones de una misma variable x, continuos respecto a esa variable en el entorno de un valor particular para el cual la serie es convergente, la suma S de la serie también es, en el entorno de ese valor particular, función continua de x.

Conceptuación de la Matemática.

Dos meses después, su crítica se hace más profunda, si cabe. Se dirige al método mismo empleado en la Matemática, considerándolo como causa de la debilidad de esta disciplina, en lo que va más allá del propio BERKELEY, que lo consideraba como un hecho: el método inductivo. Insiste en el objetivo propuesto: buscar la causa y dar las demostraciones rigurosas de lo ya elaborado. Desde DRESDEN, el 29 de marzo, dirigiéndose a HANSTEEN, catedrático de la Universidad de Cristianía, que había sido fundada en 1810, *La Matemática pura, en su sentido más estricto, debe ser en el porvenir mi estudio exclusivo. Quiero aplicarme con todas mis fuerzas a aportar algo de claridad en la prodigiosa oscuridad que se encuentra hoy en el Análisis. Carece hasta tal punto de plan y de conjunto, que es verdaderamente maravilloso que pueda ser estudiado por tanta gente, y lo peor es que no está tratado con rigor. No hay más que muy pocas proposiciones en el Análisis superior que estén demostradas con todo rigor. Por todas partes se encuentra la desgraciada manía de concluir de lo particular a lo general y es muy extraño que con un método parecido no se encuentre, a pesar de todo, más que poco de lo que se denominan* paradojas. *Es verdaderamente muy interesante buscar la razón. Desde mi punto de vista, ello proviene de que las funciones de las que se ha ocupado el Análisis hasta ahora pueden, en su mayoría, ser expresadas por potencias. En cuanto intervienen otras, lo que, es verdad, no ocurre frecuentemente, entonces no va más, y de conclusiones falsas derivan una cantidad de proposiciones que se encadenan. He examinado varias y estoy contento de haberlas puesto en claro. Siempre que se emplea un método general, todo va bien; pero he debido ser extremadamente circunspecto, porque las proposiciones, una vez admitidas sin demostración rigurosa (es decir, sin demostración), se enraizan tan fuertemente en mi espíritu que estoy expuesto en cada momento a servirme de ellas sin considerarlas con mas atención...*

Su estilo.

No pasar nunca de lo particular a lo general, sino proceder a la inversa; buscar el rigor demostrativo en toda proposición, sea de la que se parta, sea de la que se llegue en la búsqueda. Dos principios a los que NIELS HENRIK ABEL se ligará estrechamente. A ellos agregará un tercero, herencia de su padre, quien gustaba tener por lema: "Quiero que todo sea tan simple que se pueda considerar como salido sin esfuerzo". Con estos tres principios como norma, NIELS HENRIK ABEL compondrá memorias modelo de redacción en su aspecto didáctico, a pesar de que en todas ellas lo esencial sea algún nuevo descubrimiento matemático. La claridad exigida por el tercer principio se une al rigor exigido por el segundo para alcanzar un nuevo resultado.

He dicho, modelo de redacción. Cada memoria se estructura en una introducción, donde se expone la importancia del tema, los motivos del trabajo; a continuación se reconoce lo realizado por otros. Se prosigue con la apuntación del método —siempre de lo general a lo particular, pero concretado ahora a una cuestión determinada, aunque siempre abstracta— a seguir. Se plantean las cuestiones en toda su generalidad. Se formulan los teoremas o proposiciones ya en particular y se remite a la demostración, que se da prácticamente completa, sin omitir, en general, paso alguno. Estilo creador didáctico se podría calificar el utilizado por NIELS HENRIK ABEL, excesivamente pesado quizá para una mente creadora, que preferirá saltar las etapas de la demostración o hacerse las suyas propias; pero realmente formativo para quien puede ser un operario de la Matemática y el resultado puede importarle, pero más la consecución del mismo.

b) EVARISTE GALOIS: "*amigo del pueblo*".

Si EVARISTE GALOIS [32] puede parangonarse con NIELS HENRIK ABEL en cuanto a juventud, soledad, desconocimiento público como matemático en vida, temas de trabajo..., muy otro va a ser su estilo. Revolucionario apasionado, lo es tanto en su acción vital como en su pensamiento. Pertenece, de entrada, a la Sociedad secreta "Aide-toi, le ciel t'aidera". Pasa, después, a la más radical "Amigos del Pueblo", donde conoce a BLANQUI —considerado el revolucionario modelo de todos los tiempos—, RASPAIL, DUCHATELET —su compañero fundamental en las manifestaciones y en las estancias en prefecturas y cárcel—, DELAUNAY y LEBON —sus dos "buenos amigos patriotas", a los cuales dirigirá una de sus últimas cartas, escrita la noche que precede a su duelo—, Auguste CHEVALIER —hermano del célebre saintsimoniano, y quizá el más fiel amigo que jamás tuviera EVARISTE GALOIS—...

Si el último año de la vida de ABEL se mueve entre pobreza, enfermedad y trabajo matemático, el último año de la vida de EVARISTE GALOIS se mueve entre manifestaciones, cárcel y trabajo matemático. El 9 de mayo de 1831, tras la supresión de los artilleros de la Guardia Nacional, foco revolucionario al que pertenecían los antes citados, GALOIS es detenido para ser puesto en libertad el

[32] Las citas de GALOIS, de *Oeuvres mathematiques d'Evariste Galois*. Ed. Gauthier-Villars, París, 1962, al cuidado de AZRA-BOURGNE con Prefacio de J. DIUDONNÉ.

15 de junio. Vuelve a ser detenido el 14 de julio e internado en la cárcel de Santa Pelagia, donde se encuentra con sus viejos amigos; el 23 de octubre se celebra su juicio: seis meses de cárcel. En marzo de 1832, el día 16, se le envía a un hospital en prevención de la epidemia de cólera que amenaza París y ser considerado GALOIS un detenido político importante, justificador del regicidio. En mayo es puesto en libertad condicional. Pero es provocado a duelo en circunstancias nada claras por "patriotas" que le piden palabra de honor de no decir nada a otros "patriotas". EVARISTE intenta la conciliación por todos los medios. Agotados, acude al duelo en la mañana del 30 de mayo. Se le encuentra mortalmente herido horas más tarde, abandonado por sus propios testigos, si es que los hubo. Muere en el hospital Cochin, de París, a las diez de la mañana del 31 de mayo, siendo enterrado en fosa común en el cementerio de Mont-Parnasse, el 2 de julio, en presencia de gran número de sus correligionarios que, del cementerio, pasan a las barricadas.

Creación, no expresión.

A pesar de estas circunstancias, EVARISTE GALOIS trabaja en terreno matemático. Pero, condicionado por ellas, su redacción no podrá tener la forma acabada que se observa en los escritos de ABEL. El propio GALOIS lo advierte:

> *Si la redacción siente en general la cárcel, seguramente no es por culpa mía.*

No sólo existe este condicionante. También, el muy propio del carácter de GALOIS y sus consideraciones acerca de la naturaleza y método de la Matemática. Para él, el ensayo o el artículo de creación, en el momento histórico en el cual se encuentra —ya he advertido cómo la Matemática estaba considerada por las "glorias de la ciencia" como una ciencia de la naturaleza más, instrumento para la captación y desarrollo de disciplinas técnicas y no como una ciencia en sí—, carecen de toda posible repercusión. Necesita, previamente, crear un ambiente propicio para que puedan ser posteriormente comprendidas. Sin embargo, como la Matemática es obra de creación social y no sólo individual, los aportes que él puede realizar en ese momento podrán ser realizados por otros. De aquí que vea interesante la publicación de algún ensayo pero, entre otros motivos, "a fin de tomar fecha para mis búsquedas". Además, para EVARISTE GALOIS lo importante no es escribir, sino crear. Una vez obtenido, alcanzado un resultado, el interés por darle forma se atenúa. Hay una especie de pereza, de atonía expresiva que recuerda la "pereza" cartesiana. Ahondando en su especial temperamento se puede citar un fragmento encontrado entre sus papeles, revelador también de una idiosincrasia especial:

> *Un hombre que tiene una idea puede elegir entre tener, durante su vida, una reputación colosal de hombre sabio, o bien hacerse una escuela, callarse y dejar un gran nombre en el porvenir. El primer caso tiene lugar si él practica su idea sin emitirla, el segundo, si la publica. Hay un tercer medio justa mitad entre los dos, es publicar y practicar, entonces se es ridículo.*

Visión de la Matemática.

En cuanto a la mejora del ambiente, se requiere la difusión para el gran público de lo fundamental de la Matemática, de sus métodos, de su real fundamento. Y GALOIS intentará realizar también esta labor. Para ello comienza una serie de artículos sobre *Discusiones en torno a los Progresos del análisis puro,* de los cuales sólo podrá redactar uno, y en redacción no definitiva. En él, como en las cartas antes citadas de 16 de enero y 29 de marzo de NIELS HENRIK ABEL, GALOIS expone sus concepciones de la Matemática. Son las que, junto a los factores anteriormente enumerados, van a determinar el estilo más propio de la redacción matemática. Descubre que el método seguido por esta ciencia no es, contra lo que se cree, el deductivo, sino el inductivo, el mismo que poseen las ciencias experimentales, procediéndose por ensayo y error. Pero, a diferencia de ABEL, toma este descubrimiento como un hecho del cual partir y no como una paradoja que requiera explicación de ningún tipo. Como tal ciencia imperfecta, que avanza a saltos, es reflejo del espíritu humano que la crea y, por ello mismo, es obra inacabada, incompleta. Pero en estas imperfecciones GALOIS verá la grandeza de esta ciencia, su indiscutible atracción. De este hermoso artículo, que no llegó a ver publicado en vida, entresaco algunos párrafos, advirtiendo que los subrayados no son del autor, sino míos.

> *De todos los conocimientos humanos, se sabe que el Análisis puro es el más inmaterial, el más eminentemente lógico, el*

único que no toma nada a las manifestaciones de los sentidos. Muchos concluyen que es, en su conjunto, el más metódico y el mejor coordinado. Pero es un error. Tomad un libro de Algebra, ya didáctico, ya de invención, y no veréis allí más que un amasijo confuso de proposiciones cuya regularidad contrasta violentamente con el desorden del total...

Que si encontráis un método, un enlace, una coordinación, todo ello es falso y artificial. Son divisiones sin fundamentos, aproximaciones arbitrarias, una colocación totalmente convencional. Este defecto peor que la ausencia de todo método ocurre sobre todo en las obras didácticas compuestas la mayoría por hombres que ni tienen la inteligencia de la ciencia que profesan.

Todo ello extrañará mucho a las gentes, que, en general, han tomado la palabra Matemática como sinónimo de regular.

No obstante, también extrañará si se reflexiona que aquí como en todo la ciencia es la obra del espíritu humano, que está destinado más a estudiar que a conocer, a buscar más que a encontrar la verdad. *En efecto, se concibe que un espíritu que tuviera potencia para percibir de un solo golpe el conjunto de las verdades matemáticas, no sólo las conocidas por nosotros, sino todas las verdades posibles, podría también deducirlas regular y como maquinalmente de algunos principios combinados por un método uniforme; sin más obstáculos. Sin las dificultades que el sabio encuentra en sus exploraciones, y que frecuentemente son imaginarias. Pero también sin más papel para el sabio. Pero ello no ocurre así: si la tarea del sabio es más penosa aunque más hermosa, la marcha de la ciencia también es menos regular.* La ciencia progresa por una serie de combinaciones, donde el azar no se puede decir que no juegue el menor papel, su vida es ruda y recuerda la de aquellos minerales que crecen por yuxtaposición. *Ello se aplica no sólo a la ciencia tal como resulta de los trabajos de una serie de sabios, sino también a las búsquedas particulares de cada uno de ellos. En vano los analistas querrían disimulárselo: ellos* no deducen, combinan, componen: *por muy inmaterial que sea el análisis no está en nuestro poder más que otros; es preciso espiarlo, sondearlo, solicitarlo. Cuando ellos llegan a la verdad, es dando tumbos de este y otro lado como han llegado allí.*

Preocupación por el estilo.

El estilo expresivo que estas ideas implican es del tipo que se pudiera denominar de invención pura. Se rechaza la organización axiomática de toda la ciencia Matemática como pura utopía, sólo realizable en pequeñas parcelas de la misma. Ello entraña, naturalmente, el rechazo del estilo clásico, del estilo geométrico, propio de la Matemática griega como caracterizador de toda la expresión y creación matemática. Como consecuencia la expresión más propia del cultivador de esta disciplina se encontrará en el ensayo, en el trabajo o memoria corta, concisa, todo lo rigurosa que sea posible, pero sabiendo que, a la larga, este rigor puede no parecerlo, aunque el resultado obtenido, la "verdad" tan afanosamente buscada, se incorpore a nuevas teorías bien por simple yuxtaposición, bien porque pueda coordinarse de modo deductivo con ellas.

Debo hacer notar que es EVARISTE GALOIS el primer matemático en quien encuentro una auténtica preocupación por el estilo matemático. Las palabras anteriores podrían haber sido escritas por cualquier matemático; no implican, necesariamente, tal preocupación por el estilo, que ha de deducirse de las mismas. Sin embargo, otros textos son más directos, más relacionados con la manera de expresarse, para bien o para mal, el matemático. La preocupación de GALOIS se dirige en dos vertientes: la didáctica, la creadora.

En cuanto a los libros de texto, la acusación realizada por GALOIS es terminante: faltos de método; el estilo didáctico utilizado por los autores de la época, mero artificio que oculta la esencia misma del tema a desarrollar. La culpa, si bien directa del autor, también lo es de la disciplina, ya que

> *Las obras didácticas deben compartir con las obras de los inventores esta falta de una marcha segura todas las veces que la materia de que tratan no está enteramente sometida a nuestras luces. No podrán tomar, por lo tanto, una forma metódica más que en un número bien pequeño de materias. Para dársela, sería necesario una profunda inteligencia del análisis, y la inutilidad de la empresa retrae a quienes podrían aguantar la dificultad.*

El autor debería ser consciente de este hecho. No pretender contradecirlo. Limitarse, no al encadenamiento en plan que desconoce, orgánico, sino atenerse únicamente a los resultados obtenidos, exponiéndolos como tales temas parciales, sin extrapolaciones arbitrarias.

En cuanto al estilo de invención, GALOIS no sólo critica, da normas para su ejecución. Normas o principios que, esencialmente, son:

a) Mantener el carácter conceptual de la Matemática —ya he dicho que GALOIS pertenece a la primera promoción de matemáticos románticos, que pretenden la separación nítida entre su disciplina y las ciencias de la naturaleza, aunque no formulen de modo claro las relaciones posibles entre ambas.

b) Evitar los largos cálculos o desarrollos algorítmicos, que ocultan las ideas directrices —"saltar de puntillas sobre los cálculos" será su expresión.

c) Agrupar los problemas por sus afinidades profundas de estructura y no por su aspecto superficial —clara visión, totalmente actual, de lo que puede ser denominada Ciencia matemática o ciencia de las estructuras formales, obtenidas precisamente por esta norma de atenerse a las afinidades íntimas de estructura y no por los elementos que se manejan.

De aquí que, junto a la memoria corta, al ensayo breve, la redacción matemática debe manifestarse por su extremada concisión. Para ello, las propias demostraciones, en las cuales se encuentra, precisamente, el desarrollo algorítmico, deben ser dadas en esquema o incluso ser eliminadas del texto. De lo contrario, detenido el lector en el proceso demostrativo, perderá la marcha rectora del trabajo. Es lo que el propio GALOIS hará, pidiendo al lector, en las pocas memorias redactadas de modo completo que dejó escritas, que supla la ausencia de las mismas, completándolas él mismo o realizándolas si viene al caso.

Son normas que la actual redacción matemática exige, estrechamente. Son las normas, por otra parte, que explican que GALOIS fuera un incomprendido en su época, dada al gran desarrollo algorítmico; y que explican, igualmente, que la figura del matemático francés atraiga en el momento presente enorme simpatía, y no sólo por su trágica y corta vida.

En ella GALOIS sólo publicó dos memorias en forma acabada. En septiembre de 1832 AUGUSTE CHEVALIER publicó la Carta-Testamento en la *Révue Encyclopédique*. Pero la obra esencial, con la memoria presentada a la Academia de Ciencias sólo apareció en 1846, publicada por LIOUVILLE en su *Journal*. En la cárcel de Santa Pelagia escribió, en diciembre de 1831, el único *Prefacio* que deseaba fuera a la cabeza de sus trabajos, y que dada la violencia del mismo sólo se publicó por vez primera completo en 1962. Dada la importancia del mismo para comprender tanto el pensamiento como el método y estilo de GALOIS, lo transcribo completo, a pesar de su extensión.

PREFACIO

Cecy est un libre de bonne foy.
(Montagne.

En primer lugar, la segunda hoja de esta obra no está encumbrada por los apellidos, nombres, cualidades, dignidades y elogios de algún príncipe avaro cuya bolsa se hubiera abierto al humo de los inciensos con amenaza de cerrarse cuando el incensario estuviera vacío. No se ve allí, en caracteres tres veces más gruesos que el texto, un homenaje respetuoso a alguna alta posición en las ciencias, a un sabio protector, cosa, sin embargo, indispensable para quienquiera que teniendo veinte años quiera escribir. No digo a nadie que debo a sus consejos o a sus ánimos todo lo que hay de bueno en mi obra. No lo digo: porque sería mentir. Si tuviera que decir algo a los grandes del mundo o a los grandes de la ciencia (y en el tiempo que corre la distinción es imperceptible entre ambas clases de gentes), juro que no serían agradecimientos. Debo a los unos hacer aparecer tan tarde la primera de las dos memorias, a los otros haber escrito todo en prisión, estancia que a duras penas se puede considerar como un lugar de recogimiento, y donde con frecuencia me he encontrado estupefacto de mi impotencia para cerrar la boca a mis estúpidos Zoilos: y creo poder servirme de esta palabra de Zoilo con toda seguridad por mi modestia, tan bajos están mis adversarios en mi espíritu. No es de mi incumbencia decir cómo y por qué se me retiene en prisión. (*Al margen* GALOIS *escribe*: El autor es republicano; es miembro de la sociedad de los amigos del pueblo; ha dicho CON GESTO que el regicidio es algunas veces (muy) útil. He aquí tres motivos suficientes para que se le mantenga en prisión, y en verdad no sé de qué se queja. (*Nota del editor*): pero debo decir cómo los manuscritos se guardan en las carteras de los señores miembros del Instituto aunque en verdad no concibo una parecida impotencia por parte de los hombres que tienen sobre la conciencia la muerte de ABEL. Aunque no quiero compararme a este ilustre geómetra, bastará decir que mi memoria sobre la teoría de ecuaciones ha sido depositada en la academia de ciencias en el mes de febrero de 1830, que extractos habían sido enviados en 1829, que ninguna noticia me ha llegado y que me ha sido imposible ver los manuscritos. Hay en este género anécdotas muy curiosas: pero tendría mala gracia en contarlas, porque ningún accidente salvo la pérdida de mis manuscritos, me ha llegado. Feliz viajero, mi mala estrella me ha librado de las garras de los lobos. Ya he dicho demasiado para hacer comprender al lector por qué, a pesar de mi buena voluntad, me hubiera sido absolutamente imposible preparar una dedicatoria como querría.

En segundo lugar, las dos memorias son cortas y de ninguna manera proporcionadas a los títulos; y además hay al menos tanto francés como álgebra hasta el extremo de que el impresor, cuando le han llevado los manuscritos, ha creído de buena fe que era una introducción. En este punto soy completamente inexcusable: ¡hubiera sido tan fácil retomar en sus elementos toda una teoría, bajo el pretexto de presentarla bajo una forma necesaria a la inteligencia de la obra, o mejor aún de manera de ampliar una rama de la ciencia con dos o tres nuevos teoremas, sin designar cuáles eran! ¡Hubiera sido tan fácil también sustituir sucesivamente todas las letras del alfabeto en cada ecuación, numerándolas por orden para poder reconocer a qué combinación de letras pertenecen las ecuaciones subsiguientes; lo que hubiera multiplicado el número de las ecuaciones, si se reflexiona que después del alfabeto latino, hay todavía el alfabeto griego, que, una vez agotado éste, quedan los caracteres góticos, que nada impide servirse de letras siríacas, y si es preciso de letras chinas! ¡Hubiera sido tan fácil transformar diez veces cada frase, teniendo cuidado de hacer preceder cada transformación de la solemne palabra teorema; o mejor aún de llegar por NUESTRO ANÁLISIS a resultados conocidos desde el buen EUCLIDES; o, finalmente, hacer preceder y seguir cada proposición de un cortejo innumerable de ejemplos particulares! ¡Y de tantos medios no he sabido elegir ni uno!

En tercer lugar, la primera memoria no es virgen del ojo del maestro; un extracto enviado en 1831 a la academia de ciencias ha sido sometido a la inspección del señor POISSON, quien ha venido a decir en sesión no haberla comprendido. Lo que a mis ojos fascinados por el amor propio de autor, prueba simplemente que el señor POISSON no ha querido o no ha podido comprender, pero probará ciertamente a los ojos del público que mi libro no significa nada.

Todo concurre a hacerme pensar que en el mundo sabio, la obra que someto al público será recibida con la sonrisa de la compasión; que los más indulgentes me tacharán de equivocado; y que durante algún tiempo seré comparado a WRONSKI o a esos hombres infatigables que encuentran todos los años una solución nueva de la cuadratura del círculo. Tendré que soportar sobre todo la gran risa de los señores examinadores de los candidatos a la Escuela Politécnica (que me sorprendo de pasada de no ver ocupar a cada uno un sillón en la academia de ciencias, porque su lugar no está ciertamente en la posteridad), y que teniendo tendencia a monopolizar la impresión de los libros de matemáticas no admitirán sin estar formalizados que un joven dos veces rechazado por ellos tenga también la pretensión de escribir, no libros didácticos es verdad, sino libros de doctrina.

Todo lo que precede, lo he dicho para probar que es conscientemente como me expongo a la risa de los tontos.

Si con tan pocas esperanzas de ser comprendido, publico, a pesar de todo, el fruto de mis vigilias, es a fin de tomar fecha para mis búsquedas, es a fin de que los amigos que he formado en el mundo antes de que se me enterrara bajo los barrotes, sepan que estoy con vida, es a fin de afligir a los sabios que, enrojecidos de criticar a los jóvenes, encuentran medio, sin embargo, de ayudar por un silencio calculado a los ignorantes y perezosos cuya ocupación es tratar de charlatanismo a cualquiera que haya sido bastante feliz para ser precedido por su reputación, es quizá también con la esperanza de que esas búsquedas puedan caer en manos de gentes a quien un orgullo estúpido no impedirá la lectura, y dirigirles en la nueva vía que debe seguir, según yo, el análisis en sus ramas más altas. Es necesario saber que no hablo aquí más que del análisis puro; mis aserciones transportadas a las aplicaciones más directas en las matemáticas se harían mas paradójicas.

Los largos cálculos algebraicos han sido primero poco necesarios para el progreso de las Matemáticas, los teoremas muy simples apenas ganaban al ser traducidos en la lengua del análisis. No es más que después de EULER que este lenguaje más breve se ha hecho indispensable por la nueva extensión que este gran geómetra ha dado a la ciencia. Después de EULER los cálculos se han hecho cada vez más indispensables, pero cada vez más difíciles a medida que se aplicaban a objetos de ciencia más avanzados. Desde el comienzo de este siglo, el algoritmo había llegado a un grado tal de complicación que todo progreso se hacía imposible por este medio, sin la elegancia que los geómetras modernos han sabido imprimir a sus búsquedas, y por medio de la cual el espíritu aprende prontamente y de un solo golpe un gran número de operaciones.

Es evidente que la elegancia tan alabada y a tan justo título, no tiene otro principio.

Del hecho bien comprobado de que los esfuerzos de los geómetras más avanzados tiene por objeto la elegancia, se puede concluir con certidumbre que se hace cada vez más necesario considerar varias operaciones a la vez, porque el espíritu no tiene tiempo de detenerse en los detalles.

Ahora bien creo que las simplificaciones producidas por la elegancia de los cálculos (simplificaciones intelectuales, se entiende; materiales no hay), tiene sus límites; creo que llegará el momento en que las transformaciones algebraicas previstas por las especulaciones de los analistas no encontrarán ni el tiempo ni el lugar de producirse; a tal extremo que será necesario contentarse con haberlas previsto. No quiero decir que no haya nada nuevo para el análisis sin ese recurso; pero creo que un día sin aquél todo se habrá agotado.

Saltar de puntillas sobre estos cálculos; agrupar las operaciones, clasificarlas según sus dificultades y no según sus formas; tal es, según yo, la misión de los geómetras futuros; tal es la vía por la que he entrado en esta obra.

No hay que confundir la opinión que aquí emito, con la afectación que algunos tienen de evitar en apariencia toda especie de cálculo, traduciendo por frases muy largas lo que se expresa muy brevemente por el álgebra, y agregando así a la longitud de las operaciones, las longitudes de un lenguaje que no está hecho para expresarlas. Esas personas van con un retraso de cien años.

Nada parecido aquí: aquí se hace el análisis del análisis; aquí los cálculos más elevados, las funciones elípticas, ejecutados hasta el presente están considerados como casos particulares, que ha sido útil, indispensable tratar, pero que sería funesto no abandonar por búsquedas más amplias. Habrá tiempo de efectuar los cálculos previstos para este alto análisis y clasificarlos según sus dificultades, pero no especificados en su forma, cuando la especialidad de una cuestión lo exija.

La tesis general que adelanto no podrá ser bien comprendida más que cuando se lea atentamente mi obra que es una aplicación: no que este punto de vista teórico haya precedido a la aplicación; sino que me he preguntado, terminado mi libro, lo que lo haría tan extraño a la mayoría de los lectores, y examinándome, he creído observar esta tendencia de mi espíritu en evitar los cálculos en las materias que trato, y que es, lo he reconocido, una dificultad insuperable a quien quiera efectuarlo generalmente en las materias que he tratado.

Se debe prever que, tratando materias tan nuevas, introducido en una vía tan insólita, muchas dificultades se han presentado que no he podido vencer. También en esas dos memorias y sobre todo en la segunda que es la más reciente, se encontrará la fórmula: "yo no sé". La clase de lectores de la que he hablado al comienzo no faltará de encontrar con qué reír allí. Es que desgraciadamente no se duda que el libro más precioso del más sabio sería aquél donde dijera lo que él no sabe, no se duda que un autor no engaña nunca tanto a los lectores como cuando disimula una dificultad. Cuando la concurrencia, es decir, el egoísmo no reine más en las ciencias, cuando se asocie para estudiar, en lugar de enviar a las academias los paquetes cerrados, se exigirá publicar sus menores observaciones por pocas novedades que contengan, y se agregará: "no sé el resto".

7. CORRIENTES DE LA MATEMATICA EN EL SIGLO XIX

La reacción contra la visión excesivamente algorítmica de principios del siglo XIX permite superar alguna de las dificultades que presentaban los fundamentos, la "metafísica" de la Matemática. Se abren nuevas vías —como la estrictamente algebraica de GALOIS— al razonamiento matemático; se inicia un nuevo estilo en la propia expresión de la misma. A pesar de sus limitaciones, la reacción provoca un cambio total en el espíritu matemático. Espíritu que va considerando como necesario, y de un modo cada vez más radical, la presencia del rigor en la disciplina que construye. Rigor en sí y no justificado por una traducción a otros lenguajes o estilos, como en el siglo XVII, o por su éxito pragmático. Surgen, de esta forma, tres grandes corrientes que pretenderán la implantación de dicho rigor y, consecuentemente, la clarificación de los fundamentos. Las tres, unidas a principios de este siglo, en síntesis unificadora y única posible para romper los límites a que las tres habían alcanzado, darán origen al enfoque actual de la Matemática, enfoque formalista, con su secuela expresiva, de estilo semiformal.

Corriente central la constituye el proceso denominado "Aritmetización del análisis", originador de lo que voy a denominar, siguiendo a CHEVALLEY, "Estilo de los ϵ". Junto a ella, la aparición de las geometrías no-euclídeas planteará con toda crudeza el problema de la intuición espacial o sensible y las relaciones que la Matemática puede tener respecto al mundo material o "real" que nos rodea. Igualmente, un renacer de la Geometría, que planeará durante el siglo como nueva "reina de las Matemáticas", renacida tras los trabajos de MONGE, posibilitará nuevas formas expresivas al matemático, limitadas a este campo. Finalmente, la tercera corriente retoma el enfoque algorítmico de LEIBNIZ para crear nuevos entes matemáticos y dar paso a la consideración relacional de la Matemática y no objetal como hasta ese momento se la consideraba. Tercera corriente que denomino "abstractiva", aunque las dos anteriores, evidentemente, gocen del mismo carácter de abstracción total, propio de la Matemática contemporánea.

Las tres se producen, naturalmente, en sólo ciertos sectores de entre los matemáticos. Sectores que, sin embargo, van a condicionar al resto en cuanto a la exposición y en cuanto al propio estilo conceptual y, por consiguiente, expresivo. Las tres, por otra parte, se producen no de manera independiente entre sí, como compartimentos estancos, sino en íntima interrelación, con permanentes trasvases conceptuales de una a otra, principalmente la primera y la tercera en los primeros momentos. A pesar de lo cual, dan la impresión de falta de auténtica unidad, pudiéndose hablar, con todo rigor, de *las* Matemáticas.

1. ARITMETIZACION DEL ANALISIS

Dado el desarrollo del Análisis y sus impresionantes aplicaciones —que llegan a absorber hasta la propia Geometría, como ocurre tras los trabajos de MONGE y GAUSS en los dominios de la Geometría diferencial—, el de más inmediato reflejo es el proceso denominado "Aritmetización del Análisis".

1. EL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

La noción de función, clave del desarrollo matemático del momento, había quedado un tanto vaga. Si bien es verdad que BOLZANO y CAUCHY habían definido de modo correcto el concepto de función continua, y CAUCHY y ABEL los de serie convergente y sucesión de números tendiendo a un límite, por ejemplo, las funciones manejadas se consideran como correspondencias entre conjuntos numéricos que, sin embargo, quedan sin especificación en cuanto a su íntima naturaleza y estructura, a la vez que dichas funciones se consideran como continuas totalmente, con expresión analítica sometida a las conocidas y no, por ejemplo, expresables como series. Se mantiene el criterio de EULER para quien función era

> *Functio quantitatis variabilis est expresio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabili*[33].

Distinguiéndose firmemente entre las expresiones analíticas —expresables mediante polinomios, fracciones racionales, exponenciales, logaritmos, senos, etc.— y las arbitrarias; las primeras, a su vez, en algebraicas y trascendentes. Y, de modo natural, una función continua sólo podía ser expresada o definida de forma analítica.

La definición tipo de función de mediados de siglo, y que se ha mantenido hasta nuestros días en textos de carácter didáctico —los tan criticados por GALOIS— puede ser la dada por OSCAR SCHLÖ-

---

[33] *Introductio in analysim* 1750; tomado de REY-PASTOR, *La Mat. sup.*, página 163.

MILCH quien resalta con absoluta claridad el papel numérico de los conjuntos de definición y de valores de la función. En su *Kompendium der höheren Analysis* de 1868, SCHLÖMILCH escribe:

> Si dos números variables x e y están ligados por una igualdad en uno de cuyos miembros aparece sólo la y, como, por ejemplo, $y = \dfrac{(x-a)^2}{2b}$, entonces, a cada valor arbitrario de x le corresponde un valor de y, calculado a través de la igualdad y que, por tanto, no será arbitrario. En estas condiciones se llama a x variable independiente, a y variable dependiente y para indicar que la y depende de x se dice que y es una función de x.

Se parece admitir, de manera tácita, que las operaciones matemáticas tales como el paso al límite, la derivación, la integración, pueden realizarse siempre sobre tales conjuntos numéricos entre los cuales parece poseer un sentido preciso. De esta forma el tratamiento de tales operaciones es casi estrictamente algebraico, consideradas como independientes de los elementos sobre los cuales actúa.

Las paradojas analíticas.

Varios hechos obligaron a revisar tanto las definiciones de las que se partía como a aclarar los conjuntos de definición entre los cuales se realizaban las operaciones. De entre ellos, tres poseen un carácter ciertamente espectacular, paradójico para el matemático de la época.

En primer lugar se puede considerar la aparición de las funciones "patológicas". Funciones continuas, por ejemplo, pero carentes de derivada finita para todo valor de la variable independiente. Ello equivalía a decir, en lenguaje geométrico y muy intuitivo, que existían curvas que podían trazarse sin levantar la pluma del papel, pero que carecían de tangente finita en todos y cada uno de sus puntos. Si bien algunas de estas funciones presentaban un aspecto algo artificioso, pronto surgieron otras que abandonaban tal aspecto, ya que podían expresarse como desarrollos en series trigonométricas. Series que se venían aplicando a muchos terrenos tanto de la práctica —siguiendo la vía iniciada por su creador, FOURIER, quien las inventó para dar explicación del fenómeno de propagación del calor— como de la propia Matemática considerada como ciencia pura. El hecho de las curvas patológicas ha sido muy difundido, con los clásicos ejemplos de las curvas de WEIERTRASS o la posterior de KOCH para que me detenga en este punto algo más, aparte de que su tratamiento no corresponde a un libro de este tipo.

En segundo lugar se pueden considerar las cuestiones relacionadas con la convergencia no uniforme de sucesiones de funciones. En ellas, por ejemplo, el propio CAUCHY había llegado a creer que una serie convergente en la que todos sus términos fuesen funciones continuas de una misma variable, daba como suma una función siempre continua. Error puesto de relieve por ABEL —según he indicado al trascribir la carta a HÖLMBOE—, primero en distinguir la convergencia simple de la convergencia uniforme, finalmente precisada por WEIERTRASS. El error se encontraba, tanto aquí como en el hecho anterior, en la confianza depositada en la intuición, que hacía admitir aspectos no contenidos en las definiciones estrictamente rigurosas. Se puede citar, como ejemplo de tal error intuitivo, el caso siguiente, muy elemental, que tomo de JOSÉ BARINAGA [34]:

La sucesión formada por los arcos de las parábolas de ecuación $y = x^n$, para n natural, de origen $(0,0)$ y extremo $B(1,1)$, tiene como *arco límite* el formado por los catetos del triángulo O, $A(1,0)$ y B. El límite de la ordenada de la parábola variable, correspondiente al punto de intersección de la tangente en BC con el eje de abscisas OX, al crecer n indefinidamente, parece "a primera vista" que debe ser cero o uno, siempre que exista. Sin embargo, el cálculo da $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ para abscisa del punto común a la tangente en B, de ecuación $y - 1 = n\,(x - 1)$ y al eje OX. Luego $y_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ será la ordenada. Con lo cual el límite buscado no es otro que e^{-1}, aproximadamente 0,368.

El tercer hecho que se puede considerar como sorprendente, es la aparición de funciones no integrables en el sentido querido por

[34] *Miscelánea matemática*. Madrid, 1937, p. 11.

CAUCHY, que obligaba a que la función a integrar fuera continua sin más especificación. Corresponde a BERNARD RIEMANN el haber sido, si no el descubridor de este punto, al menos el mérito de haberle dado el relieve exigido. En su trabajo para la Habilitación de 1854 —publicado por DEDEKIND en 1867— RIEMANN da como ejemplo el de la función $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$, donde (nx) representa la diferencia entre nx y el entero más próximo. El segundo miembro da lugar a una función periódica que posee, en cualquier intervalo (a, b) un conjunto denso y numerable de discontinuidades de primera especie correspondientes a los valores racionales irreducibles de x de la forma $\alpha = \pm \frac{2p+1}{2n}$. En estos puntos de discontinuidad el salto viene dado por el límite de $f(\alpha + \epsilon) - f(\alpha - \eta)$ cuando tanto ϵ como η tienden a cero, es decir, en el límite $f(\alpha + 0) - - f(\alpha - 0) = - \frac{\pi^2}{12\, n^2}$. Ahora bien, el número de tales puntos de discontinuidad en que este salto se conserva superior a una cantidad fija positiva arbitraria δ, en cualquier intervalo, resulta finito. De aquí que la función y definida por la serie del segundo miembro —serie que es absoluta y uniformemente convergente para $|x| \leq k$— no puede ser integrable en el sentido dado por CAUCHY. Ello implicaba, entre otras cosas, que la idea ligada a la integral, la de área de una figura tomada como idea primitiva, no era tan clara como quería la intuición. Se hacía problema, así, el propio concepto de área.

2. ESTILO DE LOS "ϵ".

Hechos como los anteriores provocaron la sospecha de que el trabajo hasta entonces realizado fuera estéril o contuviera errores, por haber olvidado este elemental principio de definir de manera rigurosa tanto la función como los campos de validez de la misma. Pero, también, condujeron a un paulatino destierro del elemento intuitivo que daba lugar a la aparición de tan extrañas "patologías". La propia dinámica de la Matemática iba a provocar la aparición de un nuevo enfoque con que tratarla, antítesis del anterior. Corresponde a DEDEKIND y CANTOR por un lado, a WEIERTRASS por otro, un lugar destacado en la revisión de todos los conceptos anteriores y en la expulsión de la intuición sensible —en aras de lo que a la larga será otro tipo de intuición— de los campos del Análisis, con la definitiva implantación de la teoría de las funciones continuas.

CARLOS WEIERTRASS parte, en esta labor de revisión, de una nueva definición del paso al límite de una sucesión, que es la que hasta hace muy pocos años se ha manejado, perfeccionada únicamente en su lenguaje topológico, ausente en el siglo XIX. Con ella, WEIERTRASS da origen a un nuevo estilo matemático: el estilo de los "ϵ", como lo ha bautizado CHEVALLEY. La definición es la siguiente:

> Una sucesión de números $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ se dice que tiene por límite el número u si cualquiera que sea el número positivo ϵ, se puede determinar un entero N (que depende de ϵ) tal que la desigualdad $n > N(\epsilon)$ implique $|u - u_n| < \epsilon$.

El "cualquiera que sea el número ϵ" implica el manejo del infinito potencial y no la verificación de la existencia de la función $N(\epsilon)$ —cuya característica queda sin precisar— para cada ϵ particular. Como señala CHEVALLEY:

> *El empleo por los matemáticos de esta escuela de la definición de límite de* WEIERTRASS *se nota en la apariencia exterior de sus escritos, en primer lugar por el empleo intensivo, y a veces inmoderado, del "ϵ", provisto de diversos índices (es por lo que hemos hablado más arriba del estilo de los "ϵ") —después, en la progresiva suplantación de la igualdad por la desigualdad, ya en las demostraciones, ya en los resultados (teoremas de aproximación; teoremas de limitación superior; teoría del crecimiento, etc.)* [35].

Dos son las consecuencias que se derivan de la definición y del uso de los distintos subíndices que acompañan a "ϵ", y de las desigualdades en que se combinan. Limitándose, de momento, a la primera, se puede observar que sirve para delimitar con precisión los campos de validez en los que se opera. Es WEIERTRASS de los primeros en dar las condiciones, a veces muy restrictivas, en que es posible, por ejemplo, integrar las series término a término, o em-

---

[35] *Variations du style mathématique.* Rev. Met. Mor. 1935, p. 378.

plear la diferencial bajo el signo de integración. Condiciones que también se reflejan en el estilo de los "ϵ" por las continuas referencias al "necesario y suficiente", en vuelta al método apagógico de los antiguos. También los campos de validez van a ser precisados por el trabajo de CANTOR y DEDEKIND en el aspecto topológico, al definir en la recta real primero, después en espacio euclídeo cualquiera, nociones como las de punto de acumulación, conjuntos cerrado, abierto, perfecto...

Pero, junto a esta delimitación de los campos de validez se puede observar que hace surgir una nueva consecuencia: la neta separación respecto a las aplicaciones prácticas. Lo que interesa en este estilo es el rigor y la búsqueda de las condiciones necesarias y suficientes para las cuales han de verificarse las proposiciones. La aproximación que serviría a un técnico no basta para el analista, que se remite de modo constante a las condiciones de existencia y unicidad. Es la separación teoría-práctica a la que ya hacía referencia el propio GALOIS, y que a los analistas del siglo XIX no pareció desagradar, sino al contrario, preocupados también por conseguir la independencia de su disciplina respecto a las ciencias de la naturaleza.

3. EL NÚMERO REAL.

Segunda consecuencia de la definición de límite de WEIERTRASS es hacer que todo el Análisis deba apoyarse en el cuerpo de los números reales. Y ello porque las relaciones de desigualdad no se aplican a conjuntos cualesquiera de entes matemáticos, sino a conjuntos que posean una cierta relación que posibilite, precisamente, tales desigualdades. Relación que no es otra que la de orden. Y que se cumple estrictamente entre los números reales, que constituyen un cuerpo ordenado arquimedianamente y, sobre todo, posee como nota característica la de ser completo. Esto último significa que cualquier ampliación del mismo que mantenga su estructura igual, ha de ser isomorfa al cuerpo real, lo que equivale a decir que no existe tal ampliación. Podía pensarse que, por ejemplo, los números complejos, al definirse como pares ordenados desde los trabajos de HAMILTON de 1837, aunque desarrollados totalmente en 1853 —y que daban justificación algebraica a los complejos, completando la obra geométrica de ARGAND, entre otros—, suponían una ampliación del cuerpo real, con todas sus características. Sin embargo, el cuerpo de los números complejos, uno de cuyos subconjuntos es isomorfo al cuerpo de los números reales, no es ordenado. Los intentos realizados para el establecimiento de tal orden en el siglo pasado fueron varios. Por ejemplo, se intentó dar una ordenación de los complejos de n unidades siguiendo el modelo siguiente:

Dos complejos $A = (a_1, b_1)$ y $B = (a_2, b_2)$ se dicen iguales cuando $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Se dirá que $A < B$ cuando $a_1 < a_2$, y si fuera $a_1 = a_2$, cuando $b_1 < b_2$.

Ahora bien, la ordenación ya no es eudoxiana. Ya que si $A = 0 + i$, y $B = 1 + i$, se tendrá, por la definición anterior $0 < A < B$ y, por muy grande que se tome el número natural n, se verificará siempre que $nA < B$, ya que $nA = 0 + ni$. Tampoco es buena ordenación, ya que el subconjunto definido por la propiedad $a_n > 0$ carece de elemento ínfimo.

Pero el concepto de número real, con el problema que implicaba del continuo geométrico, no estaba muy claramente elaborado. Se podían dar explicaciones, a partir de los números naturales, de tipo riguroso, del número entero y del número racional. A partir del número real, del complejo. Pero quedaba una laguna por cubrir, la del número irracional. Y a cubrirla acudieron algunos de los mejores matemáticos del siglo en auténtica competición por aclarar para siempre el concepto de continuo matemático. WEIERTRASS, DEDEKIND, MERAY y CANTOR, dan tres métodos distintos e independientes entre sí, basados en sucesión única (WEIERTRASS), cortaduras (DEDEKIND) y sucesiones racionales monótonas convergentes (MERAY y CANTOR). Los tres, en el fondo, proceden constructiva, genéticamente, a partir de los números racionales, con la idea intuitiva de que estos presentaban "huecos" que hubiera que rellenar.

RICHARD DEDEKIND, en su obra *Continuidad y números irracionales,* publicada en 1872, y en la cual expone la definición de número real como "cortadura" en el cuerpo de los números racionales, describe así el proceso:

Se puede ver fácilmente que hay infinitas longitudes que son inconmensurables con la unidad de longitud y podremos afirmar: la línea recta L *es infinitamente más rica en puntos, que el dominio* R *de los números racionales en números.*

Si ahora, como es nuestro deseo, procuramos seguir aritméticamente todos los fenómenos sobre la línea recta, el dominio de los números racionales es insuficiente y llega a ser absolutamente necesario que el instrumento R, *construido por la creación de los números racionales sea esencialmente perfeccionado con la creación de nuevos números, de manera que el dominio de los números llegue a ser completo, o, como podríamos decir, alcance la misma continuidad que la recta.*

Estas consideraciones previas son tan familiares y bien conocidas por todos que para muchos resulta superflua su repetición. Aunque yo creo necesaria esta recapitulación para podernos introducir en el problema principal. Pues la manera como generalmente se introducen los números irracionales se basa directamente sobre el concepto de magnitud extensa —la cual resulta que no está definida en ninguna parte—, y explica el número como resultado de medir una de estas magnitudes por otra de la misma clase. En vez de esto pido que la aritmética sea desarrollada por separado [36].

El método empleado por DEDEKIND recuerda al de los clásicos, al de EUDOXIO fundamentalmente, por el carácter más descriptivo que los otros dos procesos. Quizá por ello, LIPSCHITZ, todavía en 1876, le niegue originalidad y sentido, no viendo la necesidad del total rigor y abstracción que en su consecución se necesita. En carta a DEDEKIND manifiesta:

No niego la rectitud de vuestra definición, pero estimo que no se distingue más que en la forma de expresión y no por el fondo, de la que los antiguos han puesto... también desearía que suprimiéseis la afirmación de que proposiciones como $\sqrt{2} . \sqrt{3} = \sqrt{6}$ *no han sido demostrados hasta ahora. Creo, en efecto, que los lectores franceses en particular estarán convencidos como yo de que el (V) libro de* EUCLIDES *contiene los principios necesarios y suficientes para la demostración de ese teorema.*

A lo cual DEDEKIND tiene que responder:

EUCLIDES *puede aplicar su definición de igualdad de razones a todas las magnitudes... cuya existencia esté admitida por*

[36] Tomado de *Sigma*, vol. 4, p. 120, Barcelona, 1969.

buenas razones. Pero para fundar la aritmética sobre la noción de razón de magnitud (lo que jamás ha sido el fin de EUCLIDES*) ello no basta.*

Naturalmente, la aritmética del número real, que va a ser la que permita justificar la teoría de razón de magnitudes precisamente. El proceso de las cortaduras realiza la construcción de tal aritmética. Es proceso idéntico al realizado para el número complejo. Si CARDANO los había admitido y operado con ellos porque le permitían dar explicación de la resolución de algunas ecuaciones cúbicas, y LEIBNIZ los consideraba como meras ficciones lingüísticas, sólo fueron enteramente aceptados en el siglo XIX por su fecundidad y no porque estuvieran rigurosamente definidos. Por un lado la escuela francesa logró la representación gráfica del número complejo, lo mismo que había logrado independientemente GAUSS años antes, y con ello CAUCHY pudo crear el análisis de variable compleja, obteniendo resultados que permitieron enunciar que el camino más corto para, a partir de datos reales, llegar a un objetivo real, pasaba por el campo complejo. Pero sólo obtenía plena justificación racional cuando el irlandés HAMILTON consiguió definirlos como pares ordenados de números reales. Los complejos constituían así una ampliación del cuerpo de los números reales —con la limitación anteriormente señalada de no poseer ordenación o, de poseerla, no arquimediana ni buena ordenación—. Su rigor demostrativo procedía, por ello, del rigor que poseyera el número real.

El número natural, último fundamento.

Una vez construido el número real a partir del racional, por el proceso arbitrario elegido —todos ellos dan lugar a cuerpos isomorfos entre sí, es decir, son procesos equivalentes— el rigor y la construcción entre los reales queda apoyado en el número racional. Que, a su vez, lo hace en la Aritmética del número natural, con paso intermedio del número entero. Todo el Análisis que exige fundamentalmente, en el esquema de WEIERTRASS y su escuela, el empleo de desigualdades y, por tanto, el variar sobre el cuerpo de los números reales, descansa en la Aritmética del número natural. LEOPOLDO KRONECKER, aunque rival en ciertos aspectos de WEIERTRASS y DEDEKIND, exigía *es necesario que todos los resultados de la más profunda investigación matemática sean expresables en las sencillas formas de las propiedades de los números naturales.*

De esta forma, en el Análisis el rigor parecía alcanzado como culminación de la aritmetización del análisis que durante todo el siglo se había ido realizando. La Matemática se apoyaba en el número natural. Y el mismo KRONECKER había indicado

Dios creó los números naturales; el resto es obra de los hombres.

El número natural, en última instancia, se apoyaba en un elemento que se había ido desplazando de la Matemática, la intuición, o bien en un elemento extramental y extramatemático como el querido en la frase de KRONECKER. Si en el primer caso, único de interés, la intuición también debía ser eliminada por los mismos motivos que habían justificado su expulsión de los demás campos de la Matemática. Pero si la eliminación se producía era porque podía ser sustituida por algún otro elemento, o justificada de alguna otra manera. La aritmetización del análisis conducía a un punto sin salida, sólo superado gracias al concurso de los logros realizados por las dos corrientes restantes. Y que, en esencia, está contenido en las palabras que DEDEKIND envía a LIPSCHITZ en carta de 27 de julio de 1897:

un infalible método para el análisis (de todas las suposiciones explícitas o tácitas)... es reemplazar todas las expresiones nuevas por términos arbitrarios carentes de sentido, si está bien construido el edificio no debe ser modificado, y afirmo que, por ejemplo, mi teoría de los números reales aguanta la prueba.

En estas palabras, DEDEKIND ha puesto de relieve que el método que ha empleado es, precisamente, el axiomático, aunque todavía de modo implícito. Corresponde a la segunda corriente del siglo XIX, a la geométrica, el acentuar la necesidad de tal axiomática, de considerarla como único proceso de la Matemática que posibilite el rigor total.

2. EL PROBLEMA GEOMETRICO

La segunda corriente que intenta hallar una rigurosa fundamentación de la Matemática surge ligada al problema geométrico. La

Geometría, que se había convertido en sinónimo de Matemática, realmente estaba abandonada durante siglos. Su campo inventivo parecía nulo en la dirección dada por la corriente griega. Los trabajos de DESCARTES, que parecieron hacerla resurgir, en el fondo la convirtieron en sierva del álgebra, mientras que el nacimiento del análisis la hicieron sierva del cálculo. Sin embargo, a principios del siglo XIX va a recobrar toda su antigua grandeza tras la obra de GASPAR MONGE. Dignificador de la geometría descriptiva, MONGE convierte a esta rama geométrica de mero auxiliar del Arte como en el Renacimiento, en ciencia auténtica.

ESTILOS SINTÉTICO Y ANALÍTICO.

Lo importante, en MONGE, más que su contribución directa, es su espíritu geométrico. La escuela que crea —PONCELET, DUPIN, BRIANCHON, OLINDE-RODRIGUES, MEUSNIER..., serán algunos de sus discpulos— va a tomar como lema la frase de CARNOT: "liberar a la geometría de los jeroglíficos del análisis". Sin embargo, con este espíritu lo que se consigue es una bifurcación —en el sentido que aquí interesa el tema geométrico— en cuanto al estilo propio de la expresión matemática. Por un lado se volverá al estilo euclídeo en el sentido de suprimir tales jeroglíficos de las proposiciones geométricas; pero, por otro, no se podrá dar marcha atrás en las conquistas realizadas, en la introducción tanto del análisis como del álgebra en tales proposiciones. De aquí la aparición de dos estilos sobre un mismo tema: El *estilo sintético* o *geométrico puro* y el *estilo analítico*. Ambos estarán presentes, incluso, en la obra del propio MONGE. Así, la Geometría descriptiva se presentará en estilo sintético; la Diferencial, en analítico. Y ello porque, en el entender de GASPAR MONGE, Geometría y Análisis no son más que dos caras de un mismo objeto, dos lenguajes distintos para describir un mismo hecho:

> *No hay ninguna construcción de Geometría descriptiva que no pueda ser traducida al Análisis, y cuando las cuestiones no comportan más de tres incógnitas, cada operación analítica puede ser considerada como la* redacción *de una construcción en Geometría* [37].

[37] Subrayado mío. *Traité de géometrie descriptive.* Ver J. DE LORENZO: "Figuras de centenario: Gaspar Monge". Rev. *Tercer Programa* 12, Madrid 1969, pp. 63-87.

El estilo sintético va a dar paso, además, a otra rama no por menos prevista menos inexistente hasta los primeros años del siglo XIX, la Geometría proyectiva. Junto a ello, el enfoque analítico o de coordenadas, que en realidad es de carácter algebraico, es impotente para tratar ciertos problemas como los de curvatura, tangente y normal, contacto, etc. Problemas que sólo el análisis es capaz de resolver y, por ello, el Cálculo absorbe a la Geometría en la llamada Geometría diferencial.

Naturalmente, los términos analítico y sintético o geométrico puro, que se mantienen hasta el momento presente para calificar ambos enfoques, han variado sensiblemente en sentido desde el significado querido por PLATÓN para el análisis y la síntesis en la demostración matemática. Si para PLATÓN y EUCLIDES análisis y síntesis eran dos procesos demostrativos, pronto el término análisis pasará a ser método de resolución de problemas mediante un proceso reductivo. A su vez, síntesis, como operación será sinónimo de adición. Ya en el siglo XVII adoptarán como significados: Método analítico sinónimo de método inventivo, creador. Método sintético o de composición significará, sencillamente, método de exposición. Pero, tras la creación cartesiana, método sintético pasa a significar tratamiento geométrico sin empleo de coordenadas. Cuando se utilicen, geometría analítica. Quizá se pudiera admitir un entronque del enfoque sintético con el estilo geométrico griego, provocado por el descubrimiento pitagórico de la irracionalidad de ciertos números. Si una línea puede construirse geométricamente, pero no es explicable aritméticamente en cuanto a que el número que le corresponde carece de sentido, lo natural parece desarrollar la geometría sin hacer intervenir de modo decisivo el número. Con lo cual el método tanto creador como expositor ha de ser el sintético en el sentido de independiente respecto a las coordenadas, que hacen intervenir la medida, la conmensurabilidad de un segmento respecto de otro tomado como unidad.

1. GEOMETRÍA PROYECTIVA.

Si la reducción de la Geometría euclídea al álgebra y luego al análisis había eliminado la independencia de esta disciplina, sin embargo, desde el aspecto de su fundamentación rigurosa, con independencia a una relación empírica o no con la naturaleza, se hallaba totalmente fundamentada según el posterior proceso de aritmetización que ya he señalado anteriormente.

Simultáneo a la creación de la Geometría analítica, otros dos matemáticos también franceses, DESARGUES y el ya mencionado PASCAL, daban nacimiento a otro tipo de geometría, en sus orígenes estrictamente sintética, la Geometría proyectiva. Intuitivamente, incluso, más próxima a la aceptación mental que la Geometría anterior. La obra, tanto la de DESARGUES como la de PASCAL, permanece ignorada hasta bien entrado el siglo XIX, cuando ya la Proyectiva estaba ampliamente desarrollada.

En la Geometría descriptiva creada por MONGE existen dos elementos fundamentales: la proyección de los elementos de una figura sobre los planos de referencia, y la sección de tal proyección por dichos planos. Tales elementos serán los considerados como esenciales tras la obra del discípulo de MONGE, PONCELET. Pero dichos elementos implican claramente que las propiedades métricas, las distancias, no van a jugar papel alguno esencial. Sólo se pueden tener en cuenta aquellas propiedades que se deducen de la posición de los distintos elementos y sus caracteres descriptivos. Con lo cual esta Geometría se muestra, en su origen, irreducible al enfoque analítico. De aquí que el estilo con el cual se desarrolla sea el sintético o el geométrico puro. Y en tal desarrollo los postulados que van a caracterizar la nueva rama son:

1. El principio de continuidad de PONCELET, reformado casi inmediatamente por CHASLES y STEINER con la introducción de los elementos imaginarios por los cuales el paralelismo desaparecía al admitirse que dos rectas paralelas tienen un punto común en el infinito y que todas las direcciones del plano dan lugar a la cónica del infinito o absoluto del plano —análogo para el espacio—;

2. El principio de dualidad, descubrimiento simultáneo de PONCELET y GERGONNE.

ESTILO DUAL.

Desde el punto de vista que aquí interesa, se debe señalar el punto 2, como esencial. El principio de dualidad dice que existe un completo paralelismo del espacio proyectivo considerado como conjunto de puntos y el espacio proyectivo considerado como conjunto de planos. Si se habla del plano proyectivo, entonces el paralelismo está entre dicho plano considerado como conjunto de puntos y considerado como conjunto de rectas. Así, en el primer caso, "dos puntos determinan una recta" equivale a "dos planos determinan una recta"; "tres puntos no situados en línea recta determinan un único plano" equivale a la afirmación "tres planos que no tienen una recta común determinan de manera única un punto". Si en el segundo, "puntos alineados sobre una recta" equivale a "rectas concurrentes en un punto", etc.

Pero esta dualidad se aplica a todas las proposiciones del espacio proyectivo. Con lo cual puede ser desarrollada la Geometría a dos columnas, como de hecho ha venido ocurriendo desde 1826 en que GERGONNE empleó el postulado de dualidad de forma totalmente sistemática. El estilo que esta forma expresiva da lugar es el que denomino *estilo dual.* Como ejemplo se pueden elegir los teoremas de DESARGUES y PASCAL con sus duales correspondientes. Así:

Teorema de Desargues.	*Teorema dual.*
Si dos triángulos están relacionados de forma que las rectas que unen los vértices homólogos pasan por un mismo punto, los lados homólogos se cortan en puntos de una misma recta.	Si dos triángulos están relacionados de forma que los lados homólogos se corten en puntos de una misma recta, las rectas que unen vértices homólogos pasan por un mismo punto.
Teorema de Pascal.	*Teorema de Brianchon.*
Dado un exágono inscrito en una cónica, los tres pares de lados opuestos se cortan en puntos de una misma recta. Es la *recta de Pascal.*	Dado un exalátero circunscrito a una cónica, los tres pares de vértices opuestos determinan rectas que pasan por un mismo punto. Es el *punto de Brianchon.*

La demostración que se haga para los teoremas de una columna es válida para los teoremas de la otra columna sin más que cambiar los términos correspondientes. Lo cual permite simplificar y unificar ampliamente esta disciplina considerada por algún geómetra como la más bella de entre todas las ramas de la Matemática.

La algebrización de la Geometría.

Un tercer punto va a sumarse a los dos anteriores que he señalado como postulados característicos de la Geometría proyectiva. Es un punto que va a dar paso a una contradicción esencial en el interior de esta disciplina. Si la métrica, en ella, se encuentra ausente en su origen y en su íntimo desarrollo, pronto se observa que ciertas propiedades de las cónicas y de otras curvas permanecen invariantes, pero en función de una medida, la razón doble de cuatro puntos. Aunque STAUDT consiguiera cubrir la laguna que la introducción de la métrica suponía para la proyectiva definiendo tal razón doble en función de elementos puramente proyectivos, la brecha abierta por este hecho supuso la introducción de los métodos algebraicos o analíticos en la Geometría proyectiva. Nuevas coordenadas fueron creadas con la obra, sobre todo, de PLUCKER. Y todo un aparato algebraico se crea para demostrar sus teoremas. Así, la nueva Geometría pasa del estilo sintético al estilo analítico, aunque en este nuevo estilo siga conservando el principio de dualidad. Y, lo que es más importante, al nuevo método algebraico que el formalismo pondrá de relieve. La Geometría proyectiva pasará a ser una geometría más, caracterizada por un cierto grupo, el de las homografías y correlaciones o grupo proyectivo, tras los trabajos de FÉLIX KLEIN. Quien llegaría a afirmar:

> *Al lado de la Geometría proyectiva hay varias otras que tienen igual derecho de existencia. De ningún modo se debe presentar el círculo (o la esfera) siempre como caso particular de cónicas, pues tienen círculo y esfera sobrado especial interés respecto de las restantes cónicas y cuádricas. Igualmente absurdo sería pretender edificar con método proyectivo la teoría de las transformaciones por radios vectores recíprocos* [38].

Con ello, la Geometría proyectiva, que había demostrado ser "anterior" a la euclídea en el sentido de que la Geometría métrica euclídea puede obtenerse a partir de la Proyectiva, como una particularización de la misma, igual que las geometrías no-euclídeas —por lo que CAYLEY había llegado a afirmar "La geometría proyectiva es toda la Geometría"— pierde su posición de privilegio y, con

[38] *Höhere Geometrie*, t. I, p. 323. Tomado de REY-PASTOR: *Fundamentos de la Geometría Proyectiva superior*, Madrid, 1916, p. 34-5.

ello, se cierra la segunda edad de oro geométrica de toda la historia del pensamiento matemático. Ya que, en breve tiempo, se convertirá en un capítulo del álgebra, el hoy titulado Geometría algebraica. Con palabras de MORRIS KLINE:

> *El bello razonamiento geométrico fue abandonado y la geometría fue sumergida en un mar de fórmulas. El espíritu de la geometría fue desvanecido*[39].

Ahora bien, ese "desvanecimiento" no ha sido total. Si bien el álgebra ha dominado el enfoque creador, la geometría continúa siendo elemento básico para el desarrollo intuitivo de dicha creación. Precisamente se ha mezclado con el álgebra como elemento constitutivo del lenguaje básico matemático. Y tanto en Algebra como en Análisis funcional los términos geométricos constituyen el soporte de la teoría matemática, aunque desprovistos, por supuesto, del correlato semántico que poseían en la geometría clásica euclídea.

2. LAS GEOMETRÍAS NO-EUCLÍDEAS Y LA REALIDAD.

En la pérdida de esta hegemonía geométrica otro factor, también geométrico, va a mostrarse decisivo. El estilo geométrico impuesto por las directrices platónicas y plasmado en EUCLIDES no va a ser excesivamente grato a los matemáticos del siglo XVIII. No se ve la necesidad de "demostrar todo". La "evidencia" de las proposiciones geométricas suple su demostración. Aún se está convencido de que la Geometría euclídea métrica no es más que el reflejo de la realidad. Además, ya las primeras ideas lanzadas por DESARGUES y PASCAL respecto a la inexistencia del paralelismo en el sentido de que dos rectas siempre se cortan en un punto, a distancia finita o infinita, volvían a retomar las continuas críticas al postulado V de EUCLIDES. En este sentido puede interpretarse la obra del jesuíta GEROLAMO SACCHERI con su obra que lleva el significativo título *Euclides ab naevo vindicatus*. SACCHERI pretende demostrar todo lo demostrable, y aún más. Pero abre paso a un método de gran fecundidad. Para demostrar que el postulado V es necesario e indemostrable respecto a los demás realiza toda una gigantesca labor

39 "Geometry". *Scientific American*, Set. 1964, p. 65.

—sólo empañada por su fin vindicador— adoptando las hipótesis del ángulo agudo y del ángulo obtuso para reemplazar al citado postulado, hipótesis del ángulo recto. En su proceso SACCHERI sigue el estilo geométrico puro, el clásico. Sin hallar contradicción lógica alguna. Pero dado su objetivo, tal contradicción ha de aparecer, y aparece. Precisamente apoyándose en lo que no debería haber admitido, la intuición. SACCHERI hace una llamada a la "evidencia" de la contradicción.

La obra de SACCHERI tiene resonancia. El postulado V y sus equivalentes se convierten en el "escándalo de la geometría" como afirmará D'ALEMBERT. Y ello porque la realidad sensible no le puede dar justificación alguna. Intuitiva, sensible, visualmente, el paralelismo no existe. Si se prolongaran bastante, dos rectas siempre llegarán a cortarse. Reducir el postulado V vuelve a ser objetivo preciado de todos los matemáticos. Así, WALLIS, LAMBERT, PLAYFAIR, LEGENDRE, LAGRANGE, CARNOT, FOURIER, entre otros concentran sus esfuerzos en esta labor. Con ellos, otros matemáticos, sobre todo jóvenes que desean el salto inmediato a la celebridad. Es el mismo proceso que en la irresolubilidad algebraica de la quíntica, intentada, se ha visto, por ABEL, GALOIS, JACOBI, cuando entornan los diecisiete años. Así, BOLYAI, LOBATCHESKI, emprenden la tarea geométrica. La convicción de su indemostrabilidad se refleja, sin embargo, en el consejo que WOLFANG BOLYAI dirige a su hijo:

> *Te ruego que no intentes tú también luchar con la teoría de las líneas paralelas. Perderías el tiempo y sus teoremas quedarían sin demostrar. Estas impenetrables tinieblas pueden derribar a miles de torres como* NEWTON. *Nunca se aclararán en la tierra, y el desdichado género humano nunca poseerá en el mundo nada completo, ni aun en la geometría. Esto constituye una grande y eterna herida en mi alma* [40].

A pesar de lo cual JANOS BOLYAI y NICOLÁS LOBATCHESKI consiguen avanzar en la línea iniciada por SACCHERI. Fundamentalmente LOBATCHESKI —el más persistente en su empeño— logra crear un cuerpo de doctrina no contradictorio, lo que después se denominaría Geometría hiperbólica. Sin entrar en el desarrollo e historia de este hecho —ampliamente divulgados— interesa señalar lo siguien-

---

[40] Tomado de SANTALÓ: *Las Geometrías no-euclidianas,* Ed. Eudeba, Buenos Aires, 1961, p. 12.

te: la Geometría proyectiva no implicaba contradicción o rechazo de la Geometría euclídea; incluso la contiene como disciplina particular. Por otro lado, su origen se sitúa íntimamente ligado con la realidad. Los artistas del Renacimiento utilizaron las transformaciones básicas de la Proyectiva para reflejar con mayor verismo en el plano las escenas situadas en el espacio; MONGE llega a dar paso a esta disciplina a partir de sus trabajos en Geometría descriptiva para realizar diseños de fortificaciones militares. Igualmente, puede sostenerse como muy posible que tanto DESARGUES como PASCAL llegaron a formular sus teoremas a base de proyecciones *reales* de cuerpos tomando como focos velas o lámparas. La Geometría proyectiva seguía, así, en íntimo contacto con la realidad. De modo análogo, tanto la Geometría que empleaba coordenadas, la cartesiana, como la que utilizaba el cálculo no consistían más que en traducciones de la métrica euclídea sintética a lenguaje o estilo analítico. Si la primera se apoyaba en la realidad también estas dos aunque con leve rodeo.

La aparición de las geometrías no-euclídeas, sin embargo, provoca una reacción inmediata. Son geometrías "imaginarias", irreales. Sistemas lógicos que rompen con la intuición o "evidencia" querida para todos los primeros elementos geométricos. En un primer momento hay que discutir su adecuación o no a la realidad. Como construibles, junto a la euclídea, cabe la pregunta por la "verdadera geometría". Así, GAUSS y LOBATCHEVSKI intentan el *experimentum crucis.* GAUSS, todavía en 1817, está convencido de ser, la geometría, una ciencia de la naturaleza más. En carta a OLBERS escribe:

> *Tal vez en esta vida tengamos otros puntos de vista sobre la esencia del espacio, que ahora nos son inasequibles. Mientras tanto, la geometría no debería compararse con la aritmética, que existe puramente "a priori", sino, más bien, ser colocada en el mismo plano que la mecánica* [41].

Pero el *experimentum crucis* no se encuentra. El espacio no resulta moldeable por una u otra geometría. Permanece mudo ante la pregunta por la verdadera naturaleza suya geométrica, por la verdadera geometría. Carece de sentido, como años después sostendrá POINCARÉ, el intento de tal experimento. En este caso, la "verdad" de la geometría euclídea y de la proyectiva que logra englobarla, no

[41] *Id.*, p. 58.

puede hallarse en la adecuación o no a la realidad. Su fundamentación, por ello, aparece dudosa en los propios elementos geométricos, obtenidos como "abstracción" de la misma. Por ello el descubrimiento formal de la estructura algebraica subyacente a las distintas geometrías se convertirá en uno de los pasos decisivos para lograr tal fundamentación. Aunque previo a este hecho se hicieran intentos para lograr tal fundamentación de modo intrínseco, provocando la vuelta al estilo geométrico.

3. Estilo axiomático.

La Geometría se ha despojado de su configuración figural, de sus enlaces con la realidad sensible. No puede fundamentarse, como edificio racional, en ella. Sin embargo, antinomia de toda la Matemática, se enraiza en la misma. Cabe la pregunta, entonces, por el ser propio de tal construcción, de su último fundamento. La respuesta la dará el propio modelo euclídeo. La Geometría no será más que un inmenso edificio hipotético-deductivo, construible axiomáticamente. Y a esta construcción se dedican los matemáticos de finales del siglo XIX, con el expreso intento de mejorar lo establecido en los *Elementos*, que se ven insuficientes, tanto en su contenido como en su propia formulación.

El empirismo de Pasch.

Uno de los primeros en dar una axiomática que se pretende satisfactoria es Moritz Pasch, quien en 1882 publica sus *Lecciones de Geometría moderna.* Sin embargo, todavía Pasch se aferra —para justificar la antinomia antes apuntada— a un empirismo según el cual la Matemática es una especie de ciencia de la naturaleza, apoyándose sus conceptos directamente sobre lo perceptible y teniendo sus proposiciones que ser demostrables empíricamente en el sentido de comprobables. Las relaciones entre los conceptos

> *deben estar de acuerdo con los hechos experimentales, aunque la mayoría no se tome directamente de la experiencia, sino que son* demostrados, *y los mismos conocimientos precisos para la demostración —además de las definiciones de los conceptos derivados— constituyen una parte de tales relaciones.*

Con estas hipótesis PASCH define los conceptos fundamentales de una manera empírica. Así, los puntos son cuerpos, límites de observación. El espacio manejado, finito, para poder tener así plena seguridad de interpretación intuitiva;

> *Los conceptos geométricos fundamentales y los axiomas se adquieren sobre objetos, de los cuales se está, relativamente, poco alejado; fuera de tal dominio, no es, pues, legítima su aplicación, si ulteriores razones no lo consienten*[42].

Conceptos fundamentales que serán, para PASCH, los que se presentan a todos los hombres como tales. Hay una muy fuerte carga de psicologismo en la teoría de PASCH.

> *Los conceptos fundamentales no se definen porque no hay definición que pueda sustituir a la observación de objetos naturales adecuados, la cual se apoya exclusivamente en la comprensión de conceptos simples que no se pueden reducir a otros.*

PASCH ve el peligro que intentaba conjurar dentro de su propio sistema. Si la intuición del espacio es la que conduce a la Geometría, el peligro de que esa misma intuición lleve al error o a la equivocación es total. PASCH cree superar la dificultad imponiendo restricciones a los axiomas:

> *Los axiomas deben contener todo el material empírico necesario para construir la Matemática, de tal modo que, una vez sentados, no sea preciso recurrir más al testimonio de los sentidos. Para obrar con mayor seguridad, deben establecerse de antemano las restricciones a que esté supeditada la aplicación de cada axioma*[43].

El hombre, todos los hombres, tienen por igual la evidencia intuitiva de unos conceptos y de sus relaciones. El matemático establece aquellos que va a utilizar en la construcción de una ciencia determinada. Los pone en primer plano. Indica el contenido, con toda claridad, de esas proposiciones. Y a partir de aquí hace una construcción meramente formal, olvidando cualquier otro sentido, cualquier

[42] *Lecciones de Geometría moderna*, Ed. Junta Ampliación Estudios, Madrid, 1913, p. 24. Trad. REY PASTOR-ALVAREZ UDE.
[43] *Id.*, p. 23.

nueva solicitación de la experiencia, de la intuición. Llega al extremo de sugerir la supresión de las figuras, no sólo de la escrita, sino de las imaginadas, de la redacción geométrica, salvo en los axiomas, exceptuados por el carácter empírico de los mismos.

> *Pues, en general, la intervención de la figura no es necesaria; lo que realmente hace es facilitar la comprensión de las relaciones enunciadas en el teorema y de las construcciones acaso necesarias para la demostración, y, además, es un fecundo medio para descubrir tales relaciones y construcciones. Pero si no se teme el sacrificio de tiempo y trabajo, se puede prescindir de las figuras en la demostración de los teoremas; más aún, el teorema sólo está realmente demostrado cuando la demostración es completamente independiente de la figura.*
>
> *Los axiomas no se pueden concebir sin la figura correspondiente; son la expresión de lo que se ha observado en ciertas figuras muy sencillas. Los teoremas no se fundan en la observación, sino que son demostrados; toda conclusión que aparece en el curso de la demostración debe confirmarse en la figura, pero no es con ella como se justifica, sino con una proposición cierta (o definición) que le precede*[44].

PASCH establece como evidentes los conceptos de punto, recta, plano y la relación *ser superponible a.* Impone como condiciones fundamentales al sistema científico que debe ser construido las cuatro siguientes:

1. Los términos primeros que permiten la definición de los demás han de ser enunciados explícitamente.
2. Las primeras proposiciones o axiomas, de los que se deducen las restantes proposiciones o teoremas del sistema, han de ser enunciadas explícitamente, en su totalidad.
3. Las relaciones entre los primeros términos han de ser relaciones lógicas, con olvido de su contenido eidético.
4. En las demostraciones sólo deben intervenir las relaciones lógicas con supresión radical de la llamadas a la intuición. Para ello, si es preciso, deben suprimirse hasta las figuras por el peligro que encierran de dar un sentido intuitivo distinto a un contenido determinado.

---

[44] *Id.*, p. 62-3.

PASCH inicia, con ello, la vuelta a la axiomatización de la Geometría, aunque permanezcan, en su concepción, restos de empirismo psicologista. Restos que afectan, más que a la construcción en sí del edificio matemático, a su propia posición pensadora respecto a la naturaleza o "esencia" de la Matemática.

El éxito de la obra de PASCH, el ambiente que lo entorna, hacen que a partir de esta fecha, entornos de 1880, la axiomática se caracterice, esencialmente, por los trazos siguientes:

a) Todos los conceptos de base y todas las relaciones de base de la ciencia a axiomatizar son enumerados completamente. Cada concepto posterior ha de ser referido a los anteriores mediante una definición. Las definiciones reales no existen.

b) Todos los axiomas o postulados —desaparece la distinción clásica, apoyada en la etimología entre ambos conceptos, ganados por el sentido de postulado— son enumerados completamente. Los demás enunciados o proposiciones son obtenidos mediante una deducción estrictamente lógica.

En esencia, ambos trazos son los requeridos por los griegos para la exposición global de la Matemática. El carácter lógico, deductivo, se acentúa, sin embargo, Es, quizá, el aporte y originalidad nuevos. En ambos trazos el acento se pone, no ya en la mera enumeración de los conceptos y proposiciones primitivos, sino en que dicha enumeración sea completa, sin posterior introducción de axioma o concepto implícito alguno. Con lo cual se suprimen las llamadas a la intuición propias del carácter figural de la Matemática griega. Además, al rechazar la distinción entre postulado y axioma, se rechaza la "verdad" de éstos, entendiendo por verdad la adecuación o no a la realidad circundante, por lo cual los postulados han de admitirse por su potencia deductiva y no por su carga de "verdad" adecuadora. El postulado o axioma se convierte en mera hipótesis de la que partir, en su sentido más auténticamente platónico de no alcanzar, el matemático, la verdad, sino la mera hipótesis.

Hilbert y la Geometría.

El estilo que implican estos principios es, claramente, el estilo geométrico clásico. Es una vuelta radical a este estilo la realizada por los geómetras de finales del siglo XIX. La obra que culmina todo este esfuerzo geométrico, sistematizador, y que da paso a un nuevo enfoque de la expresión matemática, a un nuevo "estilo" del pensar, trabajar y expresarse el matemático, es la de DAVID HILBERT, *Fundamentos de la Geometría*, publicada en 1899 bajo forma de memoria para la inauguración del monumento a Gauss-Webwer, en Göttingen.

HILBERT pretende desprenderse de todos los recursos de las imágenes sensibles para no retener más que las únicas relaciones lógicas entre los entes de la Geometría. Es la misma posición a la que llegaba PASCH, pero sin la admisión de la "realidad" de los elementos fundamentales.

Para DAVID HILBERT, como para toda la corriente posterior lógica, los axiomas no se diferencian de las demás proposiciones o enunciados de la ciencia por tener o no unos determinados caracteres intrínsecos o, como en PASCH, por ser la esquematización de la realidad. Los axiomas no son tales porque se nos impongan necesariamente, por ser "evidentes". Ningún axioma puede llevar la etiqueta de verdadero en el sentido clásico de la palabra, porque la Geometría nada tiene que ver con la "realidad" empírica, material. La diferencia con los demás enunciados estriba en que siendo proposiciones cualesquiera, la elección hecha por el matemático les confiere el carácter de no demostrados. Pero no en sí, sino en el conjunto de las proposiciones de este sistema. Pueden ser proposiciones de este sistema. Pueden ser proposiciones demostrables eligiendo otras proposiciones del mismo como axiomas.

Pero hay un hecho aún más importante en el enfoque de HILBERT. Las proposiciones primeras que se adoptan no dicen nada acerca de la naturaleza ontológica de los objetos con los cuales va a operar el matemático. Tal naturaleza importa poco. Los objetos pueden imaginarse como le apetezcan a cada uno. El propio HILBERT, en carta a FREGE, exponía:

Si yo imagino que mis puntos son un sistema arbitrario de cosas, por ejemplo, el sistema "amor, ley, deshonillador..." y considero la totalidad de mis axiomas como relaciones entre estas cosas, entonces mis teoremas, por ejemplo, el de Pitágoras, *también será válido para estas cosas. Con otras palabras: Cada teorema puede aplicarse a una infinidad de sistemas de elementos fundamentales* [45].

En otras ocasiones, HILBERT había propuesto, continuando en su línea irónica, como sistema fundamental el de "mesas, sillas, jarros". Naturalmente, HILBERT no pretendía crear una geometría con tales elementos —como tampoco DEDEKIND pretendía construir un análisis convencional al sustituir el número real por objetos cualesquiera, carentes de sentido—, sino indicar la arbitrariedad electiva de los mismos, siempre que estuvieran caracterizados o definidos por axiomas convenientemente elegidos, además de indicar que tales conceptos no corresponden a realidad alguna concreta, predeterminada, como en el caso de la Geometría clásica euclídea o, incluso, en la de PASCH.

La Geometría, de esta forma, desembocaba en una construcción estrictamente formal, independiente de cualquier realidad que no fuera la del espíritu humano que la construía. Naturalmente ello implica la aparición de nuevos problemas. Así, la fundamentación de tal sistema geométrico, al no venir dada por la adecuación a realidad alguna, debe encontrarse en el interior del propio sistema. Surge, con ello, la problemática, ausente en la construcción clásica, de una de las condiciones fundamentales a que ha de someterse una construcción formal: la no-contradicción del mismo. No-contradicción que ha de ser demostrada para los sistemas elegidos en el sentido de que no pueda obtenerse de ellos una proposición y su contraria, ya que en este caso, y por las leyes de la Lógica, el sistema permite obtener absolutamente todas las proposiciones que uno desee. Deja, con ello, de tener interés alguno porque el sistema deja de ser tal. Además, si la deducción de las proposiciones a partir de los axiomas ha de regirse únicamente por la lógica y no por el contenido eidético de las mismas, el estudio de las reglas de la lógica ha de realizarse y exponerse con toda claridad, por no introducir, en el proceso de deducción, proposiciones que no se ajusten a tal marcha lógica deductiva. El estudio de tal proceso demostrativo, con un renacer de la discusión en torno a si es, el proceso matemá-

[45] DE MESCHKOWSKI: *Introducción a la Matemática moderna.* Ed Selecciones Científicas, Madrid, 1967, p. 9.

tico, independiente del lógico o mera consecuencia del mismo, provocará el nacimiento de la llamada Lógica matemática y de distintas tendencias en su interior.

Junto a problemas como los anteriores, el desarrollo y presentación de un sistema geométrico presenta otro haz de nuevas cuestiones. Así, la elección de los axiomas, la manera de realizarla, de forma tal que de los mismos puedan ser obtenidas *todas* las proposiciones geométricas. Es el problema de la completitud. Igualmente es deseable, por razones de carácter estético, que sean *independientes* entre sí. Razón estética, pero de alcance insospechado, ya que la demostración de la independencia de un axioma respecto de los demás, posibilita la creación de nuevos sistemas geométricos cuya potencia tanto estrictamente matemática como para posibles aplicaciones a otras disciplinas se ha mostrado realmente fecunda. Cabe citar, en este sentido, que el proceso demostrativo de esa independencia fue marcado por las geometrías no-euclídeas, que se pueden interpretar, precisamente, como demostraciones de la independencia del postulado V respecto a los restantes postulados del sistema, aunque LOBATCHESKI no tuviera conciencia plena de que su obra pudiera ser orientada en este sentido. El propio HILBERT, para demostrar la independencia de los axiomas de la Geometría clásica, construirá geometrías de muy diversos tipos, como las no-arguesianas, las no-arquimedianas, las no-pascalianas...

En cuanto a la no-contradicción de la Geometría, HILBERT recurre a un proceso indirecto, ligándose a la corriente de aritmetización del análisis. La no-contradicción de la Geometría, al no poder apoyarse en la "realidad", puede ser avalada por la no-contradicción del cuerpo de los números reales. Y éstos, por el proceso de aritmetización, descansan en el número natural. La corriente geométrica desemboca, de esta forma, en el mismo punto que la del análisis, en afirmar que la base o apoyatura de la Matemática debe ser el número natural. Sin embargo, en el estilo, desemboca en una vuelta al geométrico, aunque pretendiendo alcanzar un grado de rigor que éste no poseía, perdiendo, a la vez, la pretensión de ser una ciencia verdadera, convertida la Geometría en mera construcción hipotético-deductiva.

3. CORRIENTE ABSTRACTIVA

1. Permanencia de las leyes formales.

El problema notacional británico.

Consecuencia de las críticas de Berkeley, de la vuelta al estilo clásico sin empleo de aparato algorítmico excesivo por parte de algunos matemáticos y, final, aunque fundamentalmente, de la ausencia de notación adecuada, el aporte británico a la Matemática del siglo xviii no fue muy brillante. Sin embargo, a principios del siglo xix un grupo de jóvenes matemáticos se pone en contacto con la Matemática continental, y se convierten en sus portavoces en las Islas Británicas. Su apasionamiento es tal, que el dicho les pone como lema "establecer los principios del puro d'ismo en oposición a la era del punto en la universidad". El juego de palabras contrapone el término "d'ism" como doctrina teológica y, a la vez, notacional de Leibniz, con el "dot-age" o "era del punto", que puede significar "dotage", "chochez", como sinónimo de la notación newtoniana.

En 1816 traducen un texto de carácter didáctico elaborado por Silvestre Francisco Lacroix que, si no gran matemático, poseía excepcionales cualidades de expositor. Lacroix había publicado una extensa obra en dos volúmenes que en 1806 resume en el *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral,* que es el traducido al inglés, adaptado al castellano por Chaix, etc. En él se exponen, en sus 606 páginas de edición francesa, con notación de Leibniz y sus sucesores, todo lo obtenido por la Matemática en sus relaciones con el Análisis. Su traducción va a constituir un momento decisivo para la Matemática británica y, como consecuencia, para toda la Matemática.

En 1820 el grupo de jóvenes traductores le agregan dos volúmenes de ejercicios. Grupo de jóvenes entre los que destacan J. F. W. Herschel —hijo del célebre astrónomo, y astrónomo él mismo—, Charles Babbage —conocido principalmente por sus inventos de máquinas analíticas— y, sobre todo, George Peacock. Para promover un mayor acercamiento con la Matemática continental crean la Analytical Society of Cambridge.

Portavoces del d'ismo leibniziano, van a concentrar su atención, con especial preferencia, en el simbolismo formal, operatorio. Y no sólo ellos, la mayoría de los matemáticos británicos que siguen sus pasos renovadores se concentrarán en el mismo problema. Ha sorprendido el hecho de que la elección adecuada de un simbolismo posibilite el desarrollo de la Matemática, mientras que en caso contrario se provoca una cierta parálisis. Como reacción, la búsqueda de simbolismos adecuados, el manejo formal de tales simbolismos y su ampliación a campos de objetos cualesquiera van a constituir las notas características que se derivan de la misma. Notas que, a su vez, van a provocar un número no despreciable de consecuencias. Entre ellas, voy a destacar las siguientes.

De "operación" a "ley de composición".

Ya he mencionado el hecho de que el irlandés W. R. HAMILTON fuera el primero en aritmetizar el concepto de número complejo, al considerarlo como par ordenado de números reales. HAMILTON publicó por vez primera su resultado en 1837, desarrollándolo, ya perfecto, en 1853.

Esta aritmetización implica, naturalmente, que entre los pares de números reales que constituyen los complejos, existen algunos que pueden identificarse con los propios números reales. De hecho la identificación se realiza mediante una aplicación $a \rightarrow (a,0)$ que se demuestra provoca un isomorfismo entre el conjunto de los números reales como cuerpo R y el subconjunto de los complejos cuya segunda componente es nula. Pero ello entraña también que las operaciones aritméticas a realizar entre los complejos —como la adición y el producto— sean consideradas como consistentes con las mismas operaciones a realizar entre los reales. El concepto de operación sufre, así, una ampliación, aunque de momento parezca tímida.

Si la adición puede definirse entre los complejos de una manera formal, pero con apariencias de normalidad —tal definición no es otra que, si $z_1 = (x_1, x_2)$, $z_2 = (y_1, y_2)$, entonces $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$—, en el sentido de que está motivada por analogía con la suma de números reales —a los cuales se aplica de modo inmediato en la forma $(x,0) + (y,0) = (x + y,0)$—, no ocurre lo mismo con el producto. Aquí su carácter de artificiosidad es total, ya que este producto resulta ser

$$z_1 z_2 = (x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

cuando lo natural parecería ser la definición dada por

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2)\ (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

como en la suma. De hecho, con esta última definición, el producto verifica las propiedades que tradicionalmente se le habían venido atribuyendo: uniformidad, asociatividad, conmutatividad. Es, incluso, distributivo respecto a la suma anteriormente definida. Con lo cual, los complejos constituirían, con estas dos operaciones, un semianillo abeliano. Sin embargo, esta multiplicación carece de elemento neutro, ya que

$$(1,0)\ (x,y) = (x,0) \neq (x,y)$$

y provoca, además, la existencia de divisores de cero —ya que, $(x,0) \neq (0,0) \neq (0,y)$ y, sin embargo, $(x,0)\ (0,y) = (0,0)$—. No satisface, por lo tanto, *todas* las condiciones formales que de siempre se habían atribuido al producto de números.

Se plantea, en este punto, una clara disyuntiva. O aceptar como definición de "producto" entre dos objetos la nueva operación, sabiendo ya de antemano que no cumple las tradicionales propiedades del producto, por lo que el mismo concepto de operación sufre una ampliación decisiva, o rechazarla, buscando artificios para adecuarla a la idea clásica de producto. HAMILTON optó, en 1837, por la segunda alternativa, ya que su finalidad se encontraba, entonces, en dar un fundamento a los números complejos, aceptados por todos los matemáticos, manejados hasta con interpretación gráfica desde tiempos atrás, pero sin ninguna justificación rigurosa. Intentaba, meramente, justificar, aritmetizar de modo riguroso algo ya existente, y sólo podía realizar tal justificación con la definición artificial dada. Años después, W. K. CLIFFORD, también inglés, realizaría el estudio completo de los tres casos que se presentan en el producto formal que posibilite la definición anterior.

Aceptando la segunda alternativa, el propio HAMILTON crea en 1853 un nuevo ente matemático, el cuaternión, donde el producto ya no cumple todas las propiedades formales. El conjunto de los cuaterniones es el primer ejemplo y el único de cuerpo no conmutativo que puede construirse a partir del cuerpo de los números reales. Poco después, A. CAYLEY, igualmente británico, crea el cálculo matricial, en 1855, auténtica Algebra Universal como fue denominada por los ingleses, y que tampoco verifica la conmutatividad del producto, ampliado, ya, de modo definitivo, a operar con entes no estrictamente numéricos.

En este sentido corresponde a PEACOCK el haber sido el primero en marcar la ruta a seguir. En 1830, en su *Tratado de Algebra,* había mostrado cómo los signos $x, y, z,$ por ejemplo, en fórmulas como $x(y + z) = xy + xz$, , $x + y = y + x$, , $xy = yx$ no tienen por qué designar, forzosamente, números. Ello supone admitir que las operaciones clásicas de la suma y del producto se amplían. PEACOCK, por ello, impone, evitando la absoluta arbitrariedad, el "principio de permanencia de las formas equivalentes", por el que tales ampliaciones a conjuntos cualesquiera deben realizarse de tal forma que verifiquen las propiedades de dichas operaciones aplicadas al campo a ampliar.

Se pueden resumir los hechos anteriores indicando que la escuela británica, en los alrededores de 1830 a 1850, y movida por la consideración estrictamente formal de las operaciones, amplía tanto el concepto de tales operaciones como el de los elementos entre los cuales pueden realizarse. La escuela inglesa ha dado paso, mediante un proceso abstractivo respecto al significado de la notación, a lo que ahora se ha denominado "ley de composición" entre los elementos de un conjunto cualquiera. Con ello ha dado paso a que se considere como fundamental, no ya los elementos de esos conjuntos cualesquiera, sino la estructuración de los mismos mediante las leyes de composición.

La obra de todo este período encontrará resumen en el libro de H. HENKEL, alemán, *Teoría de los sistemas de números complejos,* de 1867, donde se precisa el principio dado por PEACOCK, que recibe el título de "principio fundamental de la permanencia de las leyes formales".

2. AMPLIACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Por otro lado, el concepto de función también había venido sufriendo ampliaciones. De tal forma que el término "función" no va a designar únicamente la correspondencia entre números, caracterizada mediante expresiones analíticas conocidas. Se pasa a hablar de "ley de correspondencia" entre dos conjuntos, y esta vez, no sólo numéricos. Dificultad básica de esta manera de definir el concepto de función es el término "ley", de muy difícil concreción. A pesar de lo cual permite ser aplicada al establecimiento de múltiples correspondencias entre conjuntos cualesquiera. Así, puede hablarse de función en casos como los siguientes:

a) Dado el conjunto de ciudadanos de un país A, y B el conjunto de las provincias del mismo, la correspondencia que asigna a cada ciudadano la provincia en la que ha nacido, es una función de A sobre B.

b) Sea A el intervalo [0,1] de R y B el intervalo, también de R, [0,9]. La correspondencia $x \to x^3$, con $x \in A$, $x^3 \in B$, constituye una función de A sobre B que puede expresarse de manera analítica como $y = x^3 = f(x)$, con $x \in A$.

Este tipo de correspondencia contiene lo que se venía considerando como función, según las citas que he dado de EULER, de SCHLÖMICH... Sin embargo, correspondencias como las siguientes no encajan en el marco de tales definiciones:

c) Sea P el conjunto de todos los polígonos p simples, cerrados, pertenecientes al plano, R^+ el conjunto de los números reales no negativos. El área encerrada por un polígono p no es más que una correspondencia entre P y R^+. El área es una función de P sobre R^+.

d) Sea el conjunto A de polinomios en una indeterminada $P(x)$ y B el conjunto de polinomios en la misma indeterminada tales que si $p(x) \in B$, $p(x)$ es la derivada de $P(x)$. La correspondencia en la cual asociamos a cada $P(x)$ su derivada correspondiente define una función de A sobre B.

En ambos ejemplos se establecen correspondencias cuyos elementos pueden ser, como en el caso *d*), funciones. Ello implica, evidentemente, una ampliación absoluta, total, en el concepto de función querido por los matemáticos del siglo XIX.

Pero este tipo de correspondencias se establece a partir de un conjunto sobre otro; igualmente en la ampliación del concepto de operación se presenta como fundamental la indicación del conjunto en cuyo interior se realiza dicha operación. Así, hablar de la diferencia o división entre dos elementos cualesquiera de un conjunto puede carecer de sentido. De hecho, x-y, si tanto x como y designan números naturales, puede ser irrealizable. Análogo con $x:y$ si representan ya naturales, ya enteros.

Se hace evidente la necesidad de estudiar tales campos de variación funcional o de ley compositiva de un modo directo, y en sí mismo. Estudio que, ligado a la corriente analítica, en la cual las funciones presentaban conjuntos a veces finitos, a veces no, de discontinuidades en el campo de definición, por lo que tales campos o conjuntos tenían que ser estudiados en su estructura íntima, iba a dar como resultado la creación, en un proceso de síntesis dialéctico permanente en la Matemática, de una de las ramas más bellas de toda la Matemática existente, la Teoría de conjuntos. Obra de síntesis creadora realizada principalmente por GEORGE CANTOR y que se ha convertido en el fundamento y base de toda la Matemática actual, aunque ella misma no posea un fundamento radicalmente seguro.

Si los conjuntos a los cuales se pueden aplicar leyes de composición arbitrarias, a condición de que verifiquen ciertas leyes formales —impuestas de manera axiomática— pueden ser conjuntos de elementos cualesquiera, es evidente que éstos pueden elegirse o construirse arbitrariamente. De hecho, las construcciones citadas de los matemáticos ingleses lo prueban con claridad. Nacen, así, nuevos entes matemáticos como los vectores —que por su fecundidad han llegado a absorber la presentación de la propia Geometría, convertida en Geometría vectorial, entre otras—, cuaterniones, sistemas hipercomplejos generales, matrices, leyes no asociativas..., por obra de HAMILTON, SYLVESTER, CAYLEY...

3. ALGEBRIZACIÓN DE LA LÓGICA.

Cabía la posibilidad de ampliar las "leyes de composición" a sistemas ya construidos, aparentemente no matemáticos, pero con relación estrecha con ellos. Así, a la Lógica, necesitada de corrección y perfeccionamiento en su sentido formal, como pondrían de manifiesto las distintas corrientes de la Matemática durante todo el siglo. Corresponde a otro británico, GEORGE BOOLE dar la respuesta afirmativa a esta posibilidad, realizando una auténtica algebrización de la Lógica en sus *Leyes del Pensamiento,* publicado en 1854, aunque seis años antes, en su obra *Análisis matemático de la Lógica,* apuntara esta algebrización. Para ello, BOOLE partía del hecho siguiente en la Introducción de esta última obra:

Los que están familiarizados con el presente estado de la teoría del Álgebra simbólica, saben que la validez de los procesos del análisis no depende de la interpretación de los símbolos empleados, sino solamente de las leyes de sus combinaciones. Todo sistema de interpretación que no afecte a la verdad de las relaciones supuestas es igualmente admisible y, por lo tanto, el mismo procedimiento puede, según un esquema de interpretación, representar la solución de un problema sobre propiedades de los números, según otro de un problema de geometría, y según un tercero de un problema de dinámica o de óptica[46].

Palabras enteramente semejantes a las dichas por PEACOCK en su *Tratado de álgebra,* aunque parece ser que BOOLE no llegó a leerlo. Con esta concepción de la operación, es evidente que BOOLE afirmara que la Matemática trata de

las operaciones consideradas en sí mismas independientemente de las diversas materias a las que pueden ser aplicadas.

Entre estas materias a las que va a plicar el mismo procedimiento matemático, se encuentra la Lógica, para cuyo cálculo

reclamo un lugar entre las formas conocidas del análisis matemático.

El propósito que asigna a las *Leyes del Pensamiento* lo aclara con los siguientes términos

El objeto del tratado siguiente es investigar las leyes fundamentales de aquellas operaciones del espíritu por las cuales se realiza el razonamiento; dar expresión de las mismas en el lenguaje simbólico de un Cálculo, y sobre este fundamento establecer la ciencia de la Lógica y construir su método; hacer de ese mismo método la base de un método general para la aplicación de la doctrina matemática de las Probabilidades; y, finalmente, recoger de los diversos elementos válidos obtenidos en el curso de estas pesquisas algunas probables informaciones acerca de la naturaleza y constitución del espíritu humano.

---

[46] Existe versión castellana de esta obra por A. ASTI VERA en *op. cit.* en nota 8. El *Análisis* comprende pp. 55-166 con notas y comentarios. También se reproduce el Cap. I de *Leyes del Pensamiento,* pp. 168-193.

Para lograr esos objetivos hay que superar la formulación "antigua y escolástica" que de la Lógica ha imperado desde ARISTÓTELES. Hay que partir de un estudio profundo del lenguaje, ya que es mediante él, mediante las palabras como se comunican los hombres. GEORGE BOOLE pone el acento sobre este hecho, con absoluta claridad,

> *La teoría de la Lógica y la teoría del lenguaje resultan así íntimamente relacionadas* [47].

Este enfoque se ha mantenido hasta el momento presente, interrelacionando Lógica, teoría del lenguaje, Matemática. Y lo primero que encuentra BOOLE, es que el lenguaje tiene dos fines. Por una parte, el lenguaje común es instrumento o medio para la expresión del pensamiento. Pero este fin, si fuera exclusivo, no serviría de mucho al hombre. Este necesita pensar, no sólo expresarse. Y, para pensar, el hombre requiere de un lenguaje. Esta es la función, el fin más noble del mismo. El único que considerará BOOLE. Quien afirmará:

> *El lenguaje es un instrumento de la razón humana, y no un mero medio para la expresión del pensamiento.*

Gracias al lenguaje el hombre piensa y, además, se expresa. Ahora bien, el lenguaje común no es el más ideal para ninguno de estos dos fines. Carece de rigor, se multiplican en él las ambigüedades, el equívoco, las falacias. Tiene lagunas y defectos. Por ello es preciso recurrir a la creación de un lenguaje más apto, más perfecto, que suprima esos errores. El ejemplo de la Matemática se le presenta a cualquier pensador que se enfrente con este problema, y más si es, a la vez, matemático. La Matemática se considera como una ciencia de rigor, de seguridad. Es terreno firme, piensa en general el no muy habituado en los terrenos de la propia Matemática. Y lo es, porque su lenguaje es simbólico, independiente a contenido experimental alguno. No opera con cosas, emociones, objetos, sino con signos. Atiende, por ello y casi con exclusividad, al propio razonar humano. BOOLE pretende crear, por ello, un lenguaje simbólico, *formal,* y partirá, para ello, de un hecho

---

[47] *An. mat. de la Lóg.,* Introducción.

Los elementos de que se compone todo lenguaje son signos y símbolos. Las palabras son signos.

Las palabras designan, sin embargo, muchas cosas. A veces, cosas materiales, objetos del mundo que nos rodea. Otras, las operaciones con las que el pensamiento humano relaciona o combina las nociones simples de las cosas en conceptos complejos. Otras, representan las emociones del espíritu. Pero en todas estas ocasiones, si se quiere representar esas palabras por escrito, se tendrá que utilizar signos o "símbolos representativos", que gozan de un carácter común, el de ser marcas arbitrarias. Es evidente que, con este sentido, BOOLE no tiene más remedio que aceptar la existencia de otros signos, como los matemáticos, incluidos en esta categoría, porque gozan de la misma propiedad, el de ser marcas arbitrarias. BOOLE definirá los signos

Un signo es una marca arbitraria, que tiene una interpretación fija, y es susceptible de combinación con otros signos sometidos a las leyes fijas que dependen de su mutua interpretación.

La última parte de su definición implica la misma regla que para el manejo de las variables en Matemática. Es decir, un signo sólo puede tener un significado, y siempre el mismo, dentro de un problema; aquí, dentro de un razonamiento. Con lo cual, todas las operaciones de un Lenguaje, considerado por BOOLE como instrumento del razonar pueden realizarse por

un sistema de signos compuesto de los siguientes elementos:

1. *Símbolos literales, como* x, y, z..., *que representan cosas o conceptos de nuestras concepciones.*

2. *Signos de operaciones, como* +, —, . , *que indican operaciones del espíritu por las cuales concepciones de cosas son combinadas o resueltas para formar nuevas concepciones envolviendo los mismos elementos.*

3. *El signo de identidad* =.

Las palabras anteriores definen, por vez primera, lo que es un Cálculo formal. Naturalmente, BOOLE mantiene todavía conceptos como "representar cosas o conceptos", "operaciones de nuestro espíritu", dentro de la formulación sintáctica del Cálculo formal.

4. AMBIGÜEDAD DE LOS TÉRMINOS.

Las ampliaciones, tanto conceptuales —como en el caso de función, o en el de algebrización de la Lógica, con su paso a un Lenguaje formal— como formales —en el caso de ley de composición—, iban a dar entrada a posibles ambigüedades en los términos a utilizar. Ya he indicado la multiplicidad de interpretaciones que puede tener un término como "producto". El equívoco que se pretendía desterrar de la Matemática se introducía en ella en el mismo momento en que parecía ir alcanzando el rigor absoluto.

En los primeros momentos este equívoco parecía poder superarse mediante la especificación precisa de los conjuntos entre los cuales se definían las leyes de composición. Sin embargo, ya HENKEL había indicado que estas leyes debían obedecer a ciertas proposiciones formales. Es decir, que sus leyes formales deberían ser las mismas cualesquiera que fueran los conjuntos entre los cuales se definieran. Se estaba a un paso de admitir que lo esencial no era el tipo particular de conjunto, sino la estructura a que estas leyes de composición daban paso en los mismos. Con lo cual lo importante no sería la especificación del conjunto junto a su operación para evitar ambigüedades interpretativas de las expresiones formales. Lo importante sería la estructura misma de la cual cada conjunto particular dotado de una operación no sería más que un modelo, una realización o interpretación distinta de esa misma estructura. Tales estructuras abstractas deberían definirse, como se deduce inmediatamente de lo anterior, con total independencia de cualquiera de tales interpretaciones o realizaciones. Y el único medio para lograr este objetivo se encontraría en la formulación axiomática, en una vuelta al estilo geométrico, perfeccionado mediante la formulación, también axiomática, de las reglas lógicas a utilizar.

La tercera corriente, que he denominado abstractiva, conducía al mismo punto que las anteriores: necesidad de que la formulación matemática se hiciera en un estilo axiomático formalizado. Incluso daba la primera formulación o ejemplo de lo que debía ser tal sistema formal. Iba a precisar, además, otro elemento: la ambigüedad del lenguaje ordinario para reflejar tales estructuras formales. Que, por totalmente abstractas, necesitan para su formulación de una simbología nueva, especial. Ya el trabajo de GEORGE BOOLE puso de relieve que la Lógica podía utilizar un simbolismo de carácter algebraico que impidiera la aparición de ambigüedades, a la vez que el trabajo del escocés HAMILTON mostraba la importancia de la cuantificación en los terrenos lógicos. En este sentido, el trabajo de PEANO y su escuela, en los últimos años del siglo XIX y primeros del actual, se muestran de incalculable valor, al proporcionar un simbolismo adecuado para tal fin. Simbolismo que ha sido adoptado por la mayoría de los matemáticos.

8. ESTILO FORMAL

Las consecuencias a que dan lugar las tres principales corrientes de la Matemática durante el siglo XIX en cuanto a la fundamentación de esta ciencia y sus posibles repercusiones en el estilo, se pueden resumir señalando que conducen a la convicción de que la Matemática no es otra cosa que una ciencia formal o ciencia de las estructuras formales. Por ello debe ser desarrollada en estilo axiomático, utilizando un simbolismo conveniente para suprimir ambigüedades y para dar máxima generalidad y abstracción a sus desarrollos y resultados.

Dentro de los marcos anteriores caben, sin embargo, multitud de posiciones. Algunas, por el tono polémico que se llegó a adoptar en los comienzos del siglo XX en cuanto a la necesidad de superar las antinomias surgidas en la teoría de conjuntos y en los principios lógicos subyacentes, parecen antagónicas entre sí. De hecho, respecto a algunos puntos, lo son. Pero esos puntos, precisamente, lo son en cuanto a enfoque que se pudiera denominar filosófico, afectando únicamente a la visión de la Matemática como ciencia, al "status" ontológico de los elementos con los que opera el matemático, a sus relaciones con la realidad, con la Lógica, con la Lingüística... Afecta muy poco al desarrollo en sí de la Matemática y al estilo de la misma, que ha realizado una superación constructiva de los diversos puntos de vista aparentemente contrapuestos de las diversas tendencias y que dado el objetivo de este libro no he podido desarrollar ni siquiera esbozar ampliamente. La tendencia a la síntesis la reconocía, por ejemplo, FERDINAND GONSETH al afirmar:

Se ha reconocido que en el campo tan amplio de actividad del pensamiento matemático, en el fondo se sirve sólo de un número muy restringido de formas de razonamiento y la logística *ha descubierto el modo de representarlos con ayuda de símbolos concretos.*

Pero, por otra parte, para la definición de un formalismo, las directrices de la intuición permanecerán preponderantes, no es posible hacer abstracción de los fines y de las significaciones, lo cual sería desnaturalizar las Matemáticas [48].

1. El formalismo.

Los matemáticos en torno a David Hilbert tomaron como doctrina lo que ha venido en llamarse "formalismo" en contraposición a otras dos corrientes del pensamiento matemático de principios de siglo, logicismo e intuicionismo.

El formalismo parte de los supuestos filosóficos enunciados por David Hilbert en su forma definitiva, en conferencia dada en julio de 1927 en el Seminario matemático de Hamburgo, y publicada en las Memorias de dicho Seminario del año de 1928, recogida en la séptima edición de sus *Fundamentos de la Geometría.* Dichos supuestos son:

> *La Matemática, al igual que otra ciencia cualquiera, no puede ser fundada solamente en la Lógica; antes bien, en las ideas preliminares nos es dado algo como condición previa para la aplicación de los silogismos lógicos y para la realización de operaciones lógicas: ese algo son ciertos objetos concretos extralógicos que intuitivamente se presentan ante todo pensamiento, como inmediato producto de lo vivido. Si la conclusión lógica ha de ser cierta, necesitamos que estos objetos puedan abarcarse completamente de un solo golpe de vista por todas partes; y su presentación, su distinción, su ordenación o su seriación consecutiva están dados con carácter intuitivo inmediato al mismo tiempo que los objetos, como algo que ni puede ni hay necesidad de reducir a otro algo. Este es el fundamento filosófico que reputo como exigible a la Matemática y, en general, a todo pensar, comprender y comunicar de índole científica. En especial, en la Matemática son objetos a considerar los propios signos concretos cuya figura, según nuestro punto de partida, es inmediatamente clara y recognoscible. Esto cons-*

[48] Tomado de *La nueva Matemática* de Vidal Abascal, Ed. Dossat, Madrid, 1961, p. 36.

tituye la menor cantidad de hipótesis de la que no puede carecer pensamiento científico alguno y que, por lo tanto, consciente o inconscientemente cada uno tiene obligación de observar [49].

DAVID HILBERT rechaza la teoría logicista de la reducción matemática a la Lógica, pero también la tesis intuicionista extrema de no necesitar, el matemático, objeto concreto alguno y utilizar únicamente la intuición. Esta, para el formalismo, opera con los datos concretos, objetos materiales que son intuitibles directamente; pero, a partir de esta primera intuición o captación del objeto concreto en su forma, la intuición debe ser radicalmente desterrada. El matemático, como cualquier otro ser pensante necesita, para ejercer ese pensamiento, para pensar, de la previa existencia de objetos concretos. Ahora bien, en la Matemática esos objetos no son más que las marcas de la tinta en el papel, de tiza en la pizarra, y no entes de naturaleza ontológica especial.

Conviene precisar. Todo signo posee, al menos, dos sentidos o contenidos. Uno, eidético; otro, operacional, Dentro de un sistema, un signo "significa", designa algo; todo sistema lo es porque sus signos poseen una carga semántica interior, ya que cuando se utiliza el signo es para comunicar algo a alguien, y el contenido de esta comunicación es, precisamente, el contenido eidético del signo. Por otro lado, un signo posee sentido operacional, en el sentido de que se sabe cómo puede ser utilizado.

El formalismo pretende desterrar del signo su contenido eidético, aceptar únicamente su contenido operacional. Del signo debe ser desterrada cualquier carga semántica, quedando el signo sólo como elemento gráfico. Lo que de modo exclusivo se requiere del signo es saber operar con él, no saber lo que significa. Es después de haber realizado una construcción formal, de haber operado con los signos cuando cabe darles una interpretación, un contenido. Pero es claro que, en este caso, pueden darse diversas interpretaciones del mismo sistema y no una en especial. Cada interpretación será vista como una realización, como un modelo de ese cálculo formalizado. Precisamente es el punto al que habían conducido las corrientes de fundamentación del siglo anterior.

---

[49] *Fundamentos de la Geometría*, Ed. C.S.I.C., Madrid, 1953, p. 288-9.

El empleo de un procedimiento puramente operacional evita, junto a su gran capacidad generalizadora, muchos errores. Y ello porque impide el dejarse llevar por la intuición sensible, por ejemplo, en el razonar, aunque esa intuición sensible se haga patente en cuanto a la configuración espacial en que los signos han de aparecer en las fórmulas. Además, una demostración en un cálculo así desarrollado —que se presenta como una figura compuesta de signos o abreviaturas de tales signos— sólo es posible cuando se cumplan unas determinadas condiciones. Así, que tanto los signos de los cuales se parte, como las proposiciones que se toman como primitivas —y que no son más que fórmulas o sucesiones de signos—, como las reglas para operar con dichos signos y proposiciones estén totalmente, explícitamente formulados. No cabe, por ello, y porque los signos son meras marcas carentes de todo referencial, utilizar otros axiomas implícitos, como ocurría en los *Elementos*, de EUCLIDES.

HILBERT se veía abocado de esta forma, en la construcción de un sistema formal, a considerar como tareas esenciales las siguientes:

1. Enumerar todos los signos a usar, a utilizar en la Matemática. Signos que son de dos tipos: los propios de la Matemática, y los que pueden denominarse lógicos, como son los de copulación, implicación, cuantificación. Todos ellos pueden ser designados como *signos primitivos*.
2. Caracterizar de manera no ambigua todas las combinaciones de esos signos entre sí. Según esta caracterización unas combinaciones se admitirán como "significativas" y se pueden llamar "fórmulas" y otras se rechazarán por carentes de significación en el interior del sistema. Ello se logra mediante el enunciado de unas *Reglas de formación de fórmulas*.
3. Completar un proceso de construcción que establezca la construcción sucesiva de todas las fórmulas que corresponden a las proposiciones demostrables en la Matemática. Este proceso demostrativo se llama demostración, por lo que demostrar una fórmula no es más que obtenerla bien como fórmula primitiva, axioma, bien como final de una demostración.

Hay que observar, respecto a estos puntos del programa formalista, en cuanto a 1., que un formalismo no es un mero lenguaje artificial, con signos artificiosamente elegidos. El formalismo pretende desarrollar, con todo rigor, una disciplina, la Matemática. En este sentido la artificiosidad del signo, del lenguaje elegido, no existe. Aunque de hecho se puedan construir lenguajes formalizados con signos enteramente arbitrarios, tengan o no una posterior realización o modelo. Lo importante es la construcción de un lenguaje artificial que sea el trasunto, el reflejo de la construcción matemática. Un simbolismo no interpretado o no apto para la interpretación es sólo un juego con signos; se convierte en lenguaje cuando se dispone de una realización de esos signos y de las reglas para operar con ellos.

En cuanto a 3., se debe precisar que esas reglas de construcción que permiten obtener a partir de unas fórmulas bien construidas otras también bien construidas, no se pueden expresar en el mismo lenguaje que el que le corresponde a los signos. Las reglas de construcción o derivación han de ser entendidas por quien va a desarrollar el cálculo formal. Si éste puede decirse que permanece en un plano enteramente sintáctico, las reglas de derivación han de situarse en otro plano, de carácter semántico. Pueden ser también formalizadas, pero en este caso lo han de ser en lenguaje de nivel superior. Se entra de lleno en los distintos niveles lingüísticos, así como en las distinciones entre "uso" y "mención" de un signo.

La formulación rigurosa de las reglas de derivación exigidas por el formalismo no es nada fácil. En general se aceptan como primitivas dos: el "modus ponens" y la regla de sustitución. De ellas, pueden derivarse otras, de carácter semántico, apoyadas en el llamado "teorema de Herbrand".

Los tres puntos que Hilbert indicó como tarea esencial de la Matemática han constituido la esencia de todo el posterior desarrollo de la misma y, consecuencia forzada, de la manera de concebirla y expresarla.

Estilo formal.

Exposición matemática o Estilo formal que suele constar, cuando la teoría va formalizada, de los pasos siguientes, que completan una axiomatización total de la teoría:

Formulación de los signos primitivos; formulación de las fórmulas de partida o axiomas; definiciones, también formalizadas, que permitan abreviar los cálculos; traducción al lenguaje simbólico de todas las fórmulas, de las cuales no puede hablarse de que sean verdaderas o falsas como adecuadas o no a la realidad, sino únicamente de si están bien o mal construidas de acuerdo con las reglas de construcción de las mismas. Finalmente, exposición rigurosa de las reglas de derivación, éstas en un lenguaje de nivel superior al puramente sintáctico en que van formulados los puntos anteriores.

A partir de estos elementos, se van encadenando las construcciones formales, derivaciones o demostraciones de fórmulas tomadas como teoremas, considerados como meras fórmulas sígnicas, que podrán tener ulterior interpretación en campos muy conocidos de la Matemática o de fuera de ella.

El rigor matemático con este estilo es óptimo. Es el único estilo en el cual puede afirmarse, en su plenitud, lo anterior. La Matemática formalizada es exacta, en el sentido querido por el intuicionista BROUWER cuando al referirse al formalismo señala que la

> *exactitud matemática no reside más que en el desarrollo de la sucesión de relaciones, y es independiente de la significación que se le podría querer dar a esas relaciones o a las entidades que ellas relacionan.*

La carencia de contenido eidético en el desarrollo de un cálculo formal se ha exagerado, queriendo ver en el método formalista, por ejemplo, un mero juego de signos del tipo del ajedrez —con el que se ha comparado constantemente—, en el cual lo que importa, aparte de las fichas y de su posición inicial, son las reglas del juego y su manejo. Sin embargo, el Cálculo formal que construye el matemático, se realiza teniendo en cuenta una ulterior realización y no por el exclusivo placer del juego formal. Pero ya he insistido en este punto suficientemente al empezar el libro.

Un ejemplo.

Es difícil dar un ejemplo de estilo formal, en su plenitud. Y ello, tanto por sus limitaciones intrínsecas, como por la longitud exigible, mínima, para su ejemplificación. Sin embargo, y en primera aproximación, voy a mostrar la derivación de dos teoremas relativos a la Teoría de grupos, de carácter absolutamente elemental. Para ello se suponen conocidas, por previamente formuladas, todas las condiciones que he indicado en el punto anterior, entre ellas las de universalización y particularización, que indiqué como no formuladas en el estilo geométrico griego. Unicamente señalo, en primer lugar, las fórmulas primitivas que van a utilizarse en la derivación, van precedidas de *P*, premisa. En la derivación, la columna izquierda indica el número correspondiente de línea; la de la derecha, algunas indicaciones respecto a las reglas que entran en juego en la derivación, y que deberían suprimirse en un puritano formalismo [50].

P. 1. $(x)\,(y)\,(z)\,(xo(yoz) = (xoy)oz)$
P. 2. $(x)\,(\exists\, e)\,(xoe = x)$
P. 3. $(x)\,(\exists\, x')\,(xox' = e)$

Teorema 1: $(x)\,(y)\,(z)\,(xoz = yoz \rightarrow x = y)$

Derivación

1.	$(xoz)oz' = (xoz)oz'$	Identidad
2.	$xoz = yoz$	*P* condicional Teor., particularizada
3.	$(xoz)oz' = (yoz)oz'$	
4.	$xo(zoz') = (xoz)oz'$	Sust. en Pl., particularizada
5.	$yo(zoz') = (yoz)oz'$	Sust. en Pl., particularizada
6.	$xo(zoz') = (yoz)oz'$	
7.	$xo(zoz') = yo(zoz')$	
8.	$zoz' = e$	Sust. en *P*3
9.	$xoe = yoe$	
10.	$xoe = x$	Sust. en *P*2
11.	$x = yoe$	
12.	$yoe = y$	
13.	$x = y$	
14.	$xoz = yoz \rightarrow x = y$	
15.	$(x)\,(y)\,(z)\,(xoz = yoz \rightarrow x = y)$	Universalización

Teorema 2: $(x)\,(xoe = eox)$

Derivación

1.	$eo(xox') = (eox)ox'$	Sust. en *P*1
2.	$xox' = e$	
3.	$eoe = (eox)ox'$	

[50] De P. SUPPES: *Introducción a la Lógica simbólica*. Ed. Cecsa. México, 1966, pp. 146 y 152.

4. $eoe = e$
5. $e = (eox)ox'$
6. $xox' = (eox)ox'$
7. $(x)(y)(z)(xoz = yoz \rightarrow x = y)$ Teor. 1
8. $xox' = (eox)\,ox' \rightarrow x = eox$ Sust. en 7, Particularizada
9. $x = eox$
10. $xoe = x$
11. $xoe = eox$
12. $(x)(xoe = eox)$

La estructura formal.

La importancia de los trabajos de DAVID HILBERT y su escuela formalista es verdaderamente incalculable. Por lo pronto ha cambiado el estilo de pensar matemático con su influencia, y el estilo propio de expresarse. A pesar de que no ha logrado el éxito completo en cuanto a una única fundamentación de la Matemática, su intento ha dado paso a una serie de estudios y nuevas disciplinas como la Metamatemática.

Pero es en la propia Matemática donde su influjo es total, hasta el extremo de que hoy puede ser definida esta disciplina como la ciencia de las estructuras formales. A partir de la teoría de conjuntos, que puede ser axiomatizada completamente —aunque no por ello toda la problemática que la misma encierra haya sido resuelta de modo satisfactorio, por lo que puede seguir considerándose que la Matemática carece todavía de una apoyatura alcanzada de una vez para siempre, utopía pretendida y difundida por muchos— se pueden desarrollar cada uno de los campos de la Matemática teniendo en cuenta sistemas de carácter axiomático. Sistemas que se engloban en tres tipos de estructuras formales: algebraica, topológica, de ordenación. Las tres se combinan entre sí dando explicación de casi toda la Matemática hasta ahora conocida. Es la obra realizada por el grupo de NICOLÁS BOURBAKI, tras la década de los treinta. Por lo que el influjo de HILBERT ha sido difundido y remachado por la escuela francesa bourbakista, unificando, prácticamente, todo el edificio matemático y el estilo correspondiente.

2. ESTILO SEMIFORMAL.

La pretensión de realizar toda la obra matemática en plan estrictamente formal, constituye una meta demostradamente utópica.

Demostradamente, por el propio formalismo, que ha señalado, en lo que vienen llamándose "teoremas de limitación" sus alcances. Sin embargo, partes de la misma sí pueden exponerse en tal estilo. Por ejemplo, la teoría de grupos finitos, de la que he dado el ejemplo anterior de tal derivación formal.

A pesar de lo cual, el estilo matemático actual es seguir lo más cerca posible las normas del estilo formal, aunque sin llegar a cumplirlas en su totalidad. Y ello, porque además de las limitaciones internas de los formalismos, en toda demostración formal se enmascara un hecho que es trascendental para el matemático: el núcleo o la esencia directora de la demostración. Así, en el ejemplo dado de la ley de cancelación o simplificación de la teoría de grupos la clave de todo el proceso se encuentra en la línea 7, al reemplazar de modo adecuado en *P*.1., sustitución adecuada que conduce, por *P*.3., a la línea 11. Lo mismo se puede decir respecto al segundo teorema, de unicidad de elemento neutro a izquierda y derecha, que las claves se encuentran en la sustitución a realizar en *P*.1., línea 4 y en el uso del teorema anterior, introducido ya como premisa conocida, sin tener que volver a desarrollar todo el mecanismo para obtener un resultado ya previamente establecido. Y estas claves son las que, precisamente, deberían ir en un muy primer plano y no quedar ocultas en el proceso demostrativo.

En el estilo semiformal se parte, en breve introducción aclaratoria a la obra o en final tras índice, de una clave de signos a utilizar o utilizados; a partir de este punto, sin especificaciones en cuanto a las reglas lógicas de inferencia —supuestas conocidas—, se dan los axiomas de la estructura o estructuras a utilizar, las definiciones convenientes, y se dan justificaciones de carácter "intuitivo" respecto al motivo de tales definiciones, de la marcha a seguir, del alcance de las mismas y de las proposiciones que se demuestran. En ocasiones se dan ejemplos, o campos de aplicación. Con todo lo cual se aligera la redacción, se permite el recurso a la retórica al utilizar en estas ocasiones el lenguaje ordinario, prohibido en la expresión auténticamente formal de la obra.

Un ejemplo.

Como ejemplo de este estilo semiformal, característico de la Matemática actual, se podría citar *Eléments de Mathématiques.* Es la obra del grupo NICOLÁS BOURBAKI, estructurada en forma axiomática a partir de la teoría de conjuntos en las tres ramas algebraica, topológica y de ordenación, con sus interrelaciones correspondientes. Es la que, retomando la bandera hilbertiana, ha marcado y marca el sendero, tanto de la actual Matemática como de la futura, en un plazo que se prevé bastante amplio —aunque existan autores, como S. LANG, que afirman su influencia "in content, not expository style" [51].

El texto elegido pertenece al *Libro II, Algebra,* Capítulo 5, "Cuerpos Conmutativos" [52].

$\neq\neq$ 1. *Cuerpos primos. Característica.*

1. *Cuerpos primos.*

Se sabe (Cap. I, $\neq\neq$ 9, núm. 2) que la intersección de una familia cualquiera de subcuerpos de un cuerpo K es un *subcuerpo* de K; en particular, la intersección P de *todos* los subcuerpos de K es el *mínimo subcuerpo* de K; no contiene ningún subcuerpo distinto de sí mismo.

Definición 1. Se dice que un cuerpo es primo si no contiene ningún subcuerpo distinto de sí mismo.

Todo cuerpo K contiene, pues, un cuerpo primo y uno sólo P; vamos a determinar la estructura de P. Para ello, notemos que P, como todo subcuerpo de K contiene el elemento unidad e de K (ya que $x^2 = x$ y $x \neq 0$ entraña $x = e$ en K, cf. cap. I, $\neq$ 9, núm. 2); es, por lo tanto, el subcuerpo de K *engendrado* por e (también se puede decir que es el subcuerpo de K engendrado por la parte vacía $\emptyset$ de K). Consideremos en primer lugar el *subanillo* A de K engendrado por e; A contiene todos los elementos $n \cdot e$, donde $n \in Z$, y como estos elementos forman un anillo, A es idéntico a su conjunto; por otra parte, la aplicación $n \rightarrow n \cdot e$ es una representación del anillo Z de los enteros racionales sobre A (cap. I, $\neq$ 8, núm. 8). El conjunto de los enteros $n \in Z$ tales que $n \cdot e = 0$ es un ideal (p) de Z, donde $p \geq 0$

[51] *Algebra,* Ed. Addison-Wesley, 1965, p. VI.

[52] Lo tomo de la 2.ª ed. correspondiente al fasc. Hermann 1102, París, 1959.

es la *característica* (cap. I, ≠ 8, núm. 8) del cuerpo K, y A es isomorfo al anillo cociente $Z/(p)$. Dos casos pueden presentarse: 1.° $p = 0$; A es entonces isomorfo a Z; como $A \subset P$, P contiene el cuerpo de fracciones de A (cap. I, ≠ 9, núm. 4), que es isomorfo al cuerpo Q de los números racionales; como P es un cuerpo primo, es idéntico al cuerpo de fracciones de A, luego es isomorfo a Q.

2.° $p \neq 0$; como A está contenido en un cuerpo, no puede contener divisores de cero; por lo tanto, $Z/(p)$ no puede contener divisores de cero, lo que implica que la relación $p = mn$ ($m > 0$, $n > 0$) entraña $m \equiv 0$ (mod. p) o $n \equiv 0$ (mod. p), es decir, $m = p$ o $n = p$; por consiguiente, p es un *número primo* (capítulo I, ≠ 8, núm. 7). Pero se sabe (capítulo I, ≠ 9, teor. 2) que, para todo número primo p, $Z/(p)$ es un *cuerpo*; por consiguiente, P es idéntico a A e isomorfo a $Z/(p)$. En resumen:

TEOREMA 1. La característica de un cuerpo K es igual a 0 o a un número primo. Si K es de característica 0, el subcuerpo primo de K es isomorfo al cuerpo Q de los números racionales. Si K es de característica $p > 0$, el subcuerpo primo de K es isomorfo al cuerpo $Z/(p)$ de los enteros racionales módulo p.

Notas.—1) Para establecer el teor. 1, no hemos utilizado el hecho de que K sea conmutativo; el teor. 1 se aplica, pues, a todo cuerpo *conmutativo o no.*

2) Todo *subcuerpo* de un cuerpo K (conmutativo o no) contiene el subcuerpo primo de K, por lo tanto, tiene la *misma característica* que K.

3) Siendo el cuerpo Q infinito, todo cuerpo de característica 0 es infinito; todo cuerpo finito tiene, por lo tanto, una característica $\neq 0$.

2. *Exponente característico.*

Estando dado un cuerpo K de característica p, llamaremos *exponente característico* de K al número p si $p > 0$, y al número 1 si $p = 0$.

PROPOSICIÓN 1. Si p es el exponente característico de un cuerpo conmutativo K, la aplicación $x \rightarrow x^p$ es un isomorfismo de K sobre uno de sus subcuerpos.

Está claro que $(xy)^p = x^p y^p$. Vamos a demostrar que

$$(1) \quad (x + y)^p = x^p + y^p$$

Es evidente si $p = 1$. Si $p > 1$, se tiene $(x + y)^p = \sum_{k\,o}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k}$ donde $\binom{p}{o} = \binom{p}{p} = 1$; no nos queda, pues, más que demostrar que, cuando $1 < k < p$, $\binom{p}{k} e = 0$. Ahora bien, se tiene $k\,!\binom{p}{k} = p(p-1)\ldots(p-k+1)$, luego $(k\,!\,e)\left(\binom{p}{k}e\right) = = p(p-1)\ldots(p-k+1)\,e = 0$ como $k\,!\,e = e\,(2e)\,(3e)\ldots(ke)$ y $he \neq 0$ para $1 < h < p$, se tiene $k\,!\,e \neq 0$, de donde $\binom{p}{k} e = 0$. La aplicación $x \rightarrow x^p$ es, pues, una representación de K en sí mismo; como no es nula, es un isomorfismo de K sobre uno de sus subcuerpos (cap. I, ≠ 9, teor. 1).

....

≠ ≠ *Extensiones.*

Sea K un cuerpo, y L un *subcuerpo* de K; los elementos unitarios de K y L son idénticos, por tanto, L puede ser dotado de una estructura de *álgebra* sobre K (cap. II, ≠ 7, núm. 1). Diremos que L, dotado de esta estructura de álgebra sobre K, es una *extensión* de K; reservaremos la palabra de *subcuerpo* para designar L dotado de su estructura de cuerpo *sin operadores*. Se notará que todo cuerpo puede ser considerado como una extensión de su subcuerpo primo.

Cada vez que, sin precisar, se diga que un cuerpo K está contenido en un anillo L se entenderá que K es *subcuerpo* de L (dicho de otra forma, que su estructura de cuerpo está *inducida* por la estructura de anillo de L). Sean L y M dos subcuerpos de K tales que $K \subset L \subset M$; se dirá que L es un cuerpo *intermedio* entre K y M; dotado de su estructura de extensión de K, es un subálgebra de M, que se le llama también *subextensión* de la extensión M de K...

LOS GENEROS

Las formas expresivas utilizadas por el matemático para dar cuenta de su trabajo son, en general, las mismas que las empleadas en cualquier otra disciplina. Inciden en ese trabajo, que se puede considerar de dos tipos: Creador, Divulgador. Da paso, esta interrelación, a tres distintos niveles expresivos: Lenguaje de creación, Lenguaje de exposición, Lenguaje de divulgación.

1. LENGUAJE DE CREACION

El Lenguaje de creación puede reflejarse en tres formas distintas: Ensayo, Diario personal, Carta.

1. Ensayo.

El ensayo perteneciente a este nivel suele ser breve. Se publica en revistas, atendiendo fundamentalmente a dejar constancia de la idea obtenida. Se desarrolla, incluso, en leve esquema, sin llevar a veces ni un mínimo de demostración de las proposiciones que enumera. En ocasiones se citan resultados, teoremas, y se promete su demostración en trabajo posterior. En ocasiones es demostración de sólo un teorema, pero de muy amplia generalidad, en cuyo caso puede ir totalmente desarrollado.

2. El Diario matemático.

El diario matemático se escribe, como todo diario, con la íntima convicción de que, en plazo más o menos breve, será publicado. Bien por aquel que lo escribe —y puede ser publicado entonces en su totalidad o desarrollando algún punto o tema especial—, bien de manera póstuma. De aquí que lo considere como una forma expresiva más.

En general, el matemático creador ha solido trabajar "de cabeza" —así, por ejemplo, encontramos declaraciones del tipo "los resultados hace más de un año que los tengo, pero no escritos en parte alguna", en matemáticos como ABEL, GALOIS, GAUSS, POINCARÉ...—. A pesar de lo cual utiliza su borrador, su cuaderno de notas. En él se apuntan los resultados, los esbozos, las posibles demostraciones, el mero esquema, a la vez que la fecha de los mismos. Se convierte, el borrador, de esta forma, en auténtico Diario matemático.

El borrador de Dedekind.

Como ejemplo de borradores puede citarse el de RICHARD DEDEKIND. Si en carta de 1899 el gran matemático alemán recuerda

> *Cuando el joven* FÉLIX BERNSTEIN *me hizo una visita en Harzburgo por la Pentecostés 1897, me habló del teorema* B, *p. 7, de la traducción Marotte, se sorprendió un poco cuando le dije mi convicción de que este teorema era* fácil *de demostrar con mis métodos; sin embargo, la entrevista no fue más adelante sobre su o mi demostración. Tras su partida me dediqué a ello y construí la demostración adjunta*[1].

En 1932 ZERMELO, al leer la correspondencia CANTOR-DEDEKIND, tuvo la sorpresa de encontrar que esa demostración era la misma que él publicara, como original, en 1908. Pero lo curioso es que DEDEKIND había dado ya la demostración, en un borrador fechado por él mismo con "1887-7-11", diez años antes, como descubrió CAVAILLÉS al estudiar el borrador del matemático alemán.

El Diario de Gauss

Modelo de Diario matemático bien puede considerarse el borrador de GAUSS. En vida, muchas veces se permitió GAUSS afirmar que teorías nuevas, incluso revolucionarias, le eran conocidas desde muchos años atrás. Así, por ejemplo, comunica a LEOPOLDO CRELLE, tras la lectura de los trabajos de ABEL sobre las funciones elípticas, en 1828, que él lleva trabajando sobre el tema más de treinta años. Agrega:

> *Otras ocupaciones me impidieron por el momento editar estas búsquedas.* ABEL *me ha adelantado, al menos para la tercera*

---

[1] De *Philosophie mathématique* de J. CAVAILLÉS, p. 184. Ed. Hermann, París, 1962.

> *parte de estos trabajos. Viene a situarse justamente en la vía a la que llegué en 1798. No puede por ello extrañarme que, para la mayor parte, haya llegado a los mismos resultados. Y como, por otra parte, su exposición testimonia tanta penetración y elegancia, me veo dispensado por ello mismo de exponer las mismas cuestiones...* [2].

En algún caso, afirmaciones de este tipo prioritario, sin aparente demostración de tales trabajos, provocaron reacciones muy violentas. Así, el húngaro BOLYAI creó la geometría hiperbólica con independencia del ruso LOBATCHEVSKI en los entornos de 1830. El trabajo, breve, del húngaro se publicó como Apéndice de un tratado de matemáticas compuesto por el padre de BOLYAI, aficionado a la Matemática más que auténtico matemático, pero muy amigo de GAUSS. Este envió su opinión al leer el Apéndice, afirmando que tal geometría la tenía muy ampliamente desarrollada y que no la había publicado "por temor al grito de los beocios", y que ya se veía "dispensado de exponer dichas cuestiones". JANOS BOLYAI abandonó airado la Matemática, con muy fuerte discusión familiar, acusando al padre de haber comunicado a GAUSS sus búsquedas antes de la publicación.

De hecho, la tragedia del Diario íntimo no publicado en vida, es la creación de este ambiente de recelo cuando se permiten afirmaciones de prioridad como las emitidas por GAUSS. El clima creado por éste, considerado como "princeps mathematicorum", puede reflejarse en la opinión emitida por LEGENDRE en carta a JACOBI de 30 de noviembre de 1827:

> *¿Cómo es posible que el señor* GAUSS *se haya atrevido a deciros que la mayor parte de vuestros teoremas le eran conocidos y que él los había descubierto en 1808?*
>
> *...Este exceso de impudicia no es creíble por parte de un hombre que tiene suficiente mérito personal como para no tener necesidad de apropiarse los descubrimientos de otros... Pero es el mismo hombre que en 1801 quiso atribuirse el descubrimiento de la ley de reciprocidad publicado en 1785 y que quiso apropiarse en 1809 del método de los mínimos cuadrados publicado en 1805. Otros ejemplos se encontrarían en otros lugares, pero un hombre de honor debe evitar imitarlos* [3].

---

[2] J. BARINAGA: *Miscelánea matemática.*
[3] J. BARINAGA: *Miscelánea matemática.*

LEGENDRE insiste con fecha 14 de abril de 1828. JACOBI ha respondido, anticipándose a esta última insistencia. Ha dado una posible explicación. El 12 de abril ha escrito:

> *En cuanto a M.* GAUSS, *no ha publicado aún nada sobre las funciones elípticas, pero es cierto que ha tenido cosas bonitas. Si ha sido adelantado y quizá sobrepasado, es una justa pena de que haya cubierto con un velo místico sus trabajos. No lo conozco personalmente, habiendo estudiado la filología en Berlín, donde no hay geómetras de distinción*[4].

El velo místico fue roto con la publicación de los borradores de GAUSS. Y esa publicación mostró que, de modo efectivo, todo lo que él se había atribuido era cierto. Y más aún, en su Diario se encuentran ideas y temas desarrollados o esbozados, con total independencia por otros matemáticos años después.

3. LA CARTA.

Es un género que tuvo su época entre los matemáticos. Debemos considerar dos tipos de cartas. La obra que adopta esta forma, pero en el fondo es un auténtico ensayo o libro dirigido al gran público, y la carta personal.

Carta-Ensayo.

De la primera se pueden citar las de ARQUÍMEDES. Son, en realidad, verdaderos libros escritos en lenguaje o estilo geométrico, salvo el clásico comienzo

> ARQUÍMEDES *a* ERATÓSTENES, *¡Salud! Te escribí...*

Falto de imprenta, el matemático siracusano ha de dar a conocer sus resultados a los geómetras de Alejandría a través de su amigo, y para ello elige el género epistolar, mera excusa para un contenido estrictamente geométrico.

[4] J. BARINAGA: *Miscelánea matemática.*

Fuente informativa.

A pesar de la existencia de la imprenta, los matemáticos se ponen en contacto personal mediante la carta en los siglos XVI-XVII. Asombra observar cómo viajaban para establecer relaciones directas y conocer y dar a conocer, así, las nuevas ideas. Viajes acompañados de numerosas cartas. En este sentido, el padre MERSENNE es enlace clave de todo el pensamiento científico, intermediario entre las más grandes personalidades del pensamiento de la época. Es corresponsal de DESCARTES, PASCAL, FERMAT, ROBERVAL, HUYGENS..., e intercambia sus opiniones, sus críticas, sus descubrimientos. Estos, cuando son estrictamente matemáticos, se limitan, en general, al enunciado sin demostración, salvo cuando existen disputas de prioridad o provocadas por oscuridad expresiva. Sin embargo, se pueden citar las intercambiadas entre PASCAL y FERMAT dando origen al Cálculo de probabilidades, donde todos los casos posibles son discutidos con detenimiento absoluto, exhaustivo.

El intercambio epistolar se convierte en fuente de información, sustituto de la revista estrictamente matemática, inexistente en la época y que conduce a los matemáticos a permanentes disputas planteadas y resueltas epistolarmente. Así, el reto de PASCAL con la cicloide; las discusiones entre DESCARTES, FERMAT, ROBERVAL, los PASCAL —padre e hijo—, en cuanto a la tangente y normal a una curva; las que surgirán entre LEIBNIZ y NEWTON, aunque al principio sus cartas se tramitan, amistosas, a través de la Royal Society, para darles carácter oficial; entre los hermanos BERNOULLI...

Fuente de información lo serán siempre. Y en algún caso lograrán rescatar obras perdidas u olvidadas. Así, las intercambiadas entre LEGENDRE y JACOBI, y que he mencionado antes, servirán para que JACOBI reclame la Memoria presentada por ABEL a la Academia de Ciencias de París. ABEL había publicado en el *Journal de Crelle,* en 1829, un ensayo en el que hacía referencia a un trabajo presentado dos años antes a la Academia de Ciencias de París. En carta de 14 de marzo de 1829, JACOBI escribe:

> *¡Qué descubrimiento de* ABEL *el de esta generalización de la integral de* EULER*! ¡Nunca se había visto cosa parecida! ¿Pero cómo es que este descubrimiento, quizá el más importante de lo que se ha hecho en matemáticas en el siglo en el que vivimos*

> *estando comunicado a vuestra Academia hace dos años, ha podido escapar a vuestra atención y a la de vuestros colegas?* [5].

El 8 de abril, LEGENDRE da excusas, imposibles. Pero recuperó la Memoria y, sin concurso previo, hizo que el Gran Premio de la Academia fuera concedido a JACOBI y a ABEL, en 1830, días después de la muerte del matemático noruego.

La Carta-borrador.

Junto a los dos tipos anteriores de cartas podemos encontrar el intermedio, que da información y, a la vez, es obra de creación. No suele ir dirigido, en general, al público matemático, presenta un carácter más íntimo. De este tipo son, por ejemplo, las intercambiadas entre CANTOR y DEDEKIND, o las de tono polémico entre FÉLIX KLEIN y HENRI POINCARÉ. Las primeras, publicadas por vez primera en 1937 en su totalidad, revelan un hecho interesante: las de DEDEKIND se reproducen del borrador del mismo, faltos de las cartas auténticas, finales. Como los editores EMILIA NOETHER y JEAN CAVAILLÉS señalan:

> *Una gran parte de estas cartas ha pasado casi sin modificación a las publicaciones posteriores* [6].

De modo efectivo, en ellas se encuentra toda la gestación de la gran teoría de los transfinitos de CANTOR, pasada por la crítica perfeccionadora de DEDEKIND.

2. LENGUAJE DE EXPOSICION

El lenguaje que denomino Lenguaje expositivo —aunque toda publicación sea, en su sentido general, exposición— comprende ya el ensayo o memoria, ya el libro. Con un mayor cuidado expositivo, refleja la tendencia al estilo universal, de semiformalización. Las demostraciones se dan, en general, en esquema, atendiendo más al núcleo de pensamiento central que al detalle pormenorizado.

---

[5] J. BARINAGA: *Miscelánea matemática.*
[6] De *Ph. math.*, p. 186.

Hay que observar que el tipo de publicación "memoria" es quizá el preferido por el matemático. En él logra dar un conjunto de demostraciones de nuevas proposiciones acerca de un tema concreto, particular. Puede ir desarrollando toda una rama de la Matemática, si es preciso, pero a retazos. Como obra colectiva, la Matemática se beneficia de este tipo de trabajo más que del libro acabado. Exige éste la culminación de toda una obra que, a veces, no se logra fácilmente. La memoria, más breve, puede desarrollar en menor tiempo y con mayor detalle aspectos que serían improcedentes en libro. Permite, además, una mayor libertad expresiva en cuanto a una posible ausencia de rigor excesivo, de total axiomatización. Por otro lado, temas hay aptos para memoria y no para libro. Este, por ello mismo, tiende a convertirse en volumen recopilador de ensayos anteriores, agrupados por una misma temática. Incluso el volumen puede recoger las aportaciones de varios autores a un mismo tema, complementándose.

En otras ocasiones, el libro se presenta como resultado de cursos orales en los cuales el autor ha expuesto teorías, enfoques, demostraciones enteramente originales. En general, promete, en este caso, ulterior revisión y perfección, que en muchas ocasiones, quizá la mayoría, no llegue a realizar, ocupada su atención en otros campos de la Matemática.

Dificultades para el lector.

Para el lector, este nivel expositivo presenta muy serias dificultades de carácter localizador, esencialmente. Hasta el siglo pasado eran nulas las revistas dedicadas a la Matemática. Fue la primera la creada por GERGONNE en 1810. El *Journal de Crelle* apareció en 1826 gracias al impulso del financiero y amigo de la Matemática LEOPOLDO CRELLE y de ABEL. Las memorias de esta época son realmente inaccesibles. De algunas existen reediciones en Antologías, siempre parciales, o en las obras completas de algunos autores que las tienen editadas completas o, al menos, casi completas. En la actualidad, se produce la misma consecuencia, pero por causa contraria: Existencia de gran cantidad de tales revistas, más de diez mil exclusivamente dedicadas a la Matemática. Con lo cual el problema estriba en la selección del tema; consiguientemente, de revistas especializadas en tal tema; finalmente, de los ensayos que, de modo efectivo, sean los valiosos. Utopía del acierto.

El peligro es tal que bastaría recordar el permanente desfase de la Matemática española por su incapacidad electiva, a pesar de la buena voluntad de algún matemático que, como REY PASTOR, llegó a cambiar el panorama de esta disciplina en España. Con palabras, realmente descorazonadoras, del propio REY PASTOR, pronunciadas ya al final de su carrera, en 1956:

> *A finales del siglo XIX damos un salto de gigante con la introducción de* STAUDT, *más estudiado aquí que en Alemania; pero la Geometría se enderezó por el rumbo analítico, y tanto* CREMONA *como* TORROJA *y quienes los seguíamos quedamos una vez más fuera del cauce*[7].

3 LENGUAJE DE DIVULGACION

Al tercer nivel expresivo lo he denominado Lenguaje de divulgación. Adopta, en general, la forma de libro llamado de texto o de iniciación. Ambas pueden ser, en algún momento, de iniciación o directa exposición de teorías originales de un autor o escuela. Al pretender —sobre todo los llamados de texto— un público más amplio, aunque también profesional de la Matemática, su desarrollo suele adoptar un estilo que no alcanza al semiformal. Por ello son notas a tener en cuenta la claridad, sencillez, concisión..., notas atribuibles o exigibles a toda obra cuyo carácter esencial se pretenda didáctico.

En los de iniciación —acentuado en lo que se refiere a los de texto—, pocas veces el autor busca el aporte original en cuanto a nuevas teorías. Sí en la elección de las mismas, en su ordenación, demostraciones más simples, búsqueda de aplicaciones, semejanzas y ejemplos.

Precisamente por las dificultades señaladas en el párrafo anterior, este nivel de divulgación se convierte en clave del progreso matemático. Si la mejor fuente para el posterior trabajo es la memoria o el ensayo descrito en el segundo nivel, solamente se está en condiciones de acceder a su comprensión en el caso del matemático normal o incluso creador —salvo el genio, cosa no muy frecuente—, tras el previo conocimiento de este tercer nivel. En el momento ac-

---

[7] Discurso de contestación al de Ingreso de R. SAN JUAN en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1956.

tual corresponde al mismo la labor preparatoria para, a su través, alcanzar la "intuición de lo formal", base de esa posible y ulterior labor personal en el terreno matemático.

La recreación lectora.

Hay que observar, al llegar a este punto, que la obra matemática exige tanto del que escribe como del que lee. Este, el lector matemático, ha de "recrear" la obra, sea del nivel que sea, que tiene entre manos. Ha de ser él quien cubra las lagunas del texto, los reiterados "es inmediato", "es evidente", "se obtiene", "el lector comprobará", ..., que jalonan las demostraciones completas de las proposiciones que se enuncian en los del primero. Supone, esta labor, lo que algunos autores, en sus prefacios, llaman "madurez matemática del lector". Madurez obtenida, en general, en cotidiana labor de lectura, de trabajo. Labor de enfrentarse con las formas de razonar, con los objetos matemáticos, y que lleva a hacer creer, en algunas ocasiones, en la existencia real, casi tan material como la tinta y el papel en que va escrito este libro, de tales formas y objetos. y toda esta primera fase ha de ser cubierta por las obras que he denominado divulgadoras.

Obra de final, de comienzo de época.

Pero, además de las razones anteriores de preparar mentalmente para la "intuición de lo abstracto" al futuro matemático, este nivel presenta otro aspecto no menos esencial. Si he dicho que el autor busca, elige los temas, los ordena, este trabajo bien podemos considerarlo tan creador como el que se refleja en el primer nivel considerado. Las memorias, múltiples, cubren, por no decir anegan, ciertos campos. Pero la unidad, el saber elegir lo que de ellas es realmente fructífero, es tarea que a veces se presenta como irrealizable. En este sentido una obra de divulgación matemática puede ser culmen de toda una época o generación, y base de apoyo de otra. He citado el caso de una obra pretendidamente didáctica, el *Traité élémentaire du Calcul differentiel et calcul intégral,* de LACROIX, que revolucionó la matemática inglesa del siglo XIX; he citado la obra de HENKEL de 1867 con la explícita formulación del "principio de permanencia de las leyes formales". Podríamos agregar, entre otros, y por su proximidad a nosotros, el tratado *Algebra moderna,* de VAN DER WAERDEN, que sistematizó, por vez primera, en 1930-31, los trabajos de la escuela algebrista alemana de EMILIA NOETHER, STEINITZ, HASSE, ARTIN... y ello de forma tal que se convirtió en base de toda el álgebra llamada "moderna" que se ha realizado hasta nuestros días. En los cuales otra obra ha venido a sustituirla con idéntico propósito y resultado, el *Algebra conmutativa,* de ZARISKI-SAMUEL, de 1958. Compendio sistemático de todo lo realizado en este terreno, se convierte en el bagaje mínimo necesario que ha de tener cualquiera que pretenda hacer algo original en ramas de la Matemática como el Algebra o la Geometría algebraica. Obra que, como resumen de propósitos, como deseo de lo que debe ser todo tratado del nivel que he llamado divulgatorio —y que no debe confundirse con lo que vulgarmente se denomina divulgación, para la cual el matemático profesional muestra una decidida aversión— estampa como lema las palabras de G. COURTELINE:

Le juge: Acussé, vous tâcherez d'être bref.

L'acussé: Je tâcherai d'être clair.

INDICE DE NOMBRES

INTRODUCCION AL ESTILO MATEMATICO

La Matemática no es, no ha sido, una disciplina conceptual que se ha desarrollado evolutiva, orgánicamente; la Matemática se le muestra a Javier de Lorenzo como la sucesión de distintas disciplinas que aumentan su conocimiento por yuxtaposición, dialécticamente. Cada tipo de Matemática presenta características propias, en tiempo y lugar, que pueden abordarse desde su forma expresiva interna. Esta convicción, obtenida por un proceso experimental en su estudio de la Matemática, hace que el autor sostenga la unidad de los métodos de estudio sincrónico y diacrónico. El primero, para desvelar cada tipo particular de Matemática. El segundo, para mostrar cómo, alcanzado el límite de ese tipo particular de Matemática —cala sincrónica—, ha de desembocar en otro tipo que mediante un nuevo modo expresivo —reflejo siempre de una previa conceptuación del conocer y particularmente del conocer matemático, condicionado por una situación histórica, socioeconómica determinada— alcance otro estadio, otro tipo de Matemática. Cala diacrónica que llega a mostrar la coexistencia de varios tipos de Matemática en un mismo momento histórico.

No implica, la tesis anterior, un desarrollo de tipo histórico al sentido clásico. *Introducción al Estilo Matemático* se hilvana con la historia, pero sólo en cuanto búsqueda de unas características comunes a cada Estilo propio obtenido en las calas sincrónicas. Cada Estilo de los aquí estudiados —que pretenden ser concluidos, si no completos—, no es más que el reflejo de cada uno de los tipos de Matemática que ha existido. Como tal reflejo, enfocado internamente —considerada la Matemática como una rama del conocer, pero sin pretender marcar su estatuto en esta *Introducción* respecto a los entornos socioeconómicos en que las calas sincrónicas se realizan, o los saltos cualitativos de cada tipo de Matemática en su proceso diacrónico o dialéctico—, se parten de unas consideraciones en cuanto al Simbolismo y su necesidad para toda Ciencia; se termina con unas breves consideraciones respecto a los Géneros expresivos más propios de la Matemática. En medio se muestra como válido el estudio de la Matemática desde su vertiente expresiva como Lenguaje, condicionante y condicionado a una labor de pensamiento que es, a su vez, labor de acción práctica sobre la naturaleza.

Javier de Lorenzo es Licenciado en Ciencias Matemáticas y en Filosofía por la Universidad de Madrid. Catedrático de Matemáticas, comparte unas labores cada día más administrativamente docentes, con las preocupaciones expresivas que tal labor supone; ha publicado ensayos diversos de historia y filosofía de la Matemática; ha dictado conferencias en distintos centros culturales de España.